ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θέματα Αρμονικής Ανάλυσης

Ενότητα 2: Πραγματική Ανάλυση

Μιχ. Μ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Ανισότητες Hölder και Minkowski.
2. Χώροι L^p.
3. Προσέγγιση συναρτήσεων του L^p.
4. Δυικός του L^p.
5. Θεώρημα παρεμβολής του Riesz.
6. Ανισότητα Young.

Σκοποί ενότητας

- Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται το υλικό από την Πραγματική ανάλυση που μας είναι απαραίτητο: ουσιαστικά οι χώροι L^p, οι ασθενείς L^p και τα θεωρήματα παρεμβολής.

Οι χώροι L^p

Όπως ήδη είπαμε, οι χώροι $L^p(\mathbb{R}^n)$ ή απλά L^p, που ορίσαμε στην Εισαγωγή, είναι οι χώροι που προτιμούμε στην Αρμονική ανάλυση.

Ξεκινούμε με δύο κλασικές και πολύ χρήσιμες ανισότητες.

Η ανισότητα Hölder.

Αν $p, q \in [1, \infty]$ και ικανοποιούν

$$p + q = pq, \qquad \eta \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

τότε λέγονται **συζυγείς**. Δύο ενδιαφέροντα ζευγάρια είναι τα $p = q = 2$ και $p = 1, q = \infty$.

Θεώρημα 1 (Ανισότητα Hölder) (1)

Θεώρημα 1: Αν $p, q \in [1, \infty]$, συζυγείς και $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, τότε ισχύει η ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, (1)$$

Απόδειξη: Κοιτάζουμε πρώτα την περίπτωση $p = \infty$ και $q = 1$. Έχουμε

$$|f(x)g(x)| \leq |g(x)| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = |g(x)| \|f\|_\infty,$$

και ολοκληρώνοντας έχω το αποτέλεσμα:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|dx = \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

Θεώρημα 1 (Ανισότητα Hölder) (2)

Η απόδειξη της Hölder στην περίπτωση $p, q \in (1, \infty)$, στηρίζεται στην ακόλουθη στοιχειώδη ανισότητα: Αν $a \geq 0$ και $b \geq 0$, τότε

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, (2)$$

Για την απόδειξη της (2), θεωρούμε την

$$H(t) = \frac{a^p}{p} + \frac{t^q}{q} - at$$

και αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{H}(t) \geq 0$, για κάθε $a \geq 0$ και $t \geq 0$.
Έχουμε

$$H'(t) = t^{q-1} - a = 0, \alpha\nu\ t = a^{\frac{1}{q-1}}.$$

Άρα η H φθίνει από το 0 μέχρι το $a^{\frac{1}{q-1}}$ και αυξάνει από το $a^{\frac{1}{q-1}}$ μέχρι το ∞.

Θεώρημα 1 (Ανισότητα Hölder) (3)

Όμως $\frac{q}{q-1} = p$, και επομένως

$$H(t) \geq H\left(a^{\frac{1}{q-1}}\right) = \frac{a^p}{p} + \frac{a^{\frac{q}{q-1}}}{q} - a a^{\frac{1}{q-1}}$$

$$= \frac{a^p}{p} + \frac{a^p}{q} - a^{\frac{q-1}{q-1}} a^{\frac{1}{q-1}} = a^p \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right\} - a^p = 0.$$

Για την απόδειξη της (1) μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$0 < \|f\|_p, \|g\|_q < \infty,$$

αλλιώς είναι προφανής. Θέτοντας

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

και ολοκληρώνοντας, από την (2) έχουμε την (1).

Παρατήρηση 1

Αν $p = q = 2$, τότε η ανισότητα Hölder είναι η γνωστή μας ανισότητα των Cauchy-Schwarz.

Μία δεύτερη ανισότητα που χρειαζόμαστε (για να δείξουμε π.χ. ότι η $\| \quad \|_p$ είναι νόρμα) είναι η ανισότητα Minkowski.

Θεώρημα 2
(Ανισότητα Minkowski) (1)

Θεώρημα 2: Αν $p \in [1, \infty]$ και $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, τότε ισχύει η ανισότητα

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Απόδειξη:

Αν $p = 1$ ή $p = \infty$, τότε η Minkowski είναι προφανής συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας $|f + g| \leq |f| + |g|$.

Για $p, q \in (1, \infty)$, η Minkowski είναι συνέπεια της Hölder. Πράγματι

Θεώρημα 2
(Ανισότητα Minkowski) (2)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)+g(x)|dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|dx$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|dx = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2,$$

απο την τριγωνική ανισότητα.

Τώρα, αν p, q είναι συζυγείς, από τον Hölder έχουμε

$$I_1 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

Θεώρημα 2 (Ανισότητα Minkowski) (3)

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p$$

αφού $(p-1)q = p$. Με τον ίδιο τρόπο έχουμε για το

$$I_1 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \|g\|_p$$

Προσθέτοντας έχουμε

Θεώρημα 2
(Ανισότητα Minkowski) (4)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^p dx$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \{\|f\|_p + \|g\|_p\},$$

και διαιρώντας

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

έχουμε την Minkowski αφού $1 - \frac{1}{q} = p$.

Ορισμός και ιδιότητες των $\boldsymbol{L^p}$

- Για $p \in [1, \infty]$, ο $L^p(\mathbb{R}^n)$ είναι ο διανυσματικός χώρος των μετρήσιμων συναρτήσεων που ικανοποιούν

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- Αν $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ και από τον Minkowski έχουμε ότι

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

- Επιπλέον, αν $\|f\|_p = 0$, τότε $f = 0$ σ.π. δηλαδή $f = 0$, αφού γενικά στην θεωρία μέτρου, τα σύνολα μέτρου 0 δεν μετράνε.
- Οι $\boldsymbol{L^p}$, $p \in [1, \infty)$ είναι λοιπόν χώροι με νόρμα.

Ιδιότητες $\boldsymbol{L^2}, \boldsymbol{L^\infty}$

- Ο $\boldsymbol{L^2}$ είναι η εξαίρεση, αφού η νόρμα του προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx\,.$$

- Για τον L^∞, ο ορισμός είναι λίγο διαφορετικός. Μία μετρήσιμη f ανήκει στον L^∞ αν είναι φραγμένη στον $\mathbb{R}^n$ εκτός ίσως από ένα σύνολο μέτρου 0.

Θέτουμε

$$\|f\|_\infty = inf\{\lambda \in \mathbb{R}\colon\ \mu\varepsilon\tau\rho o\{|f(x)| > \lambda\} = 0\}$$

Θυμίζω ότι ένας χώρος με νόρμα είναι Banach αν είναι πλήρης, δηλαδή αν κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.

Θεώρημα 3 (1)

Θεώρημα 3: Για $p \geq 1$, ο L^p είναι Banach.

Απόδειξη: θα δώσω την απόδειξη για την περίπτωση $1 \leq p < \infty$. Είναι μία καλή ευκαιρία να θυμηθούμε αρκετές χρήσιμες έννοιες.

Ας είναι f_m μια ακολουθία Cauchy στον L^p: για κάθε $\varepsilon > 0$, $\exists \mathrm{M}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\|f_m - f_l\|_p \leq \varepsilon, \forall m, l \geq \mathrm{M}(\varepsilon).$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η f_m συγκλίνει σε κάποια $f \in L^p$.

Αν εντοπίσουμε μια υπακολουθία της που συγκλίνει, τότε έχουμε πολλές ελπίδες να δείξουμε και την σύγκλιση της ίδιας της f_m αφού, από την ιδιότητα του Cauchy, οι όροι της είναι κοντά μεταξύ τους.

Διαλέγω τώρα μια υπακολουθία $f_{m_k}, k = 1,2, \dots$ της f_m

Θεώρημα 3 (2)

τέτοια ώστε

$$\left\|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\right\|_p \leq \frac{1}{2^k}, \forall k = 1,2, \ldots$$

Παρατηρώ ότι

$$\begin{aligned} f_{m_{K+1}} - f_{m_1} &= \left(f_{m_2} - f_{m_1}\right) + \left(f_{m_3} - f_{m_2}\right) + \cdots + \left(f_{m_{K+1}} - f_{m_K}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{K} \left(f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\right). \end{aligned}$$

Από την επιλογή της υπακολουθίας έχω

$$\left\|f_{m_{K+1}} - f_{m_1}\right\|_p \leq \sum_{k=1}^{K} \left\|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\right\|_p \leq \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k}$$

Θεώρημα 3 (3)

Θέτω λοιπόν

$$g_K(x) = \sum_{k=1}^{K} \left| f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x) \right|.$$

Η $g_K, K = 1,2, \dots$, είναι μια αύξουσα ακολουθία θετικών συναρτήσεων και συνεπώς έχει ένα όριο g (πεπερασμένο ή άπειρο):

$$g(x) = \lim_{K\to\infty} g_K(x) = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \left| f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x) \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left| f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x) \right|$$

Θεώρημα 3 (4)

Έχουμε

$$\|g\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\| f_{m_{k+1}} - f_{m_k} \right\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Από εδώ, η θεωρία μέτρου, μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι η $g(x) < \infty$ σ.π., δηλαδή η σειρά

$\sum_{k=1}^{\infty} \left| f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x) \right|$ συγκλίνει σ.π.

Άρα το ίδιο και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x) \right\}.$$

Άρα η συνάρτηση

Θεώρημα 3 (5)

$$f_{m_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\{f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)\}$$

ορίζεται καλά σ.π.

Αφού η ως άνω σειρά συγκλίνει σ.π., τα μερικά της αθροίσματα

$$f_{m_1}(x) + \sum_{k=1}^{\mathrm{K}}\{f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)\} = f_{m_1}(x) + f_{m_{\mathrm{K}+1}}(x) - f_{m_1}(x)$$
$$= f_{m_{\mathrm{K}+1}}(x)$$

συγκλίνουν σ.π. Άρα η υπακολουθία $f_{m_{\mathrm{K}+1}}(x)$ συγκλίνει σ.π.

Θέτουμε

$$f(x) = \lim_{K\to\infty} f_{m_{\mathrm{K}+1}}(x) = f_{m_1} + \sum_{k=1}^{\infty}\{f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)\}.$$

Θεώρημα 3 (6)

Έχουμε $f \in L^p$, αφού $f_{m_1} \in L^p$ και όπως είδαμε πιο πάνω

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \left| f_{m_{k+1}} - f_{m_k} \right| \in L^p.$$

Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι η ακολουθία f_m συγκλίνει στην f με την έννοια του L^p, δηλαδή

$$\|f_m - f\|_p \to 0, \text{ καθώς } m \to \infty.$$

Έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} \left| f_m(x) - f_{m_k}(x) \right|^p = |f_m(x) - f(x)|^p,$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_m(x) - f(x)|^p \, dx = \|f_m - f\|_p^p < \infty.$$

Θεώρημα 3 (7)

Άρα από το Λήμμα του Fatou, μπορούμε να αλλάξουμε όριο και ολοκλήρωση:

$$\|f_m - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f_m(x) - f(x)|^p \, dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} \left|f_m(x) - f_{m_k}(x)\right|^p dx = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} \left|f_m(x) - f_{m_k}(x)\right|^p dx$$

$$= \lim_k \left\|f_m - f_{m_k}\right\|_p^p \leq \varepsilon,$$

απο Cauchy αν το m είναι μεγάλο.

Προσέγγιση των συναρτήσεων του L^p

Ένα από τα ατού της θεωρίας ολοκλήρωσης του Lebesgue είναι η προσέγγιση των μετρήσιμων συναρτήσεων με απλές συναρτήσεις

$$s(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j X_{A_j}(x)\,,$$

όπου $a_j \in \mathbb{C}$ και A_j μετρήσιμα σύνολα.

Από το θεώρημα του Lusin, μία f απλή και με συμπαγή φορέα, προσεγγίζεται από μια συνεχή με συμπαγή φορέα. Συνεπώς

Πρόταση 1: Οι συνεχείς με συμπαγή φορέα είναι παντού πυκνές στους L^p για $1 \leq p < \infty$.

Ο χώρος $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Ένας άλλος χώρος συναρτήσεων, που όμως θα δείξουμε, είναι παντού πυκνός στους L^p για $1 \leq p < \infty$, είναι ο

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, f\ \ \varepsilon\iota\nu\alpha\iota\ C^\infty\ \kappa\alpha\iota\ 0\ \varepsilon\xi\omega\ \alpha\pi\omicron\ \varepsilon\nu\alpha\ \sigma\upsilon\mu\pi\alpha\gamma\varepsilon\varsigma\}$.

Ο χώρος αυτός είναι πιο χρήσιμος στην Ανάλυση από ότι οι απλές ή οι συνεχείς συναρτήσεις λόγω της ομαλότητας των στοιχείων του.

Ένας κλασικός κάτοικος του $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι η

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}}, & \alpha\nu\ \|x\|^2 \leq 1 \\ 0, & \alpha\nu\ \|x\|^2 > 1 \end{cases}$$

Πράγματι,

$$\varphi(x) = f(\|x\|^2 - 1),$$

Πρόταση 2

όπου

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}}, & \alpha\nu\ t \leq 0, \\ 0, & \alpha\nu\ t > 0. \end{cases}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η f είναι C^∞ αφού όλες οι παράγωγοί της τείνουν στο 0 καθώς το $t \to 0$.

Διαιρώντας την φ με το $\int \varphi$, έχουμε μια συνάρτηση ψ η οποία είναι C^∞, θετική, έχει φορέα την μπάλλα Β(0,1) και $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1$.

Με την βοήθεια των ως άνω συναρτήσεων, σιδερώνουμε οποιαδήποτε συνάρτηση με συμπαγή φορέα, την κάνουμε C_0^∞ χωρίς να την μεγαλώνουμε πολύ:

Πρόταση 2: Αν $1 \leq p < \infty$, ο $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι παντού πυκνός στον $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Ο χώρος του Schwartz

Τέλος ο χώρος του Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$, είναι και αυτός παντού πυκνός στους L^p για $1 \leq p < \infty$. Θυμίζουμε ότι μια $f \in S(\mathbb{R}^n)$ αν είναι C^∞ και αν οι μερικές της παράγωγοι κάθε τάξης, τείνουν στο 0 καθώς το x τείνει στο ∞, πιο γρήγορα από κάθε πολυώνυμο. Δηλαδή, για κάθε $m_1, \dots, m_n, N$ και $R > 0$, υπάρχει θετική σταθερά $c = c(m_1, \dots, m_n, N, R)$ τέτοια ώστε

$$\left|\frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} f(x)\right| \leq \frac{c}{(1 + \|x\|^2)^N}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ο χώρος του Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ είναι ο πιο κατάλληλος χώρος για τον μετασχηματισμό Fourier.

1. Ο δυικός του $\boldsymbol{L^p}, \mathbf{1} \leq \boldsymbol{p} < \infty$

Θυμίζω ότι ο δυικός ενός τοπολογικού χώρου Χ είναι ο διανυσματικός χώρος των συνεχών και γραμμικών συναρτησοειδών του. Ο δυικός χώρος Χ' του Χ, παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην μελέτη των τελεστών

$$T: X \rightarrow X$$

αφού ο συμμετρικός T^* του Τ είναι τελεστής του δυικού

$$T^*: X' \rightarrow X'.$$

Ποιος λοιπόν είναι ο δυικός χώρος του L^p; Όπως είδαμε τα

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) dx \, , g \in L^p,$$

ανήκουν στον δυικό του L^p. Μήπως όμως είναι όλα;

2. Ο δυικός του $L^p, 1 \leq p < \infty$

Δηλαδή, αν Φ είναι συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές επί του L^p, υπάρχει $g \in L^q$ τέτοιο ώστε

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx\,.$$

Η απάντηση είναι καταφατική.

Θεώρημα 4: Ο δυικός του $L^p, 1 \leq p < \infty$, είναι ο L^q, όπου q ο συζυγής του p.

Παρατήρηση 2: θα κάνουμε μία ειδική μνεία στην περίπτωση $p = 2$ για την οποία έχουμε

$$(L^2)' = L^2,$$

Θυμίζω ότι για κάθε χώρο Hilbert H, ισχύει $H' = H$.

Πρέπει να προσέχουμε το ακόλουθο λεπτό σημείο.

3. Ο δυικός του $L^p, 1 \leq p < \infty$

Ενώ έχουμε

$$(L^1)' = L^\infty,$$

δεν ισχύει ότι ο δυικός του L^∞ είναι ο L^1 αλλά

$$L^1 \subset (L^\infty)'.$$

Με άλλα λόγια ο L^1 δεν μας δίδει όλα τα συνεχή και γραμμικά συναρτησοειδή του L^∞.

Παρατήρηση 3: Αν $T\colon L^p \to L^p$ είναι συνεχής τελεστής και $1 < p < \infty$, τότε $\forall f \in L^p$

$$\|Tf\|_p = \inf_{g \in L^q, \|g\|=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} Tf(x) g(x) dx \right|.$$

Το θεώρημα παρεμβολής του Riesz (ειδική μορφή-1)

Ένα από τα βασικά εργαλεία της Αρμονικής Ανάλυσης είναι τα θεωρήματα παρεμβολής (interpolation). Το θεώρημα του Riesz στην πιο απλή του μορφή, μας επιτρέπει να συμπεράνουμε την συνέχεια ενός τελεστή επί του L^p για όλα τα $p \in (p_0, p_1)$, μόνον από την συνέχεια του στον L^{p_0} και στον L^{p_1}.

Δίνω το θεώρημα στην πιο απλή του μορφή.

Θεώρημα 5: (**Παρεμβολής του Μ. Riesz**) Αν $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ και ο τελεστής T *είναι συνεχής επί των* L^{p_0} και L^{p_1}, τότε ο T *είναι και συνεχής επί του* L^p για κάθε ενδιάμεσο εκθέτη $p \in (p_0, p_1)$.

Το θεώρημα παρεμβολής του Riesz (ειδική μορφή-2)

Ας δώσουμε το γενικό σχήμα εφαρμογής του θεωρήματος.
Ας είναι π.χ. T ένας ολοκληρωτικός τελεστής

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy.$$

Ας πούμε επίσης ότι καταφέραμε να δείξουμε ότι ο T είναι συνεχής επί του L^2 και του L^1.
Τότε από το θεώρημα του Riesz συμπεραίνουμε ότι ο

$$T: L^p \to L^p$$

για κάθε ενδιάμεσο εκθέτη $p \in (1,2)$.

Το θεώρημα παρεμβολής του Riesz (γενική μορφή-1)

Θα δώσουμε το θεώρημα Riesz στην γενική μορφή.

Θεώρημα 6: (Παρεμβολής του M. Riesz) $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ και ο τελεστής T *είναι συνεχής από τον* L^{p_0} στον L^{q_0}, και από τον L^{p_1} στον L^{q_1}, τότε ο T *είναι και συνεχής από τον* L^{p_t} στον L^{q_t} όπου

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \text{και} \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}, t \in (0,1).$$

Παρατηρώ ότι τα ως άνω p_t είναι όλα τα p του διαστήματος (p_0, p_1). Το ίδιο και για τα q_t.

Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή είναι η ανισότητα του Young.

Η απόδειξη της είναι μια υπέροχη εφαρμογή των όσων είπαμε στην ενότητα αυτή.

Θεώρημα 7 (Η ανισότητα του Young)

Θεώρημα 7: Ας είναι ο τελεστής

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy\,,$$

και ας υποθέσουμε ότι

$$\sup_x \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} \text{ και } \sup_y \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} \leq C, (2)$$

όπου $r \geq 1$. Αν τα $1 \leq p \leq q \leq \infty$, ικανοποιούν

$$\frac{1}{r} = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right),$$

τότε $\exists c > 0$ τ.ω.

$$\|Tf\|_q \leq c \|f\|_p,$$

δηλαδή ο τελεστής T είναι συνεχής από τον L^p στον L^q.

1. Απόδειξη θεωρήματος (Young)

Απόδειξη: Ας δούμε πως μπορούμε να εκμεταλευτούμε την πρώτη συνθήκη της (2). Αν $f \in C_0^\infty$, τότε με Hölder έχουμε

$$\|Tf\|_\infty = \sup_x \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy \right| \leq \sup_x \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y) f(y)| dy$$

$$\leq \sup_x \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{r'} dy \right)^{\frac{1}{r'}} \leq C \|f\|_{r'}.$$

όπου r' είναι ο συζυγής του r. Δηλαδή ο T είναι συνεχής από τον $L^{r'}$ στον L^∞.

Τώρα για να εκμεταλευτώ την δεύτερη συνθήκη της (2), πρέπει να θεωρήσω τον τελεστή

2. Απόδειξη θεωρήματος (Young)

$$T_1 g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy$$

με την ολοκλήρωση να γίνεται τώρα ως προς την πρώτη μεταβλητή του πυρήνα.

Χρησιμοποιώντας την δεύτερη συνθήκη της (2), όπως ακριβώς κάναμε για τον T, δείχνουμε ότι

$$\|T_1 g\|_\infty \leq C \|g\|_{r'},$$

δηλαδή

$$T_1 \colon L^{r'} \to L^\infty,$$

συνεχής.

Όμως ο T_1 είναι άμεσα συνδεδεμένος με τον T και στην

3. Απόδειξη θεωρήματος (Young)

πραγματικότητα είναι ο συζυγής του.

Πράγματι, για $f \in L^{r'}$ και $g \in L^1$, το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf(y)g(y)dy$$

είναι απολύτως συγκλίνον αφού $Tf \in L^1$. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε τον συζυγή T^* του T ως εξής: αν $f \in L^{r'}$ και $g \in L^1$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)T^*g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} Tf(y)g(y)dy\,.$$

Τώρα,

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf(y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{K}(y,x)f(x)dx\right)g(y)dy =$$

4. Απόδειξη θεωρήματος (Young)

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{K}(y,x) g(y) dy \right) f(x) dx \, , (3)$$

και συνεπώς ο πυρήνας του T^* είναι ο $K(y,x)$:

$$T^* g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{K}(y,x) g(y) dy = T_1 g(x).$$

Βέβαια όλα αυτά με την προυπόθεση ότι ο Fubini ισχύει στην (3). Πράγματι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{K}(y,x) g(y) f(x)| dy dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy \int_{\mathbb{R}^n} |K(y,x) f(x)| dx$$

5. Απόδειξη θεωρήματος (Young)

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(y,x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{r'} dx \right)^{\frac{1}{r'}} dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \sup_x \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(y,x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{r'} |g(y)| dy$$

$$\leq C \|f\|_{r'} \|g\|_1 < \infty,$$

απο την δεύτερη ανισότητα της (2).

Άρα, όπως είπαμε

$$T^*: L^{r'} \to L^{\infty},$$

συνεχής ή ισοδύναμα, από την δυικότητα των L^p,

6. Απόδειξη θεωρήματος (Young)

$$T^*: (L^r)' \to (L^1)',$$

συνεχής. Συνεπώς

$$T: L^1 \to L^r,$$

συνεχής.

Αν τώρα εφαρμόσω το γενικό θεώρημα του Riesz, με $p_0 = r'$, $p_1 = 1$, $q_0 = \infty$ και $q_1 = r$, έχω ότι ο T είναι συνεχής από τον L^p στον L^q για

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{r'} + \frac{t}{1} \ και\ \frac{1}{q} = \frac{1-t}{\infty} + \frac{t}{r}.$$

Επομένως

$$1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 - \frac{1-t}{r'} - t + \frac{t}{r} = 1 - \frac{1}{r'} + \frac{t}{r'} - t + \frac{t}{r}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης.

Πόρισμα (1)
(Η ανισότητα Young στις συνελίξεις)

Ένα ενδιαφέρον πόρισμα της ανισότητας Young είναι η εξειδίκευση της στις συνελίξεις.

Πόρισμα (Η ανισότητα Young στις συνελίξεις): Αν $f \in L^p$ και $g \in L^q$, τότε η συνέλιξη $f * g \in L^r$ όπου $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$

Απόδειξη: Έχουμε

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy\,.$$

Άρα μπορούμε να πούμε ότι

$$f * g = T(g),$$

όπου T είναι ο ολοκληρωτικός τελεστής

Πόρισμα (2)
(Η ανισότητα Young στις συνελίξεις)

$$\mathrm{T}(g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy$$

με πυρήνα τον

$$K(x,y) = f(x-y).$$

Έχουμε να δείξουμε ότι ο Τ είναι συνεχής από τον L^q στον L^r, δηλαδή

$$\|T(g)\|_r = \|f * g\|_r < c\|g\|_q.$$

Όμως η $f \in L^p$ και συνεπώς

$$\sup_x \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(y,x)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_x \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p < \infty$$

Πόρισμα (3)
(Η ανισότητα Young στις συνελίξεις)

Άρα οι συνθήκες (2) ικανοποιούνται και από το θεώρημα έχουμε ότι ο T είναι συνεχής από τον L^q στον L^r αν

$$\frac{1}{p} = 1 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right),$$

δηλαδή αν

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r}.$$

Βιβλιογραφία

- A. Carbery, *Harmonic Analysis of the Calderón-Zygmund School*, 1970-1993, Bull. London Math. Soc., 30, (1998), 11-23.
- W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1970.
- E. M. Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1993.
- E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,* Princeton University Press, 1970.
- E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971.

Σημείωμα Αναφοράς

«Θέματα Αρμονικής Ανάλυσης. Πραγματική Ανάλυση». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS354/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης