ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΙΙ

Ενότητα 5: Η Ομοιογενής Γραμμή Μεταφοράς

Λαμπρίδης Δημήτρης
Ανδρέου Γεώργιος
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Η Ομοιογενής Γραμμή Μεταφοράς

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Διαφορική εξίσωση της ομοιογενούς γραμμής μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας
2. Φυσικές ερμηνείες των λύσεων
3. Χρονικές συναρτήσεις ρευμάτων και τάσεων

Ομοιογενής Γραμμή Μεταφοράς (1/3)

- Θεωρούμε καταρχήν μια γραμμή μεταφοράς, δυο παράλληλων αγωγών, όπου η μεταφορά της ισχύος γίνεται **κατά μήκος της γραμμής και όχι εγκάρσια**.
- Για να ισχύει αυτό, θα πρέπει **η απόσταση μεταξύ των αγωγών (*d*) να είναι πολύ μικρότερη από το μήκος κύματος των τάσεων/ρευμάτων στη συγκεκριμένη συχνότητα (*λ*)**
- Στις εναέριες ΓΜ το μήκος κύματος *λ* στα 50 Hz είναι :

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{30000 \ \mathrm{km/s}}{50 \ \ 1/\mathrm{s}} = 6000 \ \mathrm{km}$$

- Οι αποστάσεις *d* μεταξύ αγωγών βρίσκονται στην περιοχή 0,6 – 15 m, οπότε *d* << *λ* , και άρα μπορούμε να θεωρήσουμε **μόνο διαμήκη μεταφορά ισχύος.**

Ομοιογενής Γραμμή Μεταφοράς (2/3)

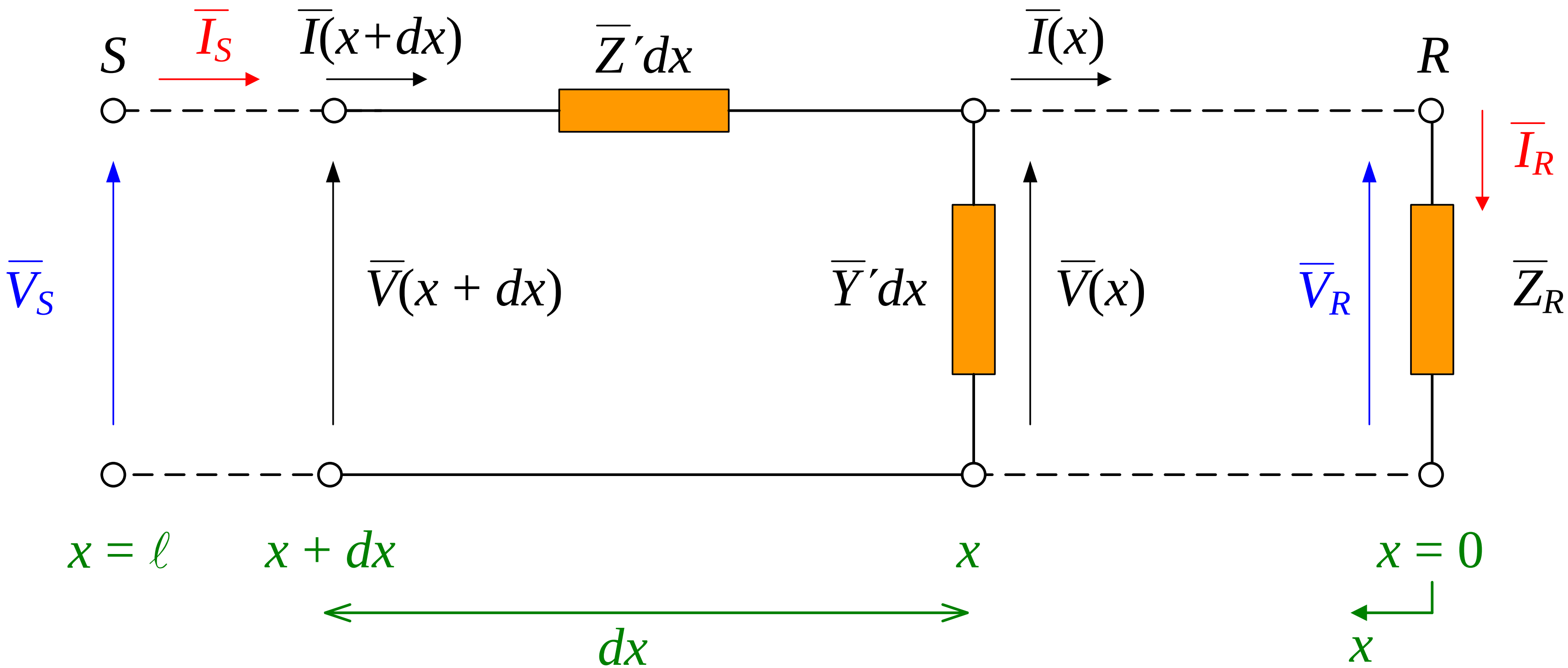
- Για να μπορέσουμε να θεωρήσουμε την παραπάνω ΓΜ **ομοιογενή γραμμή μεταφοράς**, θα πρέπει:
  - Τα διανεμημένα στοιχεία της ΓΜ, ***R΄, L΄, C΄, G΄*** ανά μονάδα μήκους να μπορούν να θεωρηθούν σταθερά.

