ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θέματα Αρμονικής Ανάλυσης

Ενότητα 3: Αρμονικές Συναρτήσεις

Μιχ. Μ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Ιδιότητα του μέσου όρου.
2. Αρχή μεγίστου.
3. Θεώρημα Liouville.

Σκοποί ενότητας

- Σε αυτήν την παράγραφο θα εισάγουμε και θα μελετήσουμε αρμονικές στον $\mathbb{R}^n$ χωρίς να κάνουμε χρήση της μιγαδικής δομής που άλλωστε δεν υπάρχει για περιττά n.

Αρμονικές συναρτήσεις (1)

Μια συνάρτηση u, ορισμένη σε ένα τόπο Ω (ανοικτό και συνεκτικό) του $\mathbb{R}^n$ είναι αρμονική αν είναι C^2 και αν ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace:

$$\Delta u(x) = \partial_{x_1}^2 u(x) + \partial_{x_2}^2 u(x) + \cdots + \partial_{x_n}^2 u(x) = 0, \forall x \in \Omega$$

Παραδείγματος χάριν, η

$$u_n(x) = \frac{1}{\|x\|^{n-2}}, x \in \mathbb{R}_*^n, n \geq 3,$$

και η

$$u_2(x) = log\|x\|, x \in \mathbb{R}_*^2$$

είναι αρμονικές.

Αρμονικές συναρτήσεις (2)

Η u_n είναι μια σημαντική συνάρτηση. Πράγματι, όπως θα δούμε παρακάτω, αν η f ανήκει π.χ. στον $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, τότε η συνέλιξη

$$(u_n * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u_n(x-y) f(y) dy\,,$$

είναι λύση της εξίσωσης του Poisson:

$$\Delta(u_n * f) = c_n f.$$

Αν $n \geq 2$, τότε η

$$Q_y(x) = \frac{y}{(y^2 + \|x\|^2)^{(n+1)/2}},$$

είναι αρμονική στον άνω ημιχώρο

$$\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y > 0\},$$

Αρμονικές συναρτήσεις (3)

και η συνέλιξη

$$\left(Q_y * f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{yf(x')}{(y^2 + \|x - x'\|^2)^{(n+1)/2}} dx', f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

δίνει όλες τις αρμονικές του ημιχώρου.

Για να αποδείξουμε την ιδιότητα του μέσου όρου για τις αρμονικές, χρειαζόμαστε τις σφαιρικές (ή πολικές) συντεταγμένες του $\mathbb{R}^n$.

Σφαιρικές (ή πολικές) συντεταγμένες του $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ (1)

Κάθε στοιχείο $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, γράφεται στις πολικές ως εξής: Αν

$$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

και $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \theta_{n-1} \in (0{,}2\pi)$,

τότε

$$\begin{gathered}
x_1 = r\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2 \dots \sigma\upsilon\nu\theta_{n-2}\sigma\upsilon\nu\theta_{n-1}, \\
x_2 = r\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2 \dots \sigma\upsilon\nu\theta_{n-2}\eta\mu\theta_{n-1}, \\
x_3 = r\sigma\upsilon\nu\theta_1\sigma\upsilon\nu\theta_2 \dots \eta\mu\theta_{n-2} \\
\vdots \\
x_{n-1} = r\sigma\upsilon\nu\theta_1\eta\mu\theta_2, \\
x_n = r\eta\mu\theta_1
\end{gathered}$$

Σφαιρικές (ή πολικές) συντεταγμένες του $\mathbb{R}^n$ (2)

Γράφουμε

$$x = (x_1, \dots, x_n) = (r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = (r, \theta) = r\theta$$

Το μέτρο του Lebesgue στις πολικές γράφεται ως εξής:

$$dx = r^{n-1} \sigma\upsilon\nu^{n-2}\theta_1 \sigma\upsilon\nu\theta_2^{n-1} \sigma\upsilon\nu\theta_{n-1} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$$
$$= r^{n-1} dr d\sigma(\theta)$$

Προφανώς, το

$$d\sigma(\theta) = \sigma\upsilon\nu^{n-2}\theta_1 \sigma\upsilon\nu\theta_2^{n-1} \sigma\upsilon\nu\theta_{n-1} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$$

είναι το επιφανειακό μέτρο της μοναδιαίας σφαίρας $S_{n-1}(0,1)$.

Έχουμε λοιπόν την ολοκλήρωση σε πολικές:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty r^{n-1} dr \int_{\theta_1, \dots, \theta_{n-1}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \theta_{\,n-1} \in (0, 2\pi)} f(r, \theta) d\sigma(\theta)$$

Σφαιρικές (ή πολικές) συντεταγμένες του $\mathbb{R}^n$ (3)

$$= \int_0^\infty r^{n-1} dr \int_{S_{n-1}(0,1)} f(r,\theta) d\sigma(\theta) \,.$$

Τέλος, το επιφανειακό μέτρο της σφαίρας $S_{n-1}(0,r)$ είναι ίσο με

$$r^{n-1} d\sigma(\theta).$$

Η ιδιότητα του μέσου όρου (1)

Ας είναι u αρμονική ορισμένη σε ένα τόπο Ω του $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ και $\mathrm{r} > 0$ τέτοιο ώστε $\mathrm{B}(x_0, r) \subset \Omega$. Τότε ο μέσος όρος $\mathrm{M}_{u,r}(x_0)$ της u πάνω στην σφαίρα $S_{n-1}(x_0, r)$ δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\mathrm{M}_{u,r}(x_0) = \frac{1}{|S_{n-1}(x_0, r)|} \int_{S_{n-1}(x_0,r)} u \,.$$

Παίρνοντας υπόψιν ότι το επιφανειακό μέτρο της $S_{n-1}(0, r)$ είναι το $r^{n-1} d\sigma(\theta)$, έχουμε

$$\mathrm{M}_{u,r}(x_0) = \frac{1}{|S_{n-1}(x_0, r)|} \int_{S_{n-1}(x_0,r)} u =$$

$$= \frac{1}{|S_{n-1}(x_0, r)|} \int_{S_{n-1}(0,1)} u(x_0 + (r, \theta))\, r^{n-1} d\sigma(\theta) =$$

Η ιδιότητα του μέσου όρου (2)

$$= \frac{1}{|S_{n-1}(0,1)|r^{n-1}} \int_{S_{n-1}(0,1)} u(x_0 + (r, \theta))\, r^{n-1} d\sigma(\theta) =$$

$$= \frac{1}{|S_{n-1}(0,1)|} \int_{S_{n-1}(0,1)} u(x_0 + (r, \theta))\, d\sigma(\theta).$$

Θεώρημα 1 (μέσος όρος) (1)

Θεώρημα 1: Αν u είναι αρμονική στον τόπο Ω και η μπάλλα $\mathrm{B}(x_0, r) \subset \Omega$, τότε

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_{n-1}(x_0, r)|} \int_{S_{n-1}(x_0,r)} u \, .$$

Απόδειξη: Ας είναι $\Omega = \mathrm{B}(x_0, r) \backslash \mathrm{B}(x_0, \varepsilon)$. Θυμίζω τον τύπο του Green:

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma \, ,$$

όπου $\vec{n}$ είναι η εξωτερική κάθετος του συνόρου

$$\partial\Omega = \mathrm{S}(x_0, r) \cup S(x_0, \varepsilon)$$

Θεώρημα 1 (μέσος όρος) (2)

και $d\sigma$ είναι επιφανειακό μέτρο του $\partial\Omega$. Όπως ήδη είπαμε, επί της $S(x_0, r)$

$$d\sigma = r^{n-1} d\sigma(\theta)$$

και αντίστοιχα για την $S(x_0, \varepsilon)$. Τέλος, η μοναδιαία κάθετος είναι η

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Αν πάρω $v = 1$ και u αρμονική, ο τύπος του Green δίνει

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0. \qquad (\mathbf{1})$$

Αν $n \geq 2$, διαλέγω

$$v = u_n = \|x\|^{2-n}, x \in \mathbb{R}^n_*,$$

Θεώρημα 1 (μέσος όρος) (3)

και έχω

$$\int_{\Omega} (u\Delta u_n - u_n \Delta u) dx = 0 = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial u_n}{\partial n} - u_n \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma\,,$$

αφού οι u και u_n είναι αρμονικές. Όμως $\partial\Omega = \mathrm{S}(x_0, r) \cup S(x_0, \varepsilon)$ και έτσι

$$\int_{S_{n-1}(x_0,r)} \left(u \frac{\partial u_n}{\partial n} - u_n \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \int_{S_{n-1}(x_0,\varepsilon)} \left(u \frac{\partial u_n}{\partial n} - u_n \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = 0, (\mathbf{2})$$

Αλλά, η u_n είναι σταθερή επί της σφαίρας $S_{n-1}(x_0, r)$ και είναι ίση με r^{-n+2}.

Επίσης, η εξωτερική κάθετος είναι το διάνυσμα θέσεως r και συνεπώς

Θεώρημα 1 (μέσος όρος) (4)

$$\frac{\partial u_n}{\partial n} = \partial_r r^{-n+2} = (-n+2) r^{-n+1}.$$

Έχουμε λοιπόν από τις (1) και (2) ότι

$$(-n+2) r^{-n+1} \int_{S_{n-1}(x_0,r)} u d\sigma - r^{-n+2} \int_{S_{n-1}(x_0,r)} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

$$= (-n+2) \varepsilon^{-n+1} \int_{S_{n-1}(x_0,\varepsilon)} u d\sigma - \varepsilon^{-n+2} \int_{S_{n-1}(x_0,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \,,$$

δηλαδή

$$r^{-n+1} \int_{S_{n-1}(x_0,r)} u d\sigma = \varepsilon^{-n+1} \int_{S_{n-1}(x_0,r)} u d\sigma \,.$$

Θεώρημα 1 (μέσος όρος) (5)

Συνεπώς, ο μέσος όρος $\mathrm{M}_{u,r}(x_0)$ της u πάνω στην σφαίρα $S_{n-1}(x_0,r)$ ικανοποιεί:

$$\mathrm{M}_{u,r}(x_0) = \frac{1}{|S_{n-1}(x_0,r)|}\int_{S_{n-1}(x_0,r)} u$$

$$= \frac{1}{|S_{n-1}(0,1)|r^{n-1}}\int_{S_{n-1}(x_0,r)} u = \frac{1}{|S_{n-1}(0,1)|\varepsilon^{n-1}}\int_{S_{n-1}(x_0,\varepsilon)} u$$

$$= \frac{1}{|S_{n-1}(x_0,\varepsilon)|}\int_{S_{n-1}(x_0,\varepsilon)} u \sim \frac{u(x_0)}{|S_{n-1}(x_0,\varepsilon)|}\int_{S_{n-1}(x_0,\varepsilon)} u \ \overrightarrow{\varepsilon \to 0}\ u(x_0)$$

αφού η u είναι συνεχής.

Η αρχή του μεγίστου (1)

Σαν συνέπεια της ιδιότητας του μέσου όρου έχουμε την αρχή του μεγίστου.

Θεώρημα 2 (Αρχή του μεγίστου): Έστω u αρμονική στον τόπο Ω. Αν η u έχει ένα τοπικό ακρότατο μέσα στον Ω, τότε η u είναι σταθερή.

Απόδειξη: Ας πούμε ότι το $x_0 \in \Omega$ είναι τοπικό μέγιστο. Επειδή το Ω είναι ανοικτό και η u είναι συνεχής, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(x_0, \varepsilon) \subset \Omega$ και

$$u(x) < u(x_0), \text{ για κάθε } x \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}, (\mathbf{3})$$

Από τον μέσο όρο και την (3) έχω

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_{n-1}(x_0, \varepsilon)|} \int_{S_{n-1}(x_0,\varepsilon)} u(x_0 + (\varepsilon, \theta))\varepsilon^{n-1} d\sigma(\theta) <$$

Η αρχή του μεγίστου (2)

$$< \frac{1}{|S_{n-1}(x_0,\varepsilon)|}\int_{S_{n-1}(x_0,\varepsilon)} u(x_0)\varepsilon^{n-1}d\sigma(\theta) =$$

$$= \frac{u(x_0)}{|S_{n-1}(x_0,\varepsilon)|}\int_{S_{n-1}(x_0,\varepsilon)} \varepsilon^{n-1}d\sigma(\theta) = u(x_0),$$

άτοπο, εκτός και αν

$$u(x) = u(x_0), \text{ για κάθε } x \in B(x_0,\varepsilon).$$

Τώρα, για να τελειώσω την απόδειξη, χρειάζεται να δείξω ότι

$$u(y) = u(x_0), \forall y \in \Omega.$$

Αφού ο τόπος Ω είναι συνεκτικός, μπορώ να βρώ μία συνεχή καμπύλη γ που ενώνει το x_0 με το y. Το θεώρημα των Heine-Borel μου επιτρέπει να την καλύψω με πεπερασμένο πλήθος

Χρήσιμες μορφές της αρχής του μεγίστου (1)

μπαλλών $B\left(x_j, \varepsilon\right), j = 0,1, \dots, N$. Είδαμε πως $u(x) = u(x_0)$ για κάθε $x \in B(x_0, \varepsilon)$ και το ίδιο ισχύει για τις $B(x_1, \varepsilon)$ και προχωρώ.

Άλλες, εξίσου χρήσιμες μορφές της αρχής του μεγίστου, είναι οι ακόλουθες:

Πόρισμα 1 (Αρχή του μεγίστου) Έστω u αρμονική στον τόπο Ω, C^2 στο $\overline{\Omega}$ και

$$\sup_{\partial\Omega} u < \infty.$$

Τότε

$$u(x) < \sup_{\partial\Omega} u \,, \forall x \in \Omega$$

εκτός εάν η u είναι σταθερή.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα (2), η u δεν μπορεί να έχει τοπικά

Χρήσιμες μορφές της αρχής του μεγίστου (2)

ακρότατα στο εσωτερικό του Ω. Άρα

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u \,.$$

Πόρισμα 2 (Αρχή του μεγίστου) Έστω u_1 και u_2 αρμονικές στον τόπο Ω, C^2 στον $\overline{\Omega}$ και $u_1 = u_2$ επί του συνόρου $\partial\Omega$. Τότε $u_1 = u_2$ επί του Ω.

Απόδειξη: εφαρμόζω το προηγούμενο Πόρισμα (1) στην αρμονική $u_1 - u_2$ και συμπεραίνω ότι

$$\sup_{\overline{\Omega}}(u_1 - u_2) = \sup_{\partial\Omega}(u_1 - u_2) = 0,$$

άρα

$$u_1 - u_2 \leq 0, \textit{επι του } \Omega.$$

Κάνω το ίδιο για την $u_2 - u_1$ και έχω ότι $u_2 - u_1 \leq 0$ επί του Ω και συνεπώς $u_1 = u_2$ επί του Ω.

Θεώρημα 3 (Liouville) (1)

Μια άλλη συνέπεια του μέσου όρου είναι το θεώρημα του Liouville.

Θεώρημα 3 (Liouville**)**: Αν u είναι αρμονική σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^n$ και επιπλέον φραγμένη, τότε είναι σταθερή.

Παρατήρηση: Μία ισοδύναμη έκφραση του Liouville είναι η ακόλουθη: Δεν υπάρχουν αρμονικές και φραγμένες σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^n$.

Προσοχή! Ο Liouville δεν ισχύει π.χ. στον άνω ημιχώρο $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Πράγματι, αν $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, τότε όπως θα δούμε παρακάτω, η συνέλιξη της με τον πυρήνα του Poisson

$$\left(Q_y * f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c_n y f(x')}{\left(y^2 + \|x - x'\|^2\right)^{(n+1)/2}}\, dx' \,,$$

Θεώρημα 3 (Liouville) (2)

είναι αρμονική και φραγμένη αφού

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{c_n y f(x')}{(y^2 + \|x - x'\|^2)^{(n+1)/2}} dx' = 1,$$

(δες παρακάτω!) και συνεπώς

$$\left|\left(Q_y * f\right)(x)\right| \leq sup|f| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c_n y}{(y^2 + \|x - x'\|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx' = \|f\|_\infty$$

$$< \infty,$$

δηλαδή η $Q_y * f$ είναι και αρμονική και φραγμένη.

Για την απόδειξη του Liouville χρειαζόμαστε την έκφραση του μέσου όρου πάνω σε μπάλλες αντί για σφαίρες.

Πρόταση 1
(Μέσος όρος στις μπάλλες) (1)

Πρόταση 1: Αν u είναι αρμονική στον τόπο Ω και η μπάλλα $B(x_0, r) \subset \Omega$, τότε

$$u(x_0) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} u(y)dy\,.$$

Απόδειξη: Ισχύει

$$\frac{n}{r^n}\int_0^r \rho^{n-1} d\rho = 1,$$

και από τον μέσο όρο έχω

$$u(x) = M_{u,\rho}(x) = M_{u,\rho}(x)\frac{n}{r^n}\int_0^r \rho^{n-1} d\rho = \frac{n}{r^n}\int_0^r M_{u,\rho}(x)\rho^{n-1} d\rho$$

Πρόταση 1
(Μέσος όρος στις μπάλλες) (2)

$$= \frac{n}{r^n} \int_0^r \left(\frac{1}{|S_{n-1}(x,1)|} \int_{S_{n-1}(x,1)} u(x+\rho\theta) d\sigma(\theta) \right) \rho^{n-1} d\rho =$$

$$= \frac{n}{r^n |S_{n-1}(x,1)|} \int_0^r \left(\int_{S_{n-1}(x,1)} u(x+\rho\theta) d\sigma(\theta) \right) \rho^{n-1} d\rho =$$

$$= \frac{1}{r^n |B(x,1)|} \int_{B(x,r)} u(y) dy = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y) dy \,. \,(\mathbf{4})$$

Απόδειξη [**του Liouville**] Από την (4), που μόλις αποδείξαμε, έχουμε

$$u(x_0) - u(y_0)$$
$$= \frac{1}{r^n |B(x_0,1)|} \int_{B(x_0,r)} u(x) dx - \frac{1}{r^n |B(y_0,1)|} \int_{B(y_0,r)} u(x) dx$$

Πρόταση 1
(Μέσος όρος στις μπάλλες) (3)

$$= \frac{1}{r^n|B(x_0,1)|}\left\{\int_{B(x_0,r)} u(x)dx - \int_{B(y_0,r)} u(x)dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{r^n|B(x_0,1)|}\left\{\int_{B(x_0,r)\setminus B(y_0,r)} u(x)dx + \int_{B(y_0,r)\setminus B(x_0,r)} u(x)dx\right\},$$

(κάντε το σχήμα).

Αφού η u είναι φραγμένη

$$|u(x_0) - u(y_0)|$$
$$\leq \frac{\|u\|_\infty}{r^n|B(x_0,1)|}\left|\int_{B(x_0,r)\setminus B(y_0,r)} dx + \int_{B(y_0,r)\setminus B(x_0,r)} dx\right|.$$

Όμως το μέτρο της συμμετρικής διαφοράς

Πρόταση 1 (Μέσος όρος στις μπάλλες) (4)

$$\left(B(x_0,r)\backslash B(y_0,r)\right)\cup\left(B(y_0,r)\backslash B(x_0,r)\right)$$

διαιρεμένο με το r^n τείνει στο 0 καθώς το $r \to \infty$, και έτσι έχουμε ότι $u(x_0) = u(y_0)$, (κάντε ένα σχήμα για να βεβαιωθείτε).

Χαρακτηρισμός των αρμονικών από τον μέσο όρο (1)

Η ιδιότητα του μέσου όρου χαρακτηρίζει τις αρμονικές.
Πιο συγκεκριμένα
Θεώρημα 4: Αν η u είναι συνεχής στον τόπο Ω και ικανοποιεί την ιδιότητα του μέσου όρου, τότε η u είναι αρμονική και C^{∞}.
Πόρισμα 3: Το ομοιόμορφο όριο μιας ακολουθίας αρμονικών είναι αρμονική.
Απόδειξη: Αν η ακολουθία $\Omega \xrightarrow{u_n} \mathbb{R}$ τείνει ομοιόμορφα στην u, τότε η u είναι συνεχής αφού η u_n είναι αρμονική και συνεπώς C^{∞}.
Επιπλέον

$$\left|M_{r,x_0}(u_k) - M_{r,x_0}(u)\right|$$

$$\leq \frac{1}{|S_{n-1}(0,1)|} \int_{S_{n-1}(x_0,1)} |u_k(x_0 + (r,\theta)) - u(x_0 + (r,\theta))| d\sigma(\theta) \leq$$

Χαρακτηρισμός των αρμονικών από τον μέσο όρο (2)

$$\leq \frac{\|u_k - u\|_\infty}{|S_{n-1}(0,1)|} \int_{S_{n-1}(x_0,1)} \sigma(\theta) \leq \|u_k - u\|_\infty \leq \varepsilon,$$

δηλαδή,

$$\lim_{k\to\infty} M_{r,x_0}(u_k) = M_{r,x_0}(u).$$

Άρα

$$u(x_0) = \lim_{k\to\infty} u_k(x_0) = \lim_{k\to\infty} M_{r,x_0}(u_k) = M_{r,x_0}(u),$$

δηλαδή η u ικανοποιεί τον μέσο όρο και συνεπώς είναι αρμονική.

Βιβλιογραφία

- A. Carbery, *Harmonic Analysis of the Calderón-Zygmund School*, 1970-1993, Bull. London Math. Soc., 30, (1998), 11-23.
- W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1970.
- E. M. Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1993.
- E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,* Princeton University Press, 1970.
- E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971.

Σημείωμα Αναφοράς

«Θέματα Αρμονικής Ανάλυσης. Αρμονικές Συναρτήσεις». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS354/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης