



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

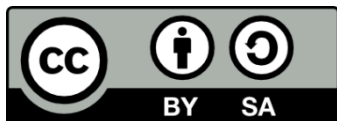
ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



Εισαγωγή στο Πεδίο Βαρύτητας

Ενότητα 4: Διαταρακτικά Μεγέθη στο Πεδίο Βαρύτητας

Η.Ν. Τζιαβός - Γ.Σ. Βέργος
Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



ΑΠΘ/ΤΑΤΜ

**Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας
4^ο Εξάμηνο**

Εισαγωγή στο πεδίο βαρύτητας

Introduction to gravity field

Ακαδημαϊκή Χρονιά:

2014 – 2015

Πρόγραμμα:

Τετάρτη 9:00 – 13:00

Διδάσκοντες:

Η.Ν. Τζιαβός, Γ.Σ. Βέργος

<http://web.auth.gr/e-topo/>

<http://olimpia.topo.auth.gr/courses/>

Ιστοσελίδες ΔΕΠ

Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας

Η. Τζιαβός ή Γ. Βέργος

Μαθήματα - εργασίες

Διαταρακτικά Μεγέθη στο Πεδίο Βαρύτητας

ΔΙΑΤΑΡΑΚΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

- Σχέση δυναμικού – γεωμετρίας περιγράφεται μέσω των προβλημάτων συνοριακών τιμών
- Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος καταλήγει σε μη γραμμικές σχέσεις
- Η λύση τους απαιτεί κατάλληλη γραμμικοποίηση
- Η γραμμικοποίηση επιτυγχάνεται με τη σύγκριση των μεγεθών του πραγματικού πεδίου βαρύτητας της γης και των αντίστοιχων μεγεθών τα κανονικού πεδίου βαρύτητας - διαταρακτικά μεγέθη
- Τα διαταρακτικά μεγέθη αντιστοιχούν σε διαφορές που προέρχονται μόνο από το ελκτικό δυναμικό του πραγματικού και του κανονικού πεδίου, καθώς το φυγοκεντρικό δυναμικό είναι γνωστό με πολύ μεγάλη ακρίβεια

ΤΟ ΔΙΑΤΑΡΑΚΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

$$T \llcorner \rceil = W \llcorner \rceil - U \llcorner \rceil$$

$$\Delta T = 0$$

εξίσωση Laplace έξω από τις μάζες,
το διαταρακτικό δυναμικό T αρμονική συνάρτηση

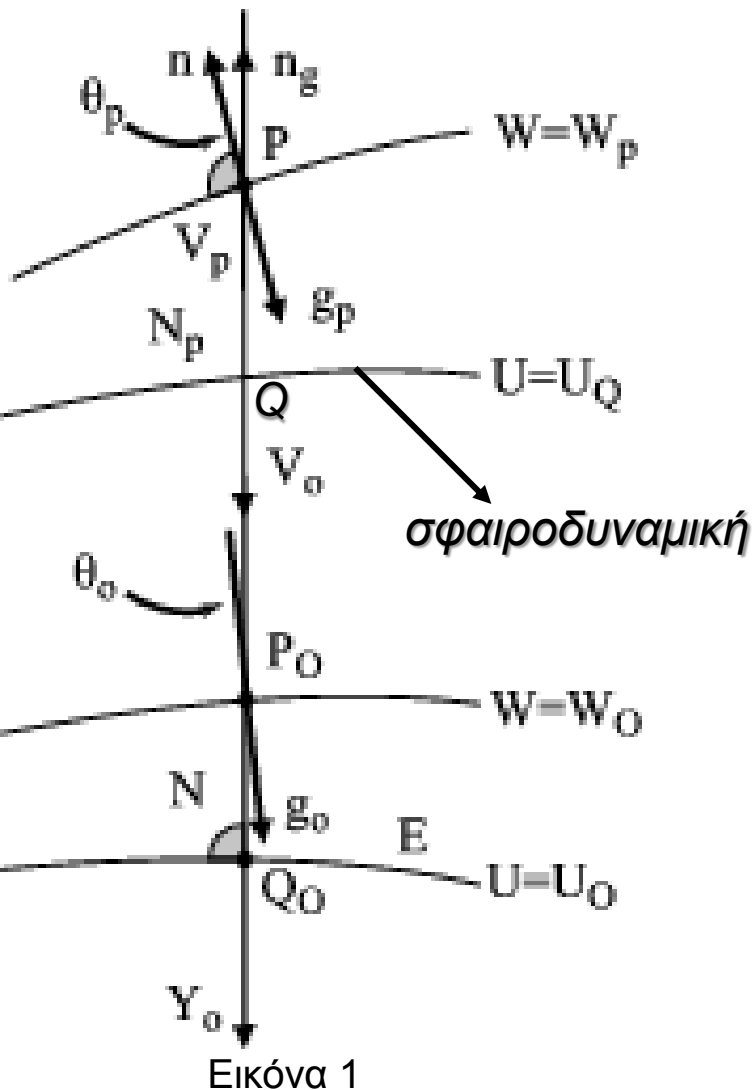
- ✓ κέντρο μάζας Γης \equiv κέντρο μοντέλου κανονικού πεδίου βαρύτητας
- ✓ μάζα Γης \equiv μάζα μοντέλου

ανάπτυγμα T σε σειρά σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων

$$T \llcorner \rceil = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \left(\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right) \bar{P}_{nm} \llcorner \cos \theta \rceil$$

$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{array} \right\}$ διαφορές μεταξύ των πλήρως κανονικοποιημένων συντελεστών του αναπτύγματος σφαιρικών αρμονικών του πραγματικού και του κανονικού πεδίου βαρύτητας

Η ΑΝΩΜΑΛΙΑ ΚΑΙ Η ΔΙΑΤΑΡΑΧΗ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ



$$\delta g = g_P - \gamma_P$$

διαταραχή βαρύτητας

προσδιορίζεται όταν η θέση του σημείου P γνωστή
(τεχνητοί δορυφόροι)

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q$$

ανωμαλία βαρύτητας

$$(U_0 - U_Q = W_0 - W_P)$$

ΤΟ ΥΨΟΜΕΤΡΟ ΤΟΥ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ

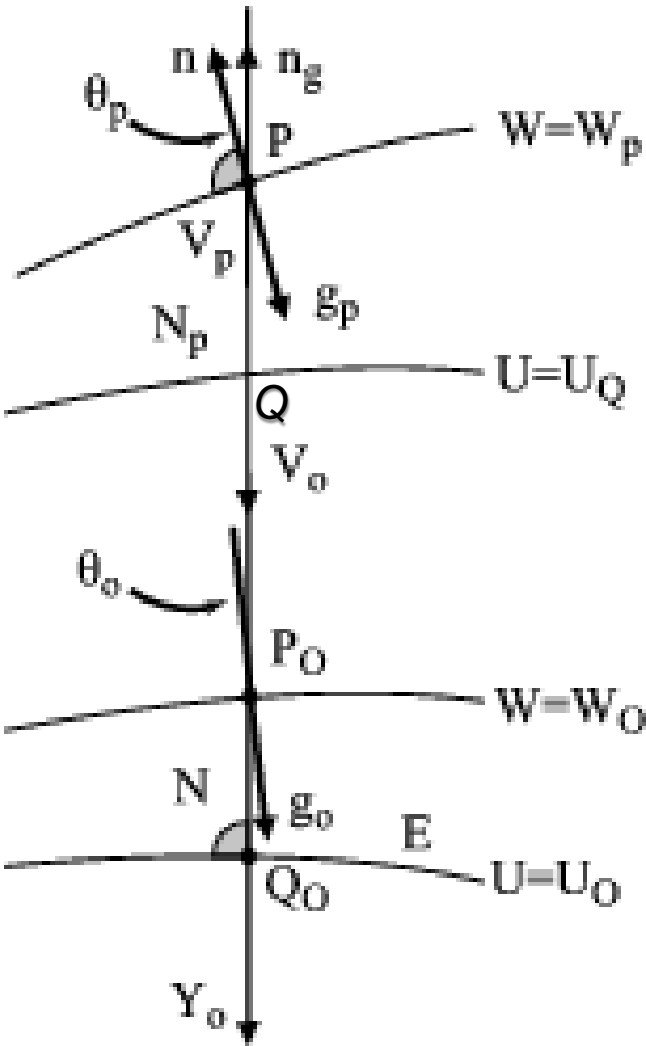
$$U_P = U_Q + \left(\frac{\partial U}{\partial n_E} \right)_Q N_P + \dots \quad \left. \begin{array}{l} \text{Ανάπτυγμα κανονικού} \\ \text{Δυναμικού } U \text{ στο } P \text{ κατά} \\ \text{Taylor (γραμμικοποίηση)} \end{array} \right\}$$

$$\gamma = - \frac{\partial U}{\partial n_E} \quad n_E \text{ (κάθετος στο ελλειψοειδές)}$$

$$N_P = \frac{T_P - (W_P - U_Q)}{\gamma_Q} \quad \text{υψόμετρο γεωειδούς}$$

$$U_Q = W_P$$

$$N_P = \frac{T_P}{\gamma_Q} \quad \text{τύπος του } Brunns$$



Εικόνα 2

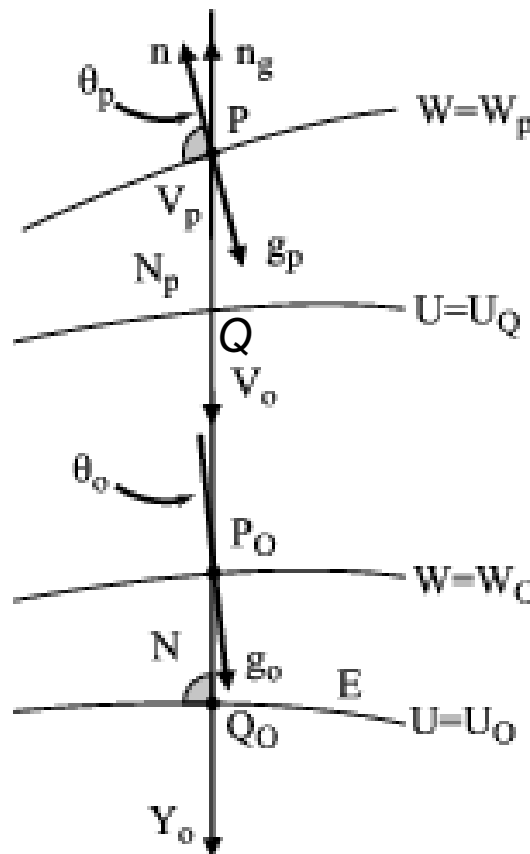
Η ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟΥ

$$\xi_P = -\frac{1}{\bar{M}\gamma_Q} \frac{\partial T}{\partial \phi}$$

$$\eta_P = -\frac{1}{\bar{N} \cos \phi \gamma_Q} \frac{\partial T}{\partial \lambda}$$

ξ , η συνιστώσες απόκλισης της κατακορύφου θ_P

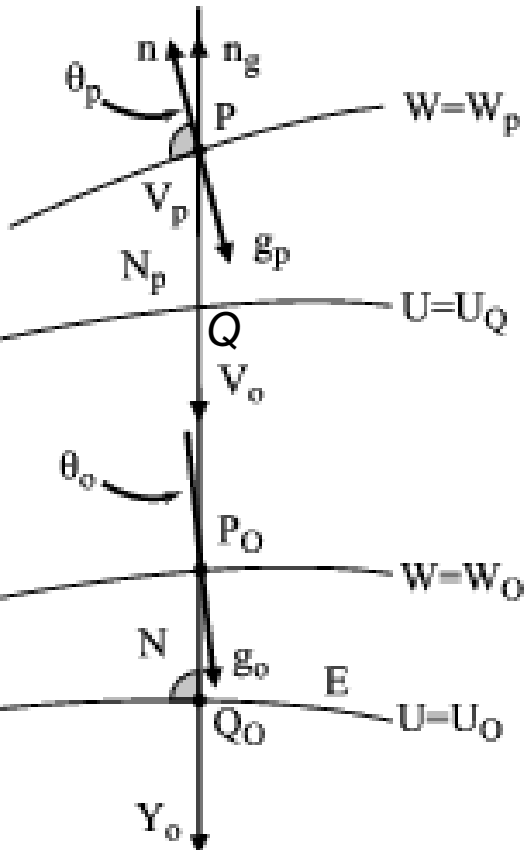
\bar{M} \bar{N} } ακτίνες καμπυλότητας του μεσημβρινού και της πρώτης καθέτου του μοντέλου της βαρύτητας



Εικόνα 3

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗ ΦΥΣΙΚΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ

$$g = \frac{\partial W}{\partial n} \quad \gamma = -\frac{\partial U}{\partial n_E} = -\frac{1}{\cos\theta_P} \frac{\partial U}{\partial n} \quad \cos\theta_P \approx 1$$



Εικόνα 4

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_P = -g_P + \gamma_P$$

$$\gamma_P = \gamma_Q + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n_E} \right)_Q N_{P+...}$$

$$\Delta g = -\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_P + \frac{1}{\gamma_Q} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n_E} \right)_Q T$$

θεμελιώδης εξίσωση φυσικής γεωδαισίας

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ - I

- Σφαιρική προσέγγιση – εισαγωγή σφαιρικής επιφάνειας αναφοράς ακτίνας R
- Όροι που έχουν σχέση με την πλάτυνση παραλείπονται

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\gamma = \frac{GM}{r^2}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial r} = -2 \frac{GM}{r^3} = -\frac{2\gamma}{r}$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T$$

θεμελιώδης εξίσωση φυσικής γεωδαισίας σε σφαιρική προσέγγιση

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ - II

Με αντικαταστάσεις από τον αντίστοιχο τύπο του διαταρακτικού T

$$\Delta g(\theta, \lambda) = \frac{GM}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n-1) \left[\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right] \bar{P}_{nm}(\cos \theta)$$

Υπολογισμός $\Delta \bar{C}_{nm}$ $\Delta \bar{S}_{nm}$

$$\begin{Bmatrix} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{r^2}{GM} \frac{1}{n-1} \left(\frac{r}{a}\right)^n \Delta g \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) d\sigma$$

$$d\sigma = \sin \theta d\theta d\lambda \quad (\text{μοναδιαία σφαίρα})$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΤΟΥ ΔΙΑΤΑΡΑΚΤΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

$$T_{xx} = -\gamma \xi_x$$

$$T_{xy} = -\gamma \xi_y = -\gamma \eta_x$$

$$T_{xz} = -\gamma \xi_z \approx \Delta g_x$$

$$T_{yy} = -\gamma \eta_y$$

$$T_{yz} = -\gamma \eta_z \approx \Delta g_y$$

$$T_{zz} = -\gamma (\xi_x + \eta_y) \approx \Delta g_z$$

$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\Delta g_x = \frac{\partial \Delta g}{\partial x}$$

$$T_{xy} = T_{yx}$$

$$T_{xz} = T_{zx}$$

$$T_{yz} = T_{zy}$$

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla T \approx \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

➤ τανυστής διαταρακτικού δυναμικού

➤ οι δεύτεροι παράγωγοι επηρεάζονται σημαντικά από τις γειτονικές

➤ μετρήσεις δευτέρων παραγώγων από δορυφόρους

Στατιστική Περιγραφή του Πεδίου Βαρύτητας

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

- Οι ανωμαλίες της βαρύτητας σε παγκόσμια κλίμακα θεωρούνται **στατιστικά μεγέθη με μέση τιμή μηδέν**
- Τα στατιστικά χαρακτηριστικά των ανωμαλιών βαρύτητας είναι ανεξάρτητα από τη **θέση** και τη **διεύθυνση**
- Ανεξάρτητα από τη θέση \longrightarrow ιδιότητα της **ομογένειας**
ανεξάρτητα από τη διεύθυνση \longrightarrow ιδιότητα της **ισοτροπίας**
- Η **συνάρτηση συμμεταβλητότητας** ($\Sigma\Sigma$) περιγράφει τα **στατιστικά χαρακτηριστικά** του πεδίου βαρύτητας (covariance function)
- Η $\Sigma\Sigma$ περιγράφει τη στατιστική συμπεριφορά του πεδίου βαρύτητας που χαρακτηρίζεται από την τάση να έχουν οι τιμές της ανωμαλίας της βαρύτητας Δg_i και Δg_j στα σημεία P_i και P_j το ίδιο περίπου μέτρο και το ίδιο περίπου πρόσημο, όταν η απόσταση μεταξύ των σημείων είναι μικρή. Η τάση αυτή εξασθενίζει ή και αντιστρέφεται, όταν η απόσταση μεταξύ των σημείων μεγαλώνει

$$\text{cov}(\Delta g_i, \Delta g_j, \psi) = M \Delta g_i \Delta g_j \psi$$

M { } τελεστής του μέσου όρου και ψ σφαιρική απόσταση στη μοναδιαία σφαίρα ($R=1$)

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

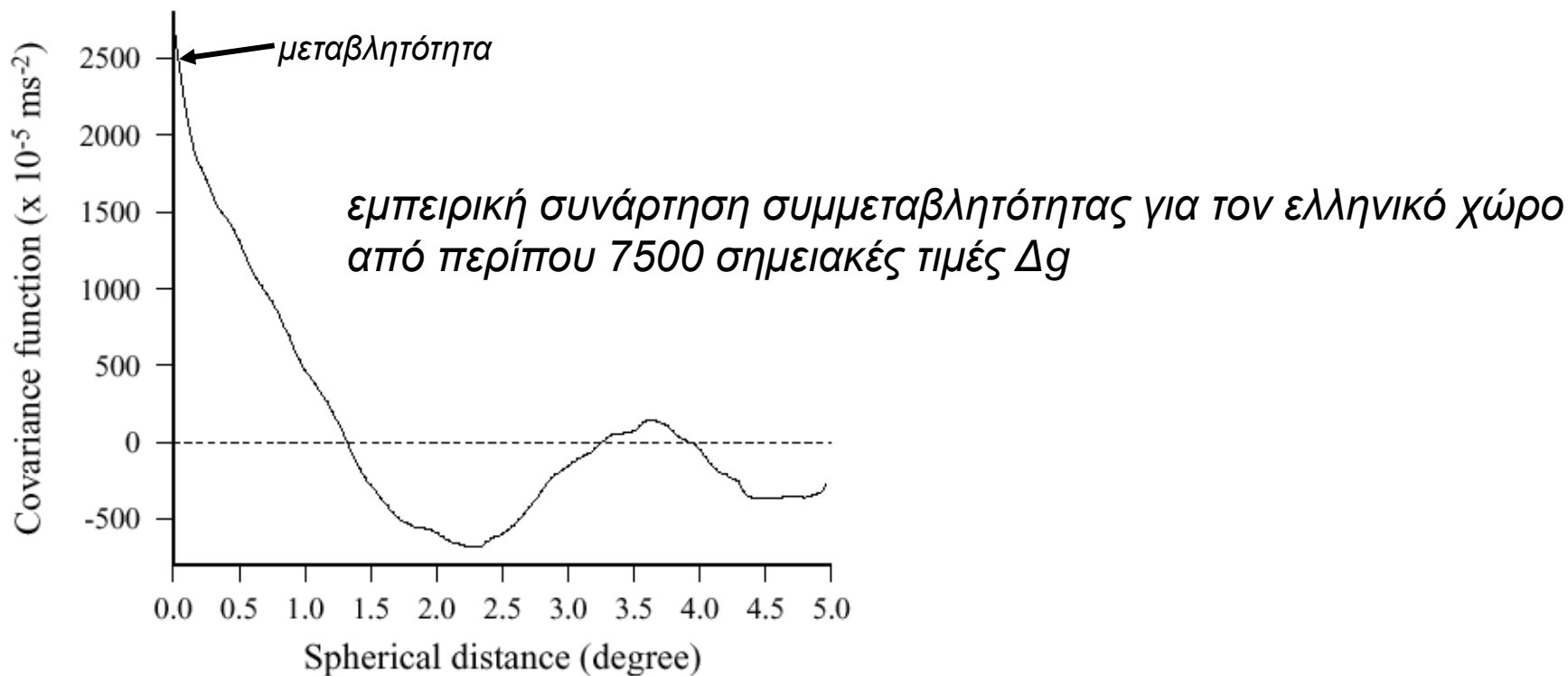
➤ Για $\psi=0$ έχουμε τη μεταβλητότητα

$$\sigma^2(\Delta g) \approx M \Delta g^2$$

➤ Οι ιδιότητες ομογένειας και ισοτροπίας δεν ισχύουν στην πραγματικότητα

➤ Σε τοπικές/περιφερειακές εφαρμογές οι ΣΣ υπολογίζονται λαμβάνοντας υπόψη τα στατιστικά χαρακτηριστικά της περιοχής μελέτης

➤ Εμπειρικές συναρτήσεις συμμεταβλητότητας



Εικόνα 5

Συνάρτηση συμμεταβλητότητας ανωμαλιών βαρύτητας

$$\text{COV}(\Delta g_i, \Delta g_j, \psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R^2}{r_i r_j} \right)^{n+2} \sigma_n^2 \Delta g \cdot P_n(\cos \psi) \rightarrow \begin{array}{l} \text{πολυώνυμα Legendre} \\ \text{αρμονικές συναρτήσεις} \end{array}$$

συντελεστές μεταβλητότητας πεδίου βαρύτητας

- Νόμος μετάδοσης συμμεταβλητότητας (*covariance propagation*)
- Συναρτήσεις διασυμμεταβλητότητας (*cross-covariance functions*)

$$\text{COV}(V_i, \Delta g_j, \psi) = \frac{R}{\bar{\gamma}} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R^2}{r_i r_j} \right)^{n+1} \frac{\sigma_n^2 \Delta g}{n-1} P_n(\cos \psi)$$

ΠΡΟΓΝΩΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

Μαθηματική έκφραση του προβλήματος πρόγνωσης

$$\Delta g_P = F(\Delta g_1, \Delta g_2, \dots, \Delta g_q)$$

Γραμμική πρόγνωση (*linear prediction*)

$$\tilde{\Delta g}_P = a_1 \Delta g_1 + a_2 \Delta g_2 + \dots + a_q \Delta g_q = \sum_{i=1}^q a_i \Delta g_i$$

Σφάλμα πρόγνωσης

$$\varepsilon_P = \Delta g_P - \tilde{\Delta g}_P$$

ΜΕΣΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ ΠΡΟΓΝΩΣΗΣ

Σφάλμα πρόγνωσης στο τετράγωνο

$$\varepsilon_P = (g_P - \tilde{\Delta}g_P)^2 = \Delta g_P^2 - 2 \sum_i a_i \Delta g_P \Delta g_i + \sum_i \sum_j a_i a_j \Delta g_i \Delta g_j$$

Μέσος όρος σφάλματος πρόγνωσης στο τετράγωνο

$$M \varepsilon_P^2 = M \Delta g_P^2 - 2 \sum_{i=1}^q a_i M \Delta g_P \Delta g_i + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q a_i a_j M \Delta g_i \Delta g_j$$

μεταβλητότητα

$$m_P^2 = C_0 - 2 \sum_{i=1}^q a_i C_i + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q a_i a_j C_{ij}$$

Συμβολισμοί

$$m_P^2 = M \varepsilon_P^2, C_0 = M \Delta g_P^2, C_{ij} = M \Delta g_i \Delta g_j, C_{Pj} = M \Delta g_P \Delta g_j$$

ΠΡΟΓΝΩΣΗ ΜΕ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ - I

➤ Προσδιορισμός συντελεστών α_i – βέλτιστα αποτελέσματα

$$\frac{\partial m_P^2}{\partial \alpha_i} = -2C_{Pi} + 2 \sum_{j=1}^q \alpha_j C_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, q) \left. \begin{array}{l} \text{Ελαχιστοποίηση μ.τ.σ.} \\ \text{Συνθήκη ελαχιστοποίησης} \end{array} \right\}$$

$$\sum_{j=1}^q \alpha_j C_{ij} = C_{Pi} \left. \begin{array}{l} \text{γραμμικό σύστημα} \\ \text{q εξισώσεων με} \\ \text{αγνώστους } \alpha_j \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Λύση συστήματος}} \alpha_j = \sum_{i=1}^q C_{ij}^{-1} C_{Pi}$$

Πρόγνωση στο σημείο P

$$\tilde{\Delta}g_P = \sum_{j=1}^q \alpha_j \Delta g_j = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q C_{ij}^{-1} C_{Pi} \Delta g_j$$

ΠΡΟΓΝΩΣΗ ΜΕ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ - II

$$\tilde{\Delta}g_P = \left(\begin{array}{cccc} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1q} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2q} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{q1} & C_{q2} & \dots & C_{qq} \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c} \Delta g_1 \\ \Delta g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta g_q \end{array} \right)$$

$$m_P^2 = C_0 - \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q C_{ij}^{-1} C_{Pi} C_{Pj}$$

$$m_P^2 = C_0 - \left(\begin{array}{cccc} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1q} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2q} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{q1} & C_{q2} & \dots & C_{qq} \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c} C_{P1} \\ C_{P2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{Pq} \end{array} \right)$$

ΠΡΟΓΝΩΣΗ ΜΕ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ - III

Εύρεση δυναμικού από τα συναρτησιακά του $l_i = L_i(T)$

$$\tilde{T} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1q} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{q1} & C_{q2} & \dots & C_{qq} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ l_q \end{pmatrix}$$

Συναρτήσεις συμμεταβλητότητας μεταξύ τιμών του δυναμικού και τιμών των δεδομένων (συναρτησιακών του δυναμικού)

$$C_{Pi} = \text{cov}(P_i, l_i) = M^{-1} \frac{\partial P_i}{\partial l_i} \quad C_{ij} = \text{cov}(P_i, l_j) = M^{-1} \frac{\partial P_i}{\partial l_j}$$

$$\text{cov}(P_i, l_j) = L_i \text{cov}(P_i, l_j) = L_i \frac{\partial P_i}{\partial l_j} = L_i \frac{\partial P_i}{\partial Q_j}$$

$$x = AX + s' + n$$

Εξίσωση παρατήρησης

x μέτρηση (q μετρήσεις)

s' σήμα (q σήματα)

n θόρυβος (q θόρυβοι)

X διάνυσμα m αγνώστων παραμέτρων

A πίνακας qxm συνδέει τις παρατηρήσεις με τις άγνωστες παραμέτρους

ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ - II

$$\tilde{s} = C_s^T \bar{C}^{-1} \left(-AX \right)$$

Βέλτιστη εκτίμηση σημάτων

ΛΥΣΗ

$$\bar{C} = C + D$$

C πίνακας συμμεταβλητοτήτων σημάτων
 D πίνακας συμμεταβλητοτήτων σφαλμάτων
 (πλήρης ή διαγώνιος – συσχετισμένα
 ή ασυσχέτιστα σφάλματα)

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

$$\tilde{X} = \left(A^T \bar{C}^{-1} A \right)^{-1} A^T \bar{C}^{-1} x$$

Βέλτιστη εκτίμηση αγνώστων
 παραμέτρων

ΣΦΑΛΜΑΤΑ

$$m_s^2 = C_{ss} - C_s^T \bar{C}^{-1} C_s + h_s^T A E_{xx} A^T h_s$$

$$h_s = C_s^T \bar{C}^{-1}$$

$$E_{xx} = \left(A^T \bar{C}^{-1} A \right)^{-1}$$

C_{ss} μεταβλητότητα σήματος s

ΑΚΡΙΒΕΙΕΣ

ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ - III

- **GEOCOL** (GEOdetic COLlocation) πρόγραμμα σημειακής προσαρμογής σε H/Y (Fortran)
- Λογισμικό **GRAVSOFT** (επίλυση όλων των προβλημάτων που συνδέονται με τη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής)
- Πλεονεκτήματα σημειακής προσαρμογής:
 - Κατανομή δεδομένων τυχαία ή σε πλέγμα
 - Πρόγνωση σε τυχαία σημαία ή σε πλέγμα
 - Αποτέλεσμα ανεξάρτητο από τον αριθμό των σημείων πρόγνωσης
 - Δεδομένα και προσδιοριζόμενα σήματα μπορεί να είναι ετερογενείς παρατηρήσεις
 - Βέλτιστη λύση, ακριβέστερη από οποιαδήποτε άλλη γραμμική προσέγγιση
- Μειονέκτημα σημειακής προσαρμογής
 - Απαιτείται επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων με αριθμό εξισώσεων ίσο με με τον αριθμό των αγνώστων
- Αντιμετώπιση του προβλήματος
 - Τεχνική «γρήγορης» σημειακής προσαρμογής (fast collocation)
 - Πεπερασμένες συναρτήσεις συμμεταβλητότητας (finite covariance functions)
 - Θετικά ορισμένοι πίνακες, πίνακες με πολλά μηδενικά (positive definite, sparse matrices)

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ - I

Συντελεστές μεταβλητότητας ανωμαλιών βαρύτητας

$$\sigma_n^2 \langle \Delta g \rangle = M \langle \Delta g_n^2 \rangle \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g_n^2 d\sigma \longleftrightarrow \text{αρμονικοί όροι} \longleftrightarrow \Delta g = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n$$

Συντελεστές μεταβλητότητας ανωμαλιών βαρύτητας από συναρτήσεις συμμεταβλητότητας

$$\sigma_n^2 \langle \Delta g \rangle = \frac{2n+1}{2} \int_{\psi=0}^{\pi} \langle \Delta g_i, \Delta g_j, \psi \rangle P_n(\cos\psi) \sin\psi d\psi$$

Συντελεστές μεταβλητότητας από γεωδυναμικά μοντέλα

$$\sigma_n^2 \langle \Delta g \rangle = (n-1) \left(\frac{GM}{R^2} \right)^2 \left(\frac{a}{R} \right)^{2n} \sum_{m=0}^n \langle \bar{C}_{nm}^2 + \Delta \bar{S}_{nm}^2 \rangle$$

Συντελεστές μεταβλητότητας υψομέτρων του γεωειδούς

$$\sigma_n^2(N) = \frac{R^2}{(n-1)\gamma^2} \sigma_n^2(\Delta g)$$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτουν συντελεστές μεταβλητότητας και για τις άλλες παραμέτρους του πεδίου βαρύτητας (αποκλίσεις κατακορύφου, διαταραχές βαρύτητας)

Μοντέλα συντελεστών μεταβλητότητας

Μοντέλο Tscherning και Rapp

$$C_n^2(\Delta g) \approx \frac{A(h-1)}{(h-2)(h+B)} s^{n+2}$$

A συντελεστής $(ns^{-2})^2$

B ακέραιος

$s < 1$ συντελεστής σύγκλισης

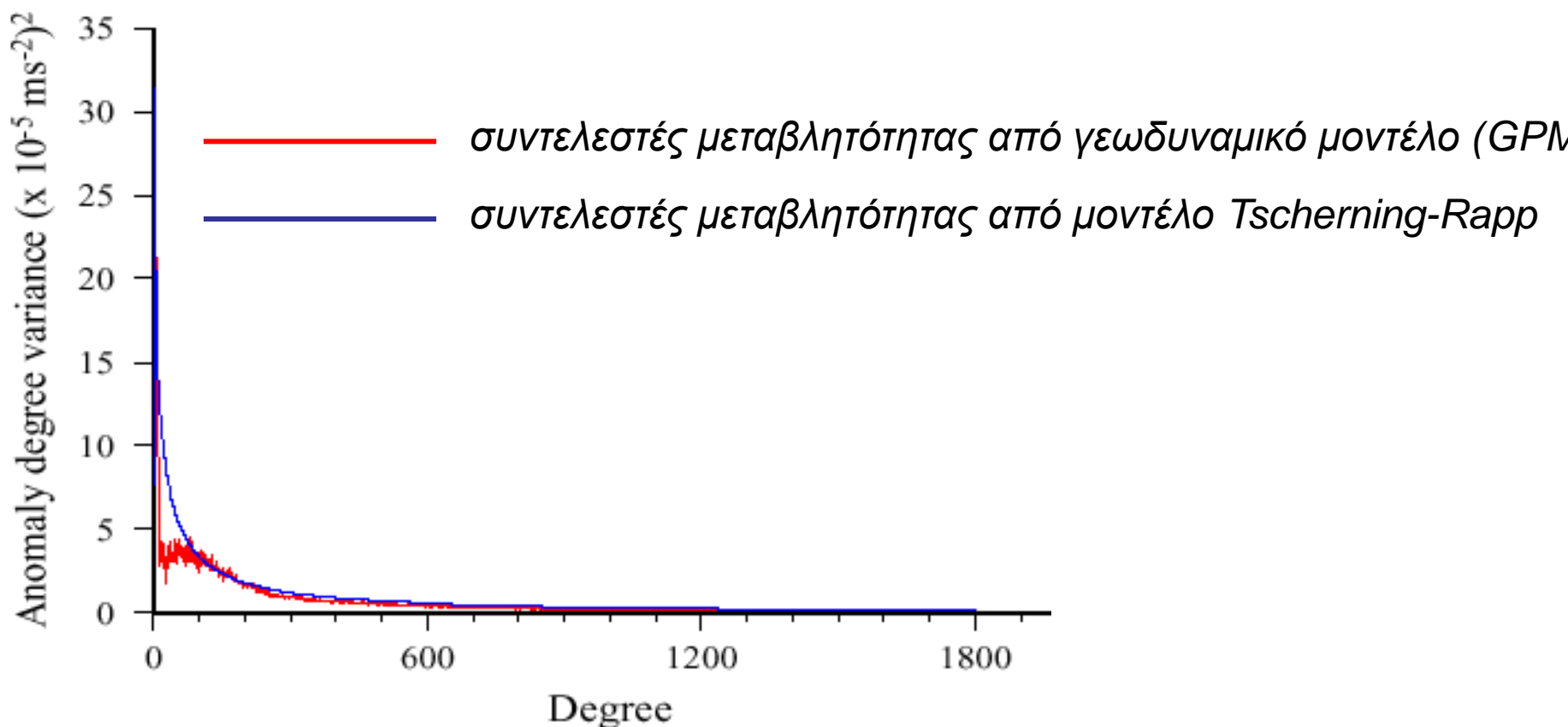
Σφαιρική εμπειρική συνάρτηση συμμεταβλητότητας

$$A = 425.28 \times 10^{-5} (ns^{-2})^2$$

$$B = 24$$

$$s = 0.999617$$

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ - IV



Εικόνα 6

- Οι συντελεστές μεταβλητότητας περιγράφουν τη φασματική συμπεριφορά του πεδίου των ανωμαλιών βαρύτητας σε μήκος κύματος $360^{\circ} / n$ που αντιστοιχεί σε βαθμό n του αναπτύγματος του γεωδυναμικού
- Δεν είναι δυνατό να υπολογισθούν συντελεστές μεταβλητότητας μέχρι $n = \infty$ (ο βαθμός εξαρτάται πρακτικά από τη διακριτική ικανότητα των μετρήσεων)

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ - V

Διαδικασία υπολογισμού συντελεστών μεταβλητότητας C_n
(μοντέλο Tscherning/Rapp)

- Υπολογίζεται η *εμπειρική συνάρτηση συμμεταβλητότητας* από τα διαθέσιμα δεδομένα
- Γίνεται προσαρμογή του μοντέλου των συντ. μεταβλητότητας C_n , ώστε οι συναρτήσεις συμμεταβλητότητας να προσεγγίζουν βέλτιστα τις εμπειρικές συναρτήσεις (απαιτείται επαναληπτική διαδικασία)
- Με τις παραμέτρους του μοντέλου των συντελεστών μεταβλητότητας υπολογίζεται η *αναλυτική συνάρτηση συμμεταβλητότητας* ανάμεσα σε οποιαδήποτε μεγέθη (δεδομένα ή ζητούμενα)

Πρόγνωση ανωμαλίας βαρύτητας

Στην περιοχή των Φιλιππών της Δρόμας ($40^{\circ} 54' \leq \varphi \leq 41^{\circ} 15', 23^{\circ} 52' \leq \lambda \leq 24^{\circ} 22'$) έγιναν 656 μετρήσεις βαρύτητας με μέση απόσταση περίπου 750 m, στα πλαίσια γεωφυσικής διασκόπησης. Δίνεται μέρος των μετρήσεων αυτών, όπως φαίνεται στον Πίνακα (1.1) και στο Σχήμα (1.1). Ζητείται να γίνει πρόγνωση της ανωμαλίας της βαρύτητας στο σημείο P με συντεταγμένες ($\varphi = 41^{\circ} 6' 5'', \lambda = 24^{\circ} 3' 16''$), με τη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής³.

Εικόνα 7

³Η τιμή της ανωμαλίας της βαρύτητας στο σημείο P είναι στην πραγματικότητα γνωστή, ίση με $-49.777 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$. Η σύγκριση της τιμής που θα προκύψει από την πρόγνωση με την τιμή αυτή θα είναι ένα μέτρο της ακρίβειας της πρόγνωσης.

Εικόνα 8

ΕΦΑΡΜΟΓΗ - II

Σταθμός	φ (Degree)	λ (Degree)	H (m)	Δg $\times 10^{-5} \text{m s}^{-2}$
1	41.118697	24.049942	91.14	-51.648
2	41.110628	24.052228	79.08	-51.404
4	41.092719	24.056264	68.52	-47.119
5	41.111625	24.064028	73.73	-53.179
6	41.117700	24.062761	81.71	-53.532
7	41.107044	24.075050	74.19	-51.899
8	41.126178	24.062753	84.30	-54.440
9	41.124547	24.111700	72.54	-51.451
10	41.132617	24.106186	85.94	-51.196
11	41.130714	24.094744	85.78	-54.037
12	41.118744	24.095528	70.96	-53.803
13	41.137606	24.087489	79.36	-53.726
14	41.141050	24.100669	93.05	-50.791
15	41.144903	24.115172	92.41	-44.938
16	41.147442	24.125958	103.10	-39.521
17	41.109267	24.041389	76.24	-51.100
18	41.100108	24.044039	70.83	-49.043
19	41.091811	24.046683	64.52	-46.326
20	41.103056	24.066111	68.84	-51.111

Εικόνα 9:

ΕΦΑΡΜΟΓΗ - III

Εμπειρική συνάρτηση συμμεταβλητότητας στην περιοχή μελέτης

ψ km	Συμμεταβλητότητα ($\times 10^{-5} \text{m s}^{-2}$) ²	Πλήθος ζευγών
0.0	317.4	656
1.5	309.7	2647
2.5	294.7	4120
3.5	268.5	5327
4.5	244.6	6491
5.5	217.3	7503
6.5	192.8	8317
7.5	165.7	8992
8.5	140.5	9497
9.5	113.3	9838
10.5	84.0	10013
11.5	52.5	10235
12.5	22.5	10161
13.5	-2.8	10116

Εικόνα 10

ΕΦΑΡΜΟΓΗ - IV

Προσαρμογή των εμπειρικών τιμών σε ένα εκθετικό μοντέλο (ελάχιστα τετράγωνα)

$$C(\psi) = ae^{\beta\psi^2}$$

$$\psi_{i,j} = \arccos \left[\sin \phi_i \sin \phi_j + \cos \phi_i \cos \phi_j \left(\cos \lambda_i \cos \lambda_j + \sin \lambda_i \sin \lambda_j \right) \right]$$

Από την προσαρμογή προκύπτουν

$$\alpha = 317.370 \times (10^{-5} \text{ms}^{-2})^2$$

$$\beta = 0.0120197479 \text{ km}^{-2}.$$

Εικόνα 11

Τύποι προσαρμογής

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \ln c_i - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \ln c_i \right) / n}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 / n}$$

$$a = \exp \left[\frac{\sum_{i=1}^n \ln c_i}{n} - b \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right]$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ - VI

Αλγόριθμος πρόγνωσης

$$\tilde{\Delta g}_P = C_{\Delta g_P, \Delta g_i}^T C_{\Delta g_i, \Delta g_j}^{-1} \Delta g_j$$

Για την πρόγνωση χρησιμοποιούνται 5 μετρήσεις που βρίσκονται στην πλησιέστερη απόσταση από το P

➤ Οι αποστάσεις για το διάνυσμα $C_{\Delta g_P, \Delta g_i}^T$

$$\psi_{P,i} = \begin{pmatrix} 1.036 & 0.998 & 0.898 & 1.262 & 0.005 \end{pmatrix}$$

Εικόνα 12

➤ Οι αποστάσεις για τον πίνακα $C_{\Delta g_i, \Delta g_j}$

$$\psi_{i,j} = \begin{pmatrix} 0.000 & 2.034 & 1.366 & 2.151 & 1.432 \\ & 0.000 & 1.321 & 0.797 & 1.442 \\ & & 0.000 & 0.955 & 1.893 \\ & & & 0.000 & 2.064 \\ & & & & 0.000 \end{pmatrix}$$

Εικόνα 13

ΕΦΑΡΜΟΓΗ - VII

$$\tilde{\Delta}g_P = C_{\Delta g_P, \Delta g_i}^T \left(C_{\Delta g_i, \Delta g_j}^{-1} \right) \Delta g_i$$

Με τις αποστάσεις και το αναλυτικό μοντέλο της συνάρτησης συμμεταβλητότητας σχηματίζονται το διάνυσμα και ο πίνακας συμμεταβλητοτήτων

$$C_{\Delta g_P, \Delta g_i}^T = \begin{bmatrix} 13.301 & 313.591 & 314.310 & 311.349 & 313.616 \end{bmatrix}$$

$$C_{\Delta g_i, \Delta g_j} = \begin{bmatrix} 317.370 & 301.974 & 310.334 & 300.197 & 309.647 \\ & 317.370 & 310.785 & 314.957 & 309.534 \\ & & 317.370 & 313.907 & 303.994 \\ & & & 317.370 & 301.533 \\ & & & & 317.370 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ - VIII

Το διάνυσμα των μετρήσεων είναι

$$\Delta g_i = \begin{pmatrix} -51.404 \\ -47.119 \\ -49.043 \\ -46.326 \\ -51.111 \end{pmatrix}$$

Ο αντίστροφος του πίνακα συμμεταβλητοτήτων είναι

$$C_{(\Delta g_i, \Delta g_i)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.736 & 0.431 & -2.449 & 1.360 & -1.061 \\ & 6.064 & 2.108 & -5.983 & -2.755 \\ & & 4.864 & -4.899 & 0.329 \\ & & & 7.729 & 1.770 \\ & & & & 1.729 \end{pmatrix}$$

Τελικά η πρόγνωση στο σημείο P είναι

$$\tilde{\Delta g}_P = -50.232 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$$



Θέμα στο μάθημα:

Εισαγωγή στο Πεδίο Βαρύτητας

1. Δίνεται ένα σύνολο 16 τιμών της έντασης της βαρύτητας (g^{GRS80}), οι οποίες αναφέρονται στο σύστημα αναφοράς GRS80 και στο σύστημα βαρύτητας IGSN71. Οι τιμές αυτές αναφέρονται επίσης στις κορυφές ενός πλέγματος ισοδιάστασης $2arcmin$. Το αρχείο δεδομένων (data.xls) περιέχει τα παρακάτω στοιχεία

α/α σημείου, φ ($^\circ$), λ ($^\circ$), g^{GRS80} (mGal), H (m), dg^{EGM08} (mGal), $dg^{GOCO02s}$ (mGal), $dg^{EIGEN6C2}$ (mGal)
 $n=250$, $dg^{EIGEN6C2}$ (mGal) $n=1949$, dg^{RTM} (mGal), N^{EGM08} (m), N^{RTM} (m)

όπου: α/α σημείου είναι ο κωδικός του σημείου

φ ($^\circ$) είναι το γεωδαιτικό πλάτος του σημείου

λ ($^\circ$) είναι το γεωδαιτικό μήκος του σημείου

g^{GRS80} (mGal) είναι η τιμή της έντασης της βαρύτητας στο GRS80 σε mGal

H (m) είναι το ορθομετρικό υψόμετρο του σημείου

dg^{EGM08} (mGal) είναι η συνεισφορά του μοντέλου EGM08 στις ανωμαλίες της βαρύτητας σε mGal

$dg^{GOCO02s}$ (mGal) είναι η συνεισφορά του μοντέλου GOCO02s στις ανωμαλίες της βαρύτητας σε mGal

$dg^{EIGEN6C2}$ (mGal) $n=250$ είναι η συνεισφορά του μοντέλου EIGEN6C2 για βαθμό ανάπτυξης $n=250$ στις ανωμαλίες της βαρύτητας σε mGal

$dg^{EIGEN6C2}$ (mGal) $n=1949$ είναι η συνεισφορά του μοντέλου EIGEN6C2 για βαθμό ανάπτυξης $n=1949$ στις ανωμαλίες της βαρύτητας σε mGal

dg^{RTM} (mGal) είναι η συνεισφορά του μοντέλου της υπολειπόμενης τοπογραφίας στις ανωμαλίες της βαρύτητας σε mGal

N^{EGM08} (m) είναι η συνεισφορά του μοντέλου EGM08 στα υψόμετρα του γεωειδούς σε m

N^{RTM} (m) είναι η συνεισφορά του μοντέλου της υπολειπόμενης τοπογραφίας στα υψόμετρα του γεωειδούς σε m

- α) Να υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές της κανονικής βαρύτητας στο GRS80 (γ^{GRS80}) για τα σημεία που δίνονται.

Εικόνα 14

ΘΕΜΑ ΕΞΑΜΗΝΟΥ (II)

α/α	φ	λ	g	H	dg(EGM08)	dg(GOCO02s)	dg(EIGEN6C) n=250	dg(EIGEN6C) n=1949	dg(RTM)	N(EGM08)	N(RTM)
1	40.000000	22.000000	979968.140684696	833	57.561	35.446	36.692	65.699	0.900	39.924	-0.011
2	40.033333	22.000000	979958.394329865	900	68.936	36.680	38.197	78.929	-2.831	40.257	-0.010
3	40.066667	22.000000	979964.115595190	881	76.778	37.957	39.735	84.879	-15.006	40.587	-0.013
4	40.100000	22.000000	979973.354076660	844	69.658	39.256	41.28	80.686	-15.126	40.628	-0.010
5	40.000000	22.033333	979991.932884696	725	50.676	35.369	36.596	55.427	2.500	39.944	-0.009
6	40.033333	22.033333	979963.215029865	880	65.376	36.509	38.007	68.236	4.192	40.256	-0.009
7	40.066667	22.033333	979974.105795190	828	72.057	37.720	39.488	78.714	-9.915	40.559	-0.005
8	40.100000	22.033333	980077.216476660	485	74.780	39.028	41.069	86.637	-19.943	40.748	-0.001
9	40.000000	22.066667	980025.920784696	572	38.534	35.282	36.486	39.577	3.207	39.942	0.004
10	40.033333	22.066667	980002.279429865	689	50.087	36.359	37.842	49.782	3.456	40.252	0.008
11	40.066667	22.066667	979978.652895190	798	62.329	37.463	39.213	63.185	0.556	40.523	0.005
12	40.100000	22.066667	979916.349976660	1095	74.039	38.541	40.533	78.128	11.573	40.841	0.001
13	40.000000	22.100000	980034.123584696	508	25.925	35.159	36.329	22.905	0.599	39.942	0.014
14	40.033333	22.100000	980037.767429864	513	33.854	36.187	37.647	28.024	-3.149	40.217	0.028
15	40.066667	22.100000	980028.508995190	572	51.267	37.234	38.972	43.877	-11.258	40.455	0.009
16	40.100000	22.100000	979956.937376660	939	70.721	38.236	40.221	70.275	3.969	40.921	0.020

ΘΕΜΑ ΕΞΑΜΗΝΟΥ (III)

Γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς 1980
Geodetic Reference System 1980 – **GRS80** (Καμπέρα)

$$a = 6378137 \text{ m}, \quad GM = 398600.5 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}, \quad J_2 = 1082.63 \times 10^{-6}, \quad \omega = 7.2921151467 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

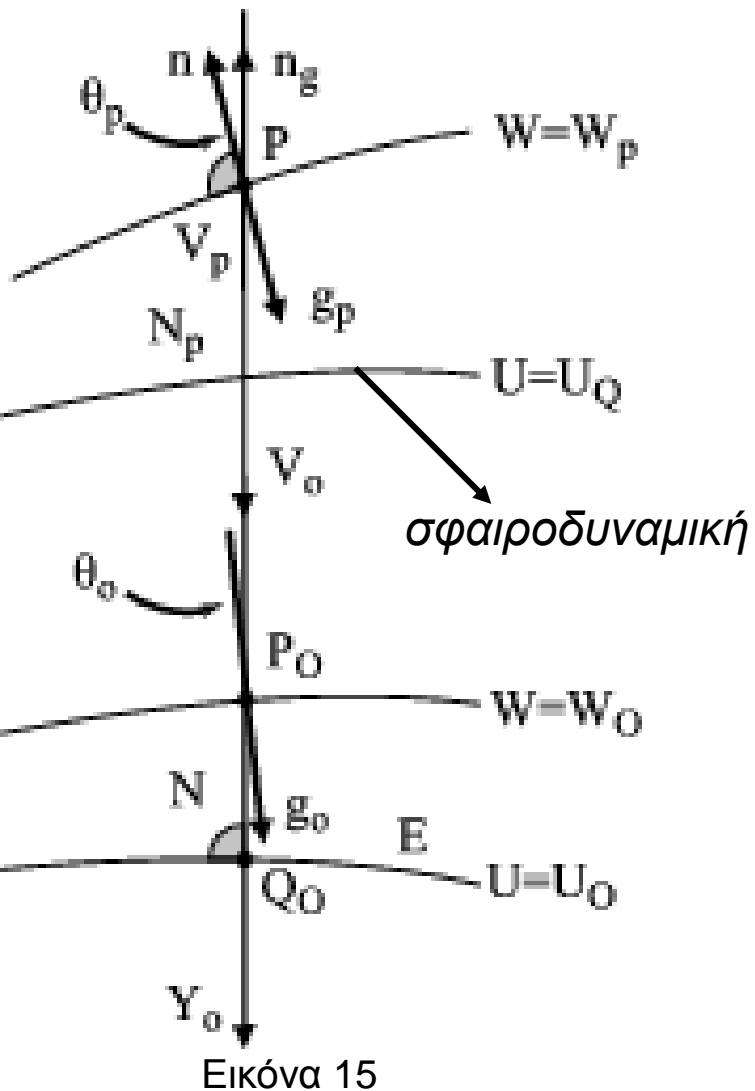
$$\gamma_0 = 9.78032677 \frac{1 + 0.001931851353 \sin^2 \varphi}{\left(-0.006694380029 \sin^2 \varphi \right)^{1/2}} \text{ ms}^{-2}$$

Αντικατάσταση του γεωγραφικού πλάτους κάθε σημείο και υπολογισμός του γ_0^{GRS80}

ΘΕΜΑ ΕΞΑΜΗΝΟΥ (IV)

- β) Να υπολογίσετε τις αντίστοιχες ανωμαλίες βαρύτητας και να απεικονίσετε σε κατάλληλο γράφημα το πεδίο που προκύπτει.

ΘΕΜΑ ΕΞΑΜΗΝΟΥ (V)



$$\Delta g = g_p - \gamma_o$$

ανωμαλία βαρύτητας

ΘΕΜΑ ΕΞΑΜΗΝΟΥ (VI)

- Στην ιστοσελίδα του μαθήματος υπάρχει διαθέσιμο πρόγραμμα στο Matlab για τη σχεδίαση των πεδίων

ΘΕΜΑ ΕΞΑΜΗΝΟΥ (VII)



ΤΜΗΜΑ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Εισαγωγή στο Πεδίο Βαρύτητας - 4^ο Εξάμηνο
Introduction to Earth's Gravity Field - 4th Semester

Οδηγίες-Ασκήσεις-Θέμα

Ανακοινώσεις

Προδιαγραφές μαθήματος

Θέμα Εξαμήνου

Δεδομένα Θέματος και σε ASCII μορφή.

Παρουσιάσεις μαθημάτων Ακαδημαϊκού Έτους 2013-2014

Οι παρουσιάσεις των μαθημάτων δίνονται σε μορφή pdf (Portable Document Format)

Παρουσίαση 1ου μαθήματος (Εισαγωγή στο αντικείμενο του μαθήματος, αναλυτικό πρόγραμμα μαθημάτων, ηλεκτρονική σελίδα, περιγραφή θέματος εξαμήνου. Δορυφορική γεωδαισία και παρακολούθηση του πεδίου βαρύτητας με επιγινείς και διαστημικές μεθόδους, ανωμαλίες βαρύτητας και υψόμετρα γεωειδούς).

Παρουσίαση 2ου μαθήματος (Εισαγωγή στο αντικείμενο του μαθήματος, μετρητικές διατάξεις, μονάδες μέτρησης, δύναμη έλξης και ελκτικό δυναμικό, φυγόκεντρος δύναμη και φυγόκεντρο δυναμικό, γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς, συστήματα υψών, ΤΣΑ βαρύτητας, Νευτώνιο πεδίο έλξης, δυναμικό της βαρύτητας, θεώρημα Gauss, γεωμετρία του πεδίου βαρύτητας, χωρασταθμικές επιφάνειες, κανονικό πεδίο βαρύτητας και κανονικό δυναμικό, συστήματα αναφοράς της βαρύτητας, θέμα εξαμήνου).

Κώδικας Matlab

(Περιλαμβάνει m-files που είναι χρήσιμα για το θέμα εξαμήνου σε συνδυασμό με το έτοιμο m-files από τη σελίδα του μαθήματος Σήματα και Φασματικές Μέθοδοι στη Γεωπληροφορική)

read_data.m (Πρόγραμμα που διαβάζει τα δεδομένα του θέματος, υπολογίζει στατιστικά (μέγιστη, ελάχιστη, μέση τιμή και τυπική απόκλιση) και δημιουργεί 3Δ-γραφήματα)

fftstokes.m (Πρόγραμμα για τον υπολογισμό υψομέτρων του γεωειδούς από ανωμαλίες βαρύτητας με φασματικές μεθόδους μέσω FFT και δημιουργία 3Δ-γραφημάτων)

On-line Δικτυακά μαθήματα για το Matlab από το Κέντρο Υποστήριξης Εκπαίδευσης (ΚΥΠΕ) ΑΠΘ

Μάθημα 1 (Περιβάλλον εργασίας Matlab, εκφράσεις, μεταβλητές και σταθερές)

Μάθημα 2 (Διανύσματα, πίνακες, αλφαριθμητικά στοιχεία, συστοιχίες πινάκων)

Μάθημα 3 (Στοιχειώδεις συναρτήσεις και έλεγχος ροής εντολών)

Μάθημα 4 (M-files: δημιουργία και ορισμός συναρτήσεων)

Μάθημα 5 (Γραφικές παραστάσεις, έλεγχος και μορφοποίηση διαγραμμάτων)

Μάθημα 6 (Συμβολικές εκφράσεις, ρητές παραστάσεις και απλοποίηση, σειρές, παραγωγή, ολοκλήρωση, επίλυση εξισώσεων)

Εικόνα 16

ΘΕΜΑ ΕΞΑΜΗΝΟΥ (VIII)

```
%-----  
% Sample program to open the project data file,  
% read the various data sources, compute their  
% statistics and make some first plots.  
%-----  
%  
% Prepared for the course  
%  
% "Introduction to Earth's Gravity field"  
%  
% taught at the Department of Geodesy and  
% Surveying of the Aristotle University of  
% Thessaloniki.  
%-----  
%  
%-----
```


ΘΕΜΑ ΕΞΑΜΗΝΟΥ (IX)

```
clear all
clc
%
%Read the input data
load data.dat
%number of points
pointsnr=size(data,1);
%declare the variables
phi=data(:,2);
dla=data(:,3);
g=data(:,4);
H=data(:,5);
dg_EGM=data(:,6);
dg_GOCO=data(:,7);
dg_RTM=data(:,8);
N_EGM=data(:,9);
N_RTM=data(:,10);
```

ΘΕΜΑ ΕΞΑΜΗΝΟΥ (IX)

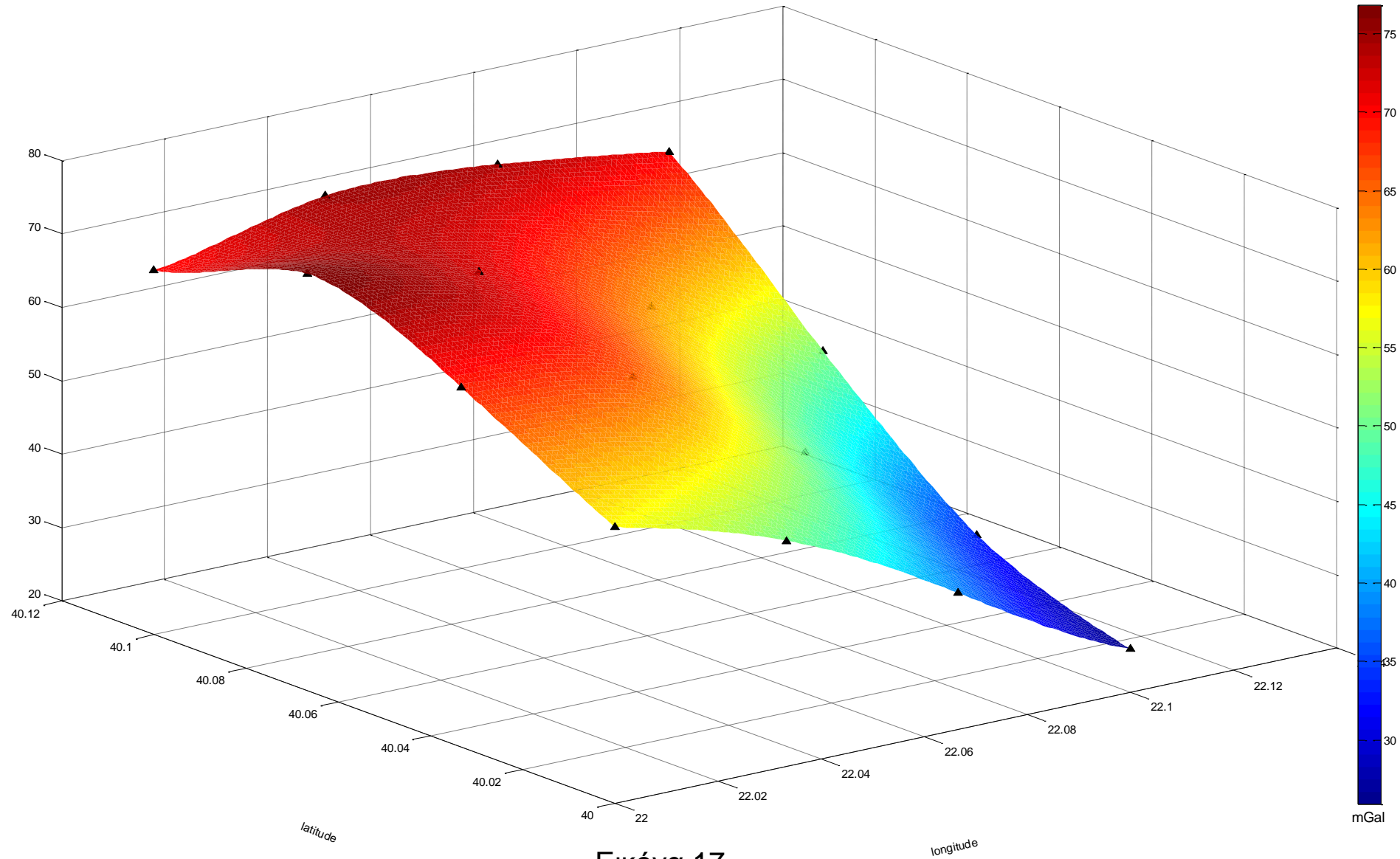
```
%-----  
% Compute the data statistics  
%  
%results printed on screen  
fprintf(1,'The statistics of the input dg(EGM08) are \n');  
fprintf(1,'-----\n');  
fprintf(1,'\n');  
  
fprintf(1,'max=%6.3f min=%6.3f mean=%6.3f  
std=%6.3f\n',max(dg_EGM),min(dg_EGM),mean(dg_EGM),std(dg_EGM)  
);  
  
%  
% finish with statistics  
%-----  
%
```

ΘΕΜΑ ΕΞΑΜΗΝΟΥ (X)

```
% Make some plots
phigrid=(min(phi):0.001:max(phi))';
dla grid=(min(dla):0.001:max(dla))';
[DLAI,PHI] = meshgrid(dla grid,phigrid);
DG_EGM = griddata(dla,phi,dg_EGM,DLAI,PHI,'v4');
%
% Use surf to do the plot
surf(DLAI,PHI,DG_EGM), hold
shading interp
%
% place the data points if you wish
plot3(dla,phi,dg_EGM,'^','MarkerEdgeColor','k',...
      'MarkerFaceColor','k','MarkerSize',6), hold off
% axis labels
xlabel('longitude','Rotation',12)
ylabel('latitude','Rotation',338)
% create colorbar
h= colorbar;
set(get(h,'xlabel'),'String', 'mGal', 'Rotation', 0,'FontSize',12)
title('Plot of EGM08 contribution to gravity anomalies','FontWeight','bold','FontSize',12)
% Plot generation ended
%-----
```

ΘΕΜΑ ΕΞΑΜΗΝΟΥ (XI)

Plot of EGM08 contribution to gravity anomalies



Εικόνα 17

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες
- Εικόνες 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17: Αραμπέλος Δ και Τζιαβός ΗΝ (2007) Εισαγωγή στο πεδίο βαρύτητας της Γης. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Ηλίας Τζιαβός – Γεώργιος Βέργος. «Εισαγωγή στο Πεδίο Βαρύτητας. Διαταρακτικά Μεγέθη στο Πεδίο Βαρύτητας». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS374/>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης



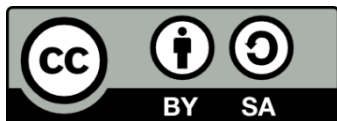
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Δαλάκης Νικόλαος
Θεσσαλονίκη, 16/9/2014



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