- Επίσης, η ανάλυσή μας θα γίνει για τη **μόνιμη κατάσταση λειτουργίας**, οπότε θεωρούμε ότι:
  - Η πηγή $\boldsymbol{v_s(t)}$ έχει ημιτονοειδή τάση της μορφής $\boldsymbol{V_s \sin(\omega t)}$, με $\boldsymbol{V_s = \mathrm{ct}}$ και $\boldsymbol{\omega = \mathrm{ct}}$.

- Τέλος, θεωρούμε ένα τριφασικό ΣΗΕ, ισοζυγισμένο στις τρεις φάσεις του, οπότε η αρχική ΓΜ δύο παράλληλων αγωγών αντιστοιχεί στο **ισοδύναμο μονοφασικό κύκλωμα του ορθού συστήματος**.

Ομοιογενής Γραμμή Μεταφοράς (3/3)

- Τμήμα στοιχειώδους μήκους *dx* μακριάς ομοιογενούς ΓΜ ηλεκτρικής ενέργειας.



Διαφορική εξίσωση μακριάς ομοιογενούς ΓΜ (1/2)

- Για την κατάστρωση και επίλυση των διαφορικών εξισώσεων, που θα μας δώσουν τελικά τις **τάσεις** και τα **ρεύματα** σε κάθε σημείο της ΓΜ, θα λάβουμε υπόψη τα εξής:

- **Οριακές συνθήκες**: Στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας θεωρούμε ότι υπάρχει **δεδομένος καταναλωτής** στο άκρο παραλαβής της ισχύος ***R***, δηλαδή με γνωστά $\bar{V}_R$ και $\bar{I}_R$.

- Ορισμοί μεγεθών:

  $\bar{Z}' = R' + jL'\omega$ – **διαμήκης σύνθετη αντίσταση** ανά μονάδα μήκους.

  $\bar{Y}' = G' + jC'\omega$ – **εγκάρσια σύνθετη αγωγιμότητα** ανά μονάδα μήκους.

Διαφορική εξίσωση μακριάς ομοιογενούς ΓΜ (2/2)

- Για τις αλλαγές στην τάση $d\bar{V}$ και το ρεύμα $d\bar{I}$ μεταξύ αρχής *x* και τέλους *x+dx* στο στοιχειώδες μήκος της ΓΜ, ισχύουν τα εξής:

$$d\bar{V} = \bar{I}\left(x+dx\right)\bar{Z}'dx \cong \bar{I}\left(x\right)\bar{Z}'dx \Rightarrow \frac{d\bar{V}}{dx} = \bar{Z}'\bar{I}\left(x\right)$$

$$d\bar{I} = \bar{V}\left(x\right)\bar{Y}'dx \Rightarrow \frac{d\bar{I}}{dx} = \bar{Y}'\bar{V}\left(x\right)$$

- Παραγωγίζοντας τις σχέσεις αυτές ως προς *x*, προκύπτουν οι **διαφορικές εξισώσεις της μακριάς ομοιογενούς γραμμής μεταφοράς** στη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας:

$$\frac{d^2\bar{V}}{dx^2} = \bar{Z}'\bar{Y}'\bar{V}$$ – Διαφορική εξίσωση τάσης.

$$\frac{d^2\bar{I}}{dx^2} = \bar{Z}'\bar{Y}'\bar{I}$$ – Διαφορική εξίσωση ρεύματος.

Λύσεις δ.ε. μακριάς ομοιογενούς ΓΜ

- Η χαρακτηριστική εξίσωση των δ.ε. τάσης – ρεύματος είναι η:

$$\bar{\xi}^2 = \bar{Z}'\bar{Y}' \Rightarrow \bar{\xi} = \pm\sqrt{\bar{Z}'\bar{Y}'} = \pm\bar{\gamma}$$

όπου:

$\bar{\gamma} = \sqrt{\bar{Z}'\bar{Y}'} = \alpha + j\beta$ – **σταθερή μετάδοσης.**

α – **σταθερή απόσβεσης.**

β – **σταθερή αλλαγής φάσης.**

Λύσεις δ.ε. μακριάς ομοιογενούς ΓΜ (1/3)

- Η **γενική λύση** της δ.ε. τάσης είναι η:

$$\bar{V}(x) = \bar{A}_1 e^{\bar{\gamma} x} + \bar{A}_2 e^{-\bar{\gamma} x}$$

- Οι σταθερές $\bar{A}_1$ και $\bar{A}_2$ υπολογίζονται από τις **οριακές συνθήκες** του προβλήματος.
- Από τη σχέση:

$$\frac{d\bar{V}}{dx} = \bar{Z}'\bar{I}(x)$$

προκύπτει και η **γενική λύση** της δ.ε. ρεύματος:

$$\bar{I}(x) = \frac{\bar{A}_1 e^{\bar{\gamma} x} - \bar{A}_2 e^{-\bar{\gamma} x}}{\bar{Z}_0}$$

όπου $\bar{Z}_0 = \sqrt{\dfrac{\bar{Z}'}{\bar{Y}'}}$ η **κυματική αντίσταση** της ΓΜ.

Λύσεις δ.ε. μακριάς ομοιογενούς ΓΜ (2/3)

- Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες στις γενικές λύσεις των δ.ε.:

$$x = 0: \quad \bar{V}(0) = \bar{V}_R \quad \text{και} \quad \bar{I}(0) = \bar{I}_R$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές $\bar{A}_1$ και $\bar{A}_2$, οπότε τελικά και τις λύσεις των δ.ε. τάσεων και ρευμάτων της μακριάς ομοιογενούς ΓΜ:

$$\bar{V}(x) = \cosh(\bar{\gamma}x)\bar{V}_R + \sinh(\bar{\gamma}x)\bar{Z}_0\bar{I}_R$$

$$\bar{I}(x) = \frac{\sinh(\bar{\gamma}x)}{\bar{Z}_0}\bar{V}_R + \cosh(\bar{\gamma}x)\bar{I}_R$$

για το τυχόν σημείο *x* της γραμμής.

Λύσεις δ.ε. μακριάς ομοιογενούς ΓΜ (3/3)

- Για $x = l$, δηλαδή για το **άκρο αποστολής *S*** ισχύουν οι σχέσεις:

$$\bar{V}_S = \cosh\left(\bar{\gamma} l\right)\bar{V}_R + \sinh\left(\bar{\gamma} l\right)\bar{Z}_0\bar{I}_R$$

$$\bar{I}_S = \frac{\sinh\left(\bar{\gamma} l\right)}{\bar{Z}_0}\bar{V}_R + \cosh\left(\bar{\gamma} l\right)\bar{I}_R$$

από τις οποίες προκύπτουν για το **άκρο παραλαβής *R*** οι σχέσεις:

$$\bar{V}_R = \cosh\left(\bar{\gamma} l\right)\bar{V}_S - \sinh\left(\bar{\gamma} l\right)\bar{Z}_0\bar{I}_S$$

$$\bar{I}_R = -\frac{\sinh\left(\bar{\gamma} l\right)}{\bar{Z}_0}\bar{V}_S + \cosh\left(\bar{\gamma} l\right)\bar{I}_S$$

Φυσικές ερμηνείες των λύσεων

A) Ανάλυση της σταθερής μετάδοσης : $\bar{\gamma}$

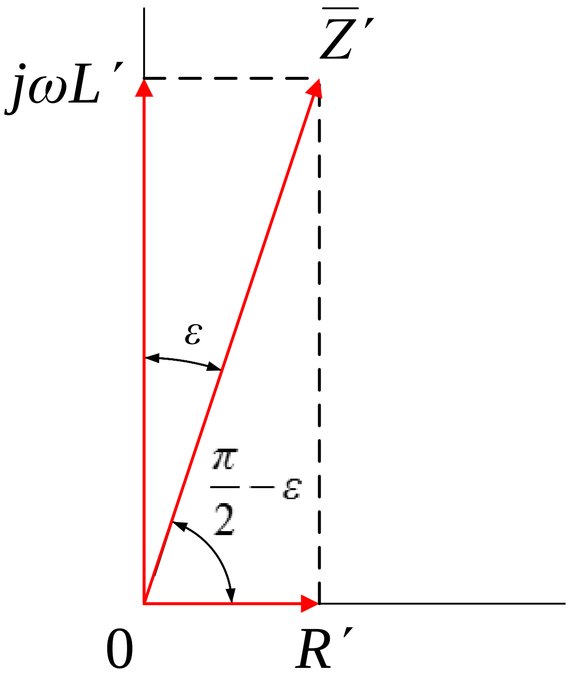
$$\bar{\gamma} = \sqrt{\bar{Z}'\bar{Y}'} = \alpha + j\beta$$

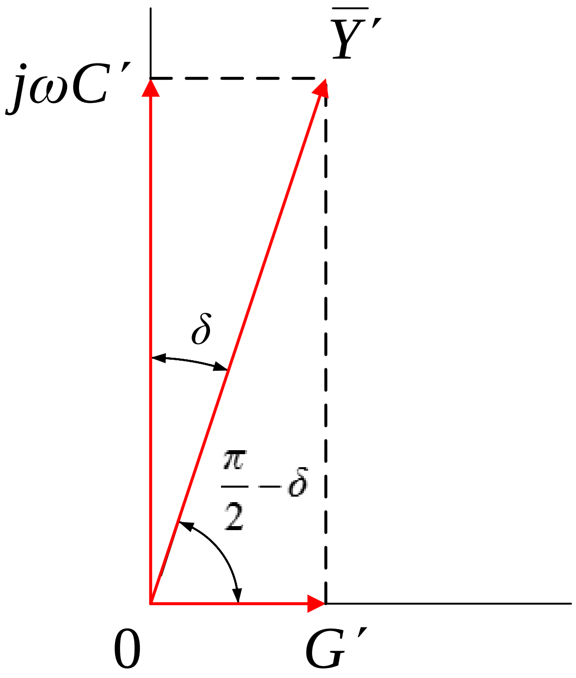
α: σταθερή απόσβεσης [neper / km].

$$\left(1\,\text{neper} = 1\,\text{Np} = 8{,}68589\,\text{dB}\right)$$

β: σταθερή αλλαγής φάσης [rad / km].

Γωνίες απωλειών ε, δ μιας μακριάς ομοιογενούς ΓΜ (1/2)





$$\varepsilon = \tan^{-1}\left(\frac{R'}{L'\omega}\right)$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{G'}{C'\omega}\right)$$

Γωνίες απωλειών ε, δ μιας μακριάς ομοιογενούς ΓΜ (2/2)

- Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε τη διαμήκη σύνθετη αντίσταση ανά μονάδα μήκους $\bar{Z}'$ με τη βοήθεια των γωνιών απωλειών ως εξής:

$$\bar{Z}' = R' + jL'\omega = Z'e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)} \Rightarrow$$

$$R' = Z'\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) \qquad L'\omega = Z'\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$$

- Αντίστοιχα μπορούμε να γράψουμε την εγκάρσια σύνθετη αγωγιμότητα ανά μονάδα μήκους $\bar{Y}'$ ως εξής:

$$\bar{Y}' = G' + jC'\omega = Y'e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)} \Rightarrow$$

$$G' = Y'\cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) \qquad C'\omega = Y'\sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)$$

Έκφραση της σταθερής διάδοσης με τη βοήθεια των γωνιών απωλειών (1/2)

- Μπορούμε να εκφράσουμε τη σταθερή διάδοσης $\bar{\gamma}$ με τη βοήθεια των γωνιών απωλειών δ και ε ως εξής:

$$\bar{\gamma} = \sqrt{\bar{Z}'\bar{Y}'} = \sqrt{\left(R' + jL'\omega\right)\left(G' + jC'\omega\right)} =$$

$$= \sqrt{R'G' - L'C'\omega^2 + j\left(L'G' + R'C'\right)\omega} = \sqrt{Z'Y'}e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon+\delta}{2}\right)} =$$

$$= \omega\sqrt{L'C'}\frac{\sin\left[\left(\varepsilon+\delta\right)/2\right] + j\cos\left[\left(\varepsilon+\delta\right)/2\right]}{\sqrt{\cos\varepsilon\cos\delta}} = \alpha + j\beta$$

Έκφραση της σταθερής διάδοσης με τη βοήθεια των γωνιών απωλειών (2/2)

- Προκύπτουν λοιπόν:

σταθερή απόσβεσης:

$$\alpha = \omega\sqrt{L'C'}\,\frac{\sin\left[\left(\varepsilon+\delta\right)/2\right]}{\sqrt{\cos\varepsilon\cos\delta}}$$

σταθερή αλλαγής φάσης:

$$\beta = \omega\sqrt{L'C'}\,\frac{\cos\left[\left(\varepsilon+\delta\right)/2\right]}{\sqrt{\cos\varepsilon\cos\delta}}$$

και

$$\frac{\alpha}{\beta} = \tan\left(\frac{\varepsilon+\delta}{2}\right)$$

Ανάλυση της κυματικής αντίστασης Z_0

- Μπορούμε να αναλύσουμε και την κυματική αντίσταση με τη βοήθεια των γωνιών απωλειών *δ, ε*, όπου θα προκύψει:

$$\bar{Z}_0 = \sqrt{\frac{\bar{Z}'}{\bar{Y}'}} = \sqrt{\frac{L'\cos\delta}{C'\cos\varepsilon}}e^{j(\delta-\varepsilon)/2} = Z_0 e^{j\zeta}$$

όπου $$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}\sqrt{\frac{\cos\delta}{\cos\varepsilon}}$$ και $$\zeta = \frac{\delta-\varepsilon}{2}$$

- Συνήθως, στις ΓΜ είναι ***δ < ε*** και ***ζ < 0***.

Φυσική ερμηνεία της κυματικής αντίστασης

$$\bar{Z}_0 = \sqrt{\frac{\bar{Z}'}{\bar{Y}'}} = \frac{\bar{V}(x)}{\bar{I}(x)}$$

- Είναι ο σταθερός λόγος $\bar{V}/\bar{I}$ σε κάθε σημείο κατά μήκος ημιάπειρης ΓΜ.

- Τυπικές τιμές που παίρνει: 250 Ω – 350 Ω σε εναέριες ΓΜ, 30 Ω – 50 Ω σε υπόγεια καλώδια.

Ειδικές περιπτώσεις ΓΜ (1/3)

- ΓΜ με μηδενικές απώλειες ($\varepsilon = \delta = 0$):

$$R' = G' = 0$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{L'C'}$$

$$\bar{Z}_0 = Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Ειδικές περιπτώσεις ΓΜ (2/3)

- ΓΜ ΥΤ (> 60 kV) με μικρές απώλειες (*ε, δ* πολύ μικρές):

Αν $$\frac{L'\omega}{R'} > 10 \Rightarrow \frac{R'}{L'\omega} < 0{,}1 \Rightarrow \tan\varepsilon = \frac{R'}{L'\omega} \cong \varepsilon$$

Και αν $$\frac{C'\omega}{G'} > 10 \Rightarrow \frac{G'}{C'\omega} < 0{,}1 \Rightarrow \tan\delta = \frac{G'}{C'\omega} \cong \delta$$

Ειδικές περιπτώσεις ΓΜ (3/3)

- ΓΜ ΥΤ (> 60 kV) με μικρές απώλειες (*ε, δ* πολύ μικρές):

Τότε

$$\alpha \cong \frac{1}{2}\left(\frac{R'}{Z_0} + G'Z_0\right)$$

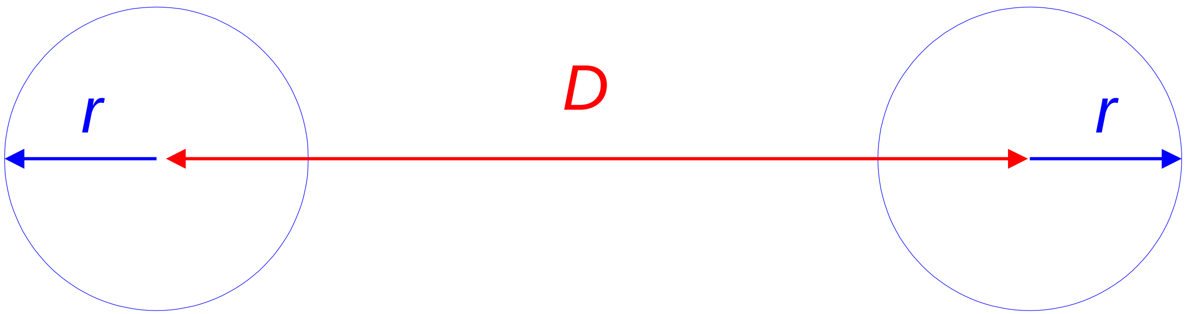
$$\beta \cong \omega\sqrt{L'C'}$$

και

$$Z_0 \cong \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Παράδειγμα (1/4)

- Έστω μια ιδεατή ΓΜ που αποτελείται από δύο παράλληλους κυλινδρικούς αγωγούς χωρίς απώλειες (R', $G' \rightarrow 0$):



Παράδειγμα (2/4)

- Η ΓΜ έχει διανεμημένα στοιχεία *L΄*, *C΄* που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} L' = \dfrac{\mu_0 \mu_r}{\pi} \ln \dfrac{D}{r} \\ C' = \dfrac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln \dfrac{D}{r}} \end{array}\right\} \Rightarrow L'C' = \mu_0 \varepsilon_0 \mu_r \varepsilon_r$$

όπου:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 3{,}33 \cdot 10^{-3} \text{ sec/m}$$

$$\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 1{,}048 \cdot 10^{-3} \text{ rad/km} = 0{,}06\ °/\text{km} \quad \text{για συχνότητα 50Hz}$$

Παράδειγμα (3/4)

- Για συχνότητα 50 Hz θα είναι λοιπόν:

σταθ. αλλαγής φάσης: $$\beta = \omega\sqrt{L'C'} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \cdot 0{,}06\ °/\mathrm{km}$$

ταχύτητα διάδοσης: $$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/sec}$$

μήκος κύματος: $$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f} = \frac{6000}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}\ \mathrm{km}$$

Παράδειγμα (4/4)

Άρα λοιπόν:

•Σε **εναέριες ΓΜ** ($\mu_r = \varepsilon_r = 1$) με μηδενικές απώλειες είναι λ = 6000 km και v = 300 m/μs.

• Σε **καλώδια** ($\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 2{,}5 \ldots 4$) με μηδενικές απώλειες είναι

λ = 3800 – 3000 km και v = 150 … 190 m/μs.

Χαρακτηριστικές τιμές τυπικών καλωδίων διανομής και εναέριων ΓΜ στην Ελλάδα (1/2)

α/α	*Περιγραφή*	U_N	Αριθμός και διατομή αγωγών ανά φάση	I_{max}
		[kV]	[mm^2]	[A/ph]
1	Καλώδιο ισχύος τριπολικό A2XSEY 3x240+25 (διατομή αγωγού γείωσης 25 mm^2)	20	1x240	410
2	Καλώδιο ισχύος τριπολικό NAEKBA 3x240 (δεν χρησιμοποιείται σε νέα δίκτυα)	20	1x240	310
3	Ενάερια ΓΜ ελαφρού τύπου μονού κυκλώματος με ένα αγωγό ανά φάση (Ε/150)	150	1x170	530
4	Ενάερια ΓΜ βαρέως τύπου μονού κυκλώματος με ένα αγωγό ανά φάση (Β/150)	150	1x322	770
5	Ενάερια ΓΜ υπερβαρέως τύπου διπλού κυκλώματος με δυο αγωγούς ανά φάση (2Β΄Β΄/400)	400	2x483	2x2020

Χαρακτηριστικές τιμές τυπικών καλωδίων διανομής και εναέριων ΓΜ στην Ελλάδα (2/2)

α/α	R'	L'	C'	α	β	β	Z_0	ζ
	[mΩ/km]	[mH/km]	[nF/km]	[Np/km]	[rad/km]	[°/100 km]	[Ω]	[°]
1	162	0,366	270	$1{,}88\cdot10^{-3}$	$3{,}65\cdot10^{-3}$	20,9	43,0	-27,30
2	150	0,344	530	$2{,}53\cdot10^{-3}$	$4{,}94\cdot10^{-3}$	28,3	29,7	-27,00
3	183	1,420	8,23	$2{,}16\cdot10^{-4}$	$1{,}095\cdot10^{-3}$	6,28	423,7	-11,15
4	97	1,344	8,72	$1{,}28\cdot10^{-4}$	$1{,}082\cdot10^{-3}$	6,20	395,1	-6,47
5	32,9	1,013	11,36	$5{,}37\cdot10^{-5}$	$1{,}067\cdot10^{-3}$	6,11	299,0	-2,88

Χωρο-χρονικές συναρτήσεις ρευμάτων και τάσεων (1/4)

- Τα μιγαδικά στρεφόμενα διανύσματα μετατρέπονται σε **χρονικές συναρτήσεις** αν τα πολλαπλασιάσουμε με τον τελεστή $e^{j\omega t}$ και θεωρήσουμε το πραγματικό μέρος του αποτελέσματος:

$$e^{j\omega t} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \mathrm{Re}\left\{\overline{V}\left(x\right)e^{j\omega t}\right\} = v(x,t) \\ \mathrm{Re}\left\{\overline{I}\left(x\right)e^{j\omega t}\right\} = i(x,t) \end{array}$$

Χωρο-χρονικές συναρτήσεις ρευμάτων και τάσεων (2/4)

- Θέτοντας:

$$\overline{A}_1 = A_1 e^{ja_1} = v_1 e^{ja_1}$$

$$\overline{A}_2 = A_2 e^{ja_2} = v_2 e^{ja_2}$$

$$\overline{Z}_0 = Z_0 e^{j\zeta}$$

προκύπτουν οι χωρο-χρονικές συναρτήσεις για την τάση και το ρεύμα:

$$v(x,t) = v_1 e^{\alpha x}\cos(a_1 + \omega t + \beta x) + v_2 e^{-\alpha x}\cos(a_2 + \omega t - \beta x)$$

$$i(x,t) = \frac{v_1}{Z_0} e^{\alpha x}\cos(a_1 - \zeta + \omega t + \beta x) - \frac{v_2}{Z_0} e^{-\alpha x}\cos(a_2 - \zeta + \omega t - \beta x)$$

Χωρο-χρονικές συναρτήσεις ρευμάτων και τάσεων (3/4)

$$v(x,t) = v_1 e^{\alpha x}\cos(a_1 + \omega t + \beta x) + v_2 \boxed{e^{-\alpha x}\cos(a_2 + \omega t - \beta x)}$$

- Διερεύνηση του όρου αυτού δείχνει ότι αν εξισώσουμε τις φάσεις για δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές $t_2 > t_1$, τότε θα είναι :

$$a_2 + \omega t_1 - \beta x_1 = a_2 + \omega t_2 - \beta x_2 = ct$$

οπότε:

$$\omega(t_2 - t_1) = \beta(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow x_2 > x_1 \ (x \uparrow)$$

Χωρο-χρονικές συναρτήσεις ρευμάτων και τάσεων (4/4)

- Η συνάρτηση $e^{-\alpha x}\cos\left(a_2+\omega t-\beta x\right)$ παριστάνει κύμα που οδεύει προς τα **αυξανόμενα** *x* με ταχύτητα:

$$c=\frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{\beta}$$

και παρουσιάζει **απόσβεση** της μέγιστης τιμής του κατά $e^{-\alpha x}$.

- Όμοια, η συνάρτηση $e^{\alpha x}\cos\left(a_1+\omega t+\beta x\right)$ παριστάνει κύμα που οδεύει προς τα **ελαττούμενα** *x* με ταχύτητα:

$$c=\frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{\beta}$$

και παρουσιάζει **απόσβεση** της μέγιστης τιμής του κατά $e^{\alpha x}$.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Λαμπρίδης Δημήτρης, Ανδρέου Γεώργιος. «ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΙΙ, Η Ομοιογενής Γραμμή Μεταφοράς». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2015 Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.auth.gr/eclass_courses.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Σβάρνα Κωνσταντίνα
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης