ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θέματα Αρμονικής Ανάλυσης

Ενότητα 4: Μετασχηματισμός Fourier

Μιχ. Μ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Ο Fourier στον S.
2. Ισομετρία του Plancherel.

Σκοποί ενότητας

- Εισάγεται και μελετάται ο μετασχηματισμός Fourier στον χώρο του Schwartz και αποδεικνύεται το θεώρημα του Plancherel.

Ο μετασχηματισμός Fourier (1)

Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ορίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier $\hat{f}$ της f από το ολοκλήρωμα

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} f(x)dx\,, \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

Για ευκολία, συμβολίζουμε συχνά το εσωτερικό γινόμενο με $x\xi$, αντί του ορθού (x, ξ).

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία της Ανάλυσης επί των Ευκλείδειων χώρων. Η επιτυχία του οφείλεται σε δύο λόγους:

1. Αντιστρέφεται εύκολα στον L^2 και ο αντίστροφός του είναι του ιδίου τύπου. Θα δούμε παρακάτω ότι αν $f \in L^2$, τότε $\hat{f} \in L^2$ και

Ο μετασχηματισμός Fourier (2)

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x,\xi)} \hat{f}(\xi) d\xi \, , x \in \mathbb{R}^n. \qquad (2)$$

2. Μετασχηματίζει μια διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική, οπότε οι πιθανότητες να την λύσουμε είναι σαφώς περισσότερες.

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του $\hat{f}$.

Θεώρημα 1: Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε

i. Η $\hat{f}$ είναι φραγμένη και

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

ii. Η $\hat{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θεώρημα (Riemann-Lebesgue) (1)

Θεώρημα 2 (Riemann-Lebesgue) Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε $\hat{f}(\xi) \to 0$ καθώς $\|\xi\| \to \infty$.

Απόδειξη: Αν δείξουμε ότι το θεώρημα ισχύει για την χαρακτηριστική ενός κύβου, τότε ισχύει και για τις $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ από την πυκνότητα των απλών συναρτήσεων στον $L^1(\mathbb{R}^n)$ και από το γεγονός ότι υπάρχει «πλακόστρωση» του $\mathbb{R}^n$ με κύβους.

Έτσι κάθε μετρήσιμο σύνολο του $\mathbb{R}^n$, προσεγγίζεται όσο καλά θέλουμε με κύβους που είναι ξένοι μεταξύ τους.

Ας είναι λοιπόν

$$K = [y_1 - a, y_1 + a] \ldots \times [y_n - a, y_n + a],$$

ο κύβος με κέντρο το $y = (y_1, \ldots, y_n)$ και πλευρά $2a$. Έχουμε

Θεώρημα (Riemann-Lebesgue) (2)

$$\hat{x}_K(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} \mathrm{x}_{\mathrm{K}}(x)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi \sum_{j\leq n} x_j \xi_j} x_{[y_1-a,y_1+a]}(x_1) \dots x_{[y_n-a,y_n+a]}(x_n)dx_1 \dots dx_n$$

$$= \prod_{j\leq n} \hat{x}_{[y_j-a,y_j+a]}\left(\xi_j\right),$$

και

$$\hat{x}_{[y-a,y+a]}(\xi) = \int_{y-a}^{y+a} e^{-2\pi i(x,\xi)}dx = \frac{e^{-2\pi i(y+a)} - e^{-2\pi i(y-a)}}{2\pi i\xi} \to 0$$

καθώς $\xi \to \infty$.

Ο Fourier στον S (1)

Όπως ήδη είπαμε, ο χώρος του Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ είναι ο χώρος των συναρτήσεων test, που ταιριάζει καλύτερα στον μετασχηματισμό Fourier. Το πλεονέκτημα του $S(\mathbb{R}^n)$ είναι ότι παραμένει αμετάβλητος από τον Fourier.

Πρόταση 1: Αν $f \in S(\mathbb{R}^n)$, τότε και η $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι αν $f \in S(\mathbb{R}^n)$, τότε

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)}\left(-2\pi i x_j\right) f(x)dx\,, \qquad (3)$$

δηλαδή η $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier $-2\pi i x_j f$.

Επίσης, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, βλέπουμε ότι

Ο Fourier στον S (2)

$$\widehat{\partial_j f}(\,\xi) = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi).$$

Πράγματι

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x,\xi)} \partial_j f(x) dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j (e^{-2\pi i (x,\xi)}) f(x) dx$$

$$= 2\pi i \xi_j \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x,\xi)} f(x) dx = 2\pi \mathrm{i} \xi_j \hat{f}(\xi). \quad (4)$$

Αν λοιπόν $f \in S(\mathbb{R}^n)$, τότε από τις (3) και (4), έχουμε

$$\xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}}{\partial \xi_1^{m_1} \dots \partial \xi_n^{m_n}} \hat{f}(\xi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x,\xi)} (-2\pi i x_1)^{m_1} \dots (-2\pi i x_1)^{m_n} \partial_1^{a_1} \dots \partial_n^{a_n} f(x) dx$$

Ο Fourier στον S (3)

και συνεπώς

$$\left|\xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n}}{\partial \xi_1^{m_1} \dots \partial \xi_n^{m_n}} \hat{f}(\xi)\right| \leq$$

$$\leq c \int_{\mathbb{R}^n} \left|(x_1)^{m_1} \dots (x_1)^{m_n} \partial_1^{a_1} \dots \partial_n^{a_n} f(x)\right| dx$$

$$\leq c \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|)^{m_1+m_2+\cdots+m_n} \left|\partial_1^{a_1} \dots \partial_n^{a_n} f(x)\right| dx$$

$$\leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + \|x\|)^{m_1+m_2+\cdots+m_n}}{(1 + \|x\|^2)^N} dx < \infty,$$

αφού μπορώ να πάρω το N όσο μεγάλο θέλω. Άρα $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$.

Παρατήρηση 1

Είναι χρήσιμο να συγκρατήσουμε ότι ο Fourier μετασχηματίζει τον πολλαπλασιασμό της f με το μονώνυμο $\left(-2\pi i x_j\right)^a$ στην αντίστοιχη μερική παράγωγο $\frac{\partial^a \hat{f}}{\partial \xi_a^j}$.

Αντίστοιχα για τις μερικές παραγώγους: Μετασχηματίζει την $\frac{\partial^a \hat{f}}{\partial x_a^j}$ στην $\left(2\pi i \xi_j\right)^\alpha \hat{f}(\xi)$.

Σαν συνέπεια, έχουμε τον Fourier να μετασχηματίζει μία διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική.

Θεώρημα 3

Θεώρημα 3: Ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας ισομορφισμός του $S(\mathbb{R}^n)$ και ο αντίστροφός του δίνεται από τον τύπο (2), δηλαδή, αν $f \in S(\mathbb{R}^n)$ τότε

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x,\xi)} \hat{f}(\xi) d\xi \,, x \in \mathbb{R}^n.$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος, χρειαζόμαστε τα παρακάτω λήμματα.

Λήμμα 1 (1)

Λήμμα 1: Αν οι $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g\,. \qquad (5)$$

Απόδειξη: Η (5) είναι απλή εφαρμογή του Fubini.

Πρέπει λοιπόν να διαπιστώσουμε πρώτα αν ο Fubini πράγματι ισχύει. Έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\hat{g}(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\xi} g(\xi) d\xi \right| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(\xi)| d\xi \right) dx \leq$$

Λήμμα 1 (2)

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \|g\|_1 dx = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty,$$

και συνεπώς ο Fubini ισχύει.

Έτσι

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\xi} g(\xi)d\xi\right)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)d\xi \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi\,.$$

Λήμμα 2 (1)

Λήμμα 2 (Κανονική κατανομή): Για κάθε $s > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi s\|x\|^2} e^{-2\pi i x\xi} dx = s^{-\frac{\pi}{2}} e^{-\pi\|\xi\|^2/s}. \qquad (6)$$

Απόδειξη: Το αριστερό ολοκλήρωμα στην (6) είναι χωρισμένων μεταβλητών, άρα αρκεί να υπολογίσω το αντίστοιχο μονοδιάστατο

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi s x^2} e^{-2\pi i x\xi} dx = e^{-\pi\xi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\left(x\sqrt{s}+i\xi\right)^2} dx =$$

$$= \frac{e^{-\pi\xi^2}}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(y+i\xi)^2} dy$$

$$= \frac{e^{-\pi\xi^2}}{\sqrt{s}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} dy = \frac{e^{-\pi\xi^2}}{\sqrt{s}},$$

Λήμμα 2 (2)

αφού

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} dy = 1.$$

Σημειώνουμε ότι στο τρίτο πέρασμα χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα του Cauchy για να μεταφέρω το ολοκλήρωμα από την ευθεία $Imz = \xi$ στην $Imz = 0$.

Πυρήνας του Gauss ή της θερμότητας

Για $t > 0$ και $x \in \mathbb{R}^n$, θέτουμε

$$P_t(x) = \frac{e^{-\|x\|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}}.$$

Ο $P_t(x)$ είναι γνωστός και ως πυρήνας του Gauss ή της θερμότητας αφού όπως θα δούμε παρακάτω είναι η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης της θερμότητας.

Λήμμα 3 (1)

Λήμμα 3: Για κάθε $f \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$(P_t * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} f(y) dy \xrightarrow{t \to 0} f(x). \quad (7)$$

Απόδειξη: Από το Λήμμα 2 με $s = \frac{1}{4\pi t}$ και $\xi = 0$, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_t(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\|y\|^2/4t}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} dy = 1.$$

Γράφουμε λοιπόν

Λήμμα 3 (2)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}dy - f(x) =$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \{f(y) - f(x)\} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} dy =$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} \left\{\int_{B(x,1)} + \int_{B(x,1)^c} \right\} = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} \{I_1 + I_2\}.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, περνώντας στις πολικές έχω:

$$|I_2| \leq \int_{B(x,1)^c} |f(y) - f(x)| e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} dy \leq$$

Λήμμα 3 (3)

$$\leq 2\|f\|_\infty \int_{B(x,1)^c} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} dy$$

$$\leq 2c\|f\|_\infty \int_1^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n-1} dr\,.$$

Από την στοιχειώδη ανισότητα

$$e^{-x} \leq \frac{c(m)}{x^m}, \forall x \geq 0, \forall m > 0,$$

συνεπάγεται ότι για $m > n$

$$\left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} |I_2| \leq c \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} \|f\|_\infty \int_1^\infty \left(\frac{2t}{r^2}\right)^m r^{n-1} dr$$

$$= c\|f\|_\infty (2t)^{m-\frac{n}{2}} \xrightarrow{t\to 0} 0. \qquad (8)$$

Λήμμα 3 (4)

Τώρα, για το I_1

$$|I_1| \le \int_{B(x,1)} |f(y) - f(x)| e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} dy$$

$$= \left\{ \int_{B(x,\varepsilon)} + \int_{B(x,1)-B(x,\varepsilon)} \right\} = J_1 + J_2,$$

και

$$\left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} J_1 \le c \sup_{y\in B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| \int_{B(x,\varepsilon)} t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} dy$$

$$\le c \sup_{y\in B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| \int_{\mathbb{R}^n} t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} dy$$

$$\le c \sup_{y\in B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| \le \varepsilon', \qquad (9)$$

Λήμμα 3 (5)

αφού όπως είδαμε

$$\left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} dy = 1.$$

Τέλος

$$\left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} J_2 \leq c t^{-\frac{n}{2}} \|f\|_\infty \int_{B(x,1)\setminus B(x,\varepsilon)} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}} dy$$

$$\leq c t^{-\frac{n}{2}} \|f\|_\infty |B(x,1)| e^{-\frac{\varepsilon^2}{4t}} \xrightarrow{t\to 0} 0. \qquad (10)$$

αφού

$$t^{-\frac{n}{2}} e^{-\varepsilon^2/4t} \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

Παρατήρηση 2

Στην ορολογία των διαφορικών εξισώσεων, αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)f(y)dy \xrightarrow{t\to 0} f(x),$$

τότε λέμε πως ο πυρήνας

$$\mathrm{P}_t(y) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|y\|^2}{4\pi t}} \xrightarrow{t\to 0} \delta_0(y),$$

όπου δ_0 είναι το μέτρο Dirac στο 0.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3 (1)

Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $f \in S$,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x,\xi)} \hat{f}(\xi) d\xi \,,$$

ή ακόμα ότι

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x,\xi)} \hat{f}(\xi) \lim_{t \to 0} e^{-t\|x\|^2} \, d\xi \,,$$

απο την κυριαρχούμενη σύγκλιση.

Θυμίζω επίσης ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y) e^{-2\pi i y \xi} dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(w) e^{-2\pi i (w+x)\xi} dw =$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3 (2)

$$= e^{-2\pi i x\xi} \int_{\mathbb{R}^n} f(w) e^{-2\pi i w\xi} dw =$$

$$= e^{-2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi), \qquad (11)$$

δηλαδή αν $F(y) = f(x+y)$, τότε

$$\hat{F}(\xi) = e^{-2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi).$$

Θέτω

$$\mathrm{G}_t(\xi) = e^{-t\|\xi\|^2}$$

και από το Λήμμα 2 έχω ότι

$$\hat{G}_t(y) = \frac{e^{-\|y\|^2/4\pi t}}{(4\pi t)^{n/2}}.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3 (3)

Από την (5) και την (11) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x,\xi)}\hat{f}(\xi)e^{-t\|x\|^2}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{F}(\xi)\mathrm{G}_t(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} F(y)\hat{G}_t(y)dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\frac{e^{-\|y\|^2/4\pi t}}{(4\pi t)^{n/2}}dy\,.$$

Έτσι από το Λήμμα 3 συνάγεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x,\xi)}\hat{f}(\xi)e^{-t\|\xi\|^2}d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\|y\|^2/4\pi t}dy \xrightarrow{t\to 0} f(x).$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3 (4)

Μια πράξη που ταιριάζει με τον Fourier είναι η συνέλιξη.

Αν $f, g \in S$, τότε το γινόμενο της συνέλιξης $f * g$ ορίζεται από το απολύτος συγκλίνον ολοκλήρωμα

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(x) dy$$

Η συνέλιξη είναι μία πολύ σημαντική πράξη για την Ανάλυση σε Ευκλείδειους χώρους. Όπως ήδη αναφέραμε, η λύση των κλασικών διαφορικών εξισώσεων (Laplace στον άνω ημιχώρο, εξίσωση της θερμότητας), δίδεται από την συνέλιξη των συνοριακών τιμών με τον αντίστοιχο πυρήνα (Poisson ή Gauss).

Πρόταση 2 (1)

Τα επόμενα αποτελέσματα είναι βασικά.

Πρόταση 2: Αν $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi \,, \qquad \mathbf{(12)}$$

και

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi), \qquad \mathbf{(13)}$$

δηλαδή ο Fourier μετατρέπει το γινόμενο συνέλιξης στο κανονικό γινόμενο.

Πρόταση 2 (2)

Απόδειξη: Έχουμε

$$\overline{\hat{g}(\xi)} = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} g(x)dx} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x,\xi)} \overline{g(x)}dx = \hat{\bar{g}}(-\xi).$$

Από το Λήμμα 1 και την αντίστροφη του Fourier στον $S(\mathbb{R}^n)$ συνάγεται, ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\hat{\bar{g}}(-\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\hat{f}}(\xi)\overline{g(-\xi)}d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(-\xi)\overline{g(-\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx$$

Η (13) αποδεικνύεται με Fubini.

Η ισομετρία του Plancherel

Αν $f \in L^2$, τότε η $\hat{f}$ δεν μπορεί να οριστεί αυτόματα από το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} f(x)dx,$$

αφού δεν είναι απολύτως συγκλίνον. Έτσι ορίζουμε την $\hat{f}$ από την ακόλουθη ταυτότητα: Για κάθε $g \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\hat{f}, g\right)_{L^2} = (f, \hat{g})_{L^2}.$$

Θεώρημα 4 (Plancherel) (1)

Θεώρημα 4 (**Plancherel**) Αν $f \in L^2$, τότε $\hat{f} \in L^2$ και

$$\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2. \qquad (14)$$

Απόδειξη: Ας είναι f_j μια ακολουθία του S που προσεγγίζει την f με την νόρμα του L^2:

$$\|f - f_j\|_2 \leq \varepsilon, \forall j \geq N.$$

Από την (12) έχουμε

$$\|f_j - f_k\|_2^2 = \int (f_j - f_k)\overline{(f_j - f_k)} = \int (\widehat{f_j - f_k})\overline{(\widehat{f_j - f_k})}$$

$$= \int (\hat{f}_j - \hat{f}_k)\overline{(\hat{f}_j - \hat{f}_k)} = \|\hat{f}_j - \hat{f}_k\|_2^2. \quad (15)$$

Θεώρημα 4 (Plancherel) (2)

Άρα η $\hat{f}_j$ είναι Cauchy αφού η f_j είναι Cauchy ως συγκλίνουσα. Συνεπώς, από την πληρότητα του L^2

$$\hat{f}_j \xrightarrow{j\to\infty} u \in L^2.$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι $u = \hat{f}$. Όμως $u = \lim_{j\to\infty} \hat{f}_j$ και από την τριγωνική και την (15) έχουμε:

$$\left\|u - \hat{f}\right\|_2 \le \left\|u - \hat{f}_j\right\|_2 + \left\|\hat{f}_j - \hat{f}\right\|_2 = \left\|u - \hat{f}_j\right\|_2 + \left\|f_j - f\right\|_2 \le 2\varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon > 0$.

Παρατήρηση 3 (1)

Από τον Plancherel έχουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι μία ισομετρία του L^2 και συνεπώς είναι αντιστρέψιμος στον L^2.

Αν $f \in S$, ο αντιστρέψιμος μετασχηματισμός Fourier $\check{f}$ της f, ορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x,\xi)} f(\xi) d\xi \, , x \in \mathbb{R}^n.$$

Έχουμε δει στην Θεώρημα 3, ότι αν $f \in S$, τότε

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} \hat{f}(\xi) d\xi \, , x \in \mathbb{R}^n,$$

δηλαδή

$$\left(\hat{f}\right)^{\vee} = f.$$

Παρατήρηση 3 (2)

Για $f \in L^2$ ορίζουμε τον αντίστροφο Fourier, όπως και πριν, από τον τύπο:

$$\left(\check{f}, g\right)_{L^2} = (f, \check{g})_{L^2}, \forall g \in S$$

και έχουμε πάλι ότι

$$\left(\hat{f}\right)^{\vee} = f, \forall f \in L^2.$$

Πρόταση3
(Η ταυτότητα του Parserval)

Πρόταση 3 (Η ταυτότητα του Parserval) Αν $f, g \in L^2$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi.$$

Απόδειξη: Όπως στο Λήμμα 1 εύκολα βλέπουμε ότι η ταυτότητα ισχύει για $f, g \in S$ και λόγω πυκνότητας, την έχουμε για τον L^2.

Βιβλιογραφία

- A. Carbery, *Harmonic Analysis of the Calderón-Zygmund School*, 1970-1993, Bull. London Math. Soc., 30, (1998), 11-23.
- W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1970.
- E. M. Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1993.
- E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,* Princeton University Press, 1970.
- E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971.

Σημείωμα Αναφοράς

«Θέματα Αρμονικής Ανάλυσης. Μετασχηματισμός Fourier». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS354/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης