



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

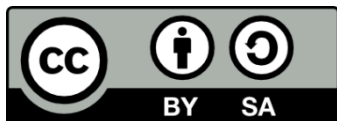
ΑΝΟΙΚΤΑ  
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



# Εισαγωγή στο Πεδίο Βαρύτητας

Ενότητα 7: Σφαιρικές Αρμονικές Συναρτήσεις  
& Αναπτύγματα Συνιστωσών του Πεδίου Βαρύτητας

Η.Ν. Τζιαβός - Γ.Σ. Βέργος  
Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



**ΑΠΘ/ΤΑΤΜ**

**Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας  
4<sup>ο</sup> Εξάμηνο**

***Εισαγωγή στο πεδίο βαρύτητας***

***Introduction to gravity field***

***Ακαδημαϊκή Χρονιά:***

***2014 – 2015***

***Πρόγραμμα:***

***Τετάρτη 9:00 – 13:00***

***Διδάσκοντες:***

***Η.Ν. Τζιαβός, Γ.Σ. Βέργος***

<http://web.auth.gr/e-topo/>

<http://olimpia.topo.auth.gr/courses/>

Ιστοσελίδες ΔΕΠ

Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας

Η. Τζιαβός ή Γ. Βέργος

Μαθήματα - εργασίες

# **Σφαιρικές Αρμονικές Συναρτήσεις & Αναπτύγματα Συνιστωσών του Πεδίου Βαρύτητας**

# ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Οι σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις αποτελούν λύσεις της εξίσωσης *Laplace*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

1. Πολυώνυμα και γενικευμένες συναρτήσεις *Legendre*
2. Πλήρως κανονικοποιημένα πολυώνυμα και πλήρως κανονικοποιημένες γενικευμένες συναρτήσεις *Legendre*
3. Επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές και πλήρως κανονικοποιημένες επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές

# ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΞΗΣ – ΤΟ ΓΗΙΝΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΞΗΣ

$$V = \frac{km}{l}$$

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{kM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \right]$$

- $r, \theta, \lambda$ : οι πολικές συντεταγμένες του σημείου υπολογισμού
- $M$  η μάζα της Γης
- $a$  ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς αναφοράς
- $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$  οι συντελεστές του γήινου δυναμικού έλξης
- $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$  οι πλήρως κανονικοποιημένες γενικευμένες συναρτήσεις *Legendre*



# ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Κάποια κρίσιμα σημεία:

- **Οποιαδήποτε συνάρτηση (ορισμένη από τις τιμές επάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας  $S$ ) είτε είναι αρμονική είτε όχι, μπορεί να αναπτυχθεί σε επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές (δεν αποτελεί όμως λύση των προβλημάτων συνοριακών τιμών)**

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda) \quad \Delta f \geq 0$$

- **Μία αρμονική συνάρτηση μπορεί πάντοτε να αναπτυχθεί σε στερεές σφαιρικές αρμονικές χρησιμοποιώντας τις συνοριακές τιμές της που είναι δοσμένες επάνω σε μια σφαιρική επιφάνεια  $S$  (και αποτελεί λύση των προβλημάτων συνοριακών τιμών)**

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n a_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda) \quad \Delta f = 0$$

# ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

## Σχέσεις ορθογωνικότητας επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} R_{nm}(\theta, \lambda) R_{sr}(\theta, \lambda) d\sigma = 0$$

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} S_{nm}(\theta, \lambda) S_{sr}(\theta, \lambda) d\sigma = 0$$

$$s \neq n \text{ ή } r \neq m \text{ ή } s \neq n \text{ \& } r \neq m$$

$$d\sigma = \sin\theta d\theta d\lambda$$

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} R_{nm}(\theta, \lambda) S_{sr}(\theta, \lambda) d\sigma = 0$$

$$\forall m \leq n \text{ \& } r \leq s$$

## Ειδικές περιπτώσεις

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} R_{n0}^2(\theta, \lambda) d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1}$$

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} R_{nm}^2(\theta, \lambda) d\sigma = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} S_{nm}^2(\theta, \lambda) d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} \frac{n+m!}{n-m!}$$

# ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΣΕ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

- Κάθε συνάρτηση είτε είναι αρμονική είτε όχι μπορεί να αναπτυχθεί σε επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)$$

- Για το δυναμικό της βαρύτητας, οι γραμμικοί συνδυασμοί των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών με  $r^n$  και  $1/r^{(n+1)}$ , δηλαδή οι **στερεές σφαιρικές αρμονικές**, αποτελούν λύσεις των συνοριακών προβλημάτων τιμών

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n a_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)$$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n a_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)$$

$$\bar{R}_{n0} \theta, \lambda = \sqrt{2n+1} R_{n0} \theta, \lambda$$

$$m=0$$

$$\bar{R}_{nm} \theta, \lambda = \sqrt{2 \cdot 2n+1} \frac{n-m!}{n+m!} R_{nm} \theta, \lambda$$

$$\bar{S}_{nm} \theta, \lambda = \sqrt{2 \cdot 2n+1} \frac{n-m!}{n+m!} S_{nm} \theta, \lambda$$

$$m \neq 0$$

### Σχέσεις ορθογωνικότητας

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \bar{R}_{nm}^2 \theta, \lambda d\sigma = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \bar{S}_{nm}^2 \theta, \lambda d\sigma = 1$$

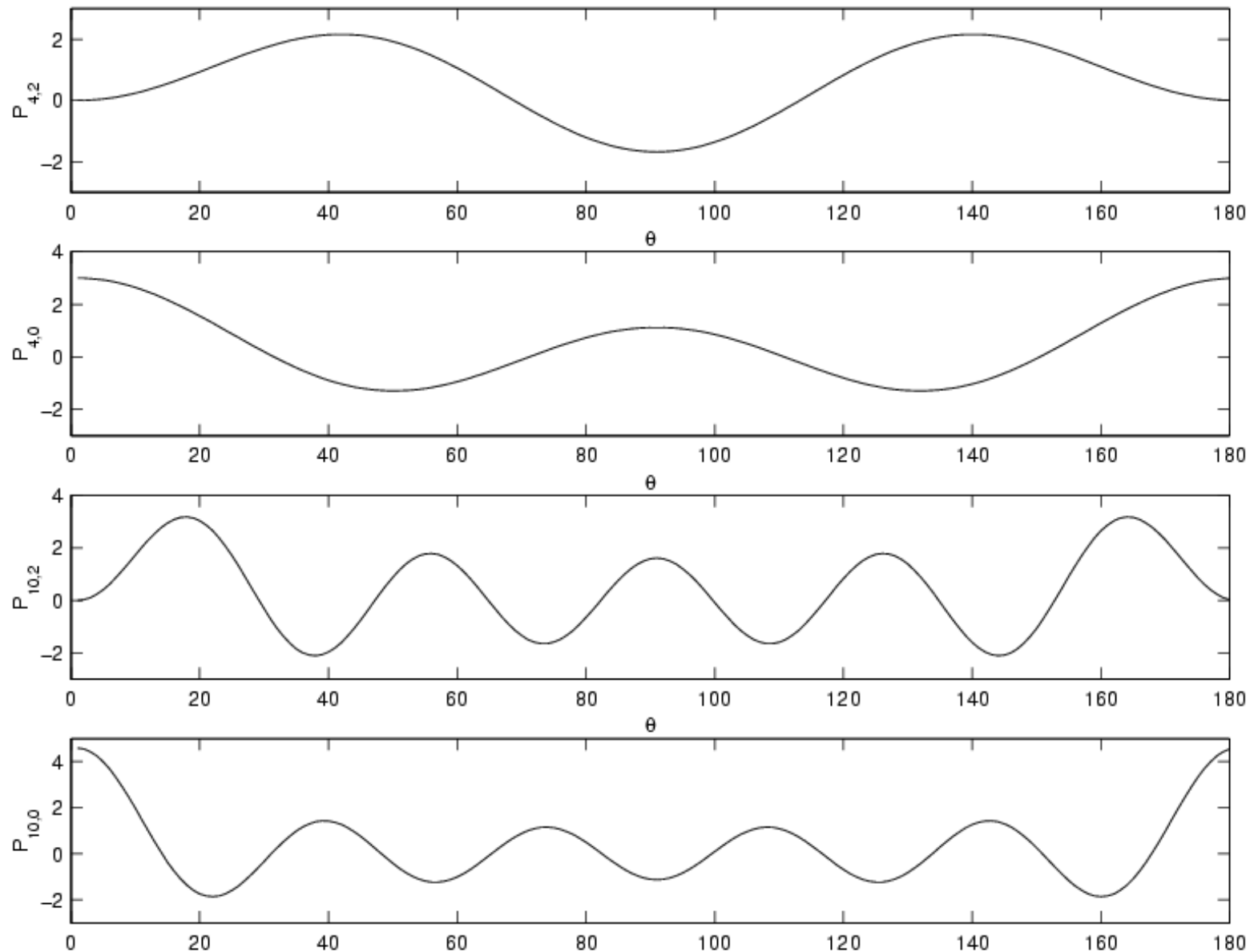
## Βασικές σχέσεις

$$\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) = \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \cos m\lambda \qquad \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) = \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \sin m\lambda$$

## Αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} \bar{P}_{nm}(\cos\theta) = & \sqrt{\frac{2n-1}{n-m} \frac{2n+1}{n+m}} \cos\theta \bar{P}_{n-1m}(\cos\theta) - \\ & \sqrt{\frac{2n+1}{2n-3} \frac{n+m-1}{n-m} \frac{n-m-1}{n+m}} \bar{P}_{n-2m}(\cos\theta) \end{aligned} \qquad n > m+1$$

# ΠΛΗΡΩΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ



Εικόνα 1

## Παράδειγμα υπολογισμού

- Υπολογίζονται οι τιμές των πρώτων σε βαθμό και τάξη συναρτήσεων

$$\bar{P}_{00} = 1$$

$$\bar{P}_{10} = \sqrt{3} \cos \theta$$

$$\bar{P}_{11} = \sqrt{3} \sin \theta$$

- Υπολογίζονται οι τιμές των συναρτήσεων επάνω στην κύρια διαγώνιο ( $n=m$ )

$$\bar{P}_{nn} = \sqrt{\frac{2n+1}{2n}} \sin \theta \bar{P}_{n-1,n-1} \quad n \geq 2$$

- Υπολογίζονται οι τιμές των συναρτήσεων επάνω στη δεύτερη διαγώνιο

$$\bar{P}_{n,n-1} = \sqrt{2n+1} \cos \theta \bar{P}_{n-1,n-1}$$

- Υπολογίζονται οι υπόλοιπες τιμές από την αναδρομική διαδικασία

$$\begin{aligned} \bar{P}_{nm} \cos \theta = & \sqrt{\frac{2n-1}{n-m} \frac{2n+1}{n+m}} \cos \theta \bar{P}_{n-1m} \cos \theta - \\ & - \sqrt{\frac{2n+1}{2n-3} \frac{n+m-1}{n-m} \frac{n-m-1}{n+m}} \bar{P}_{n-2m} \cos \theta \end{aligned}$$

# ΤΟ ΓΗΙΝΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΞΗΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

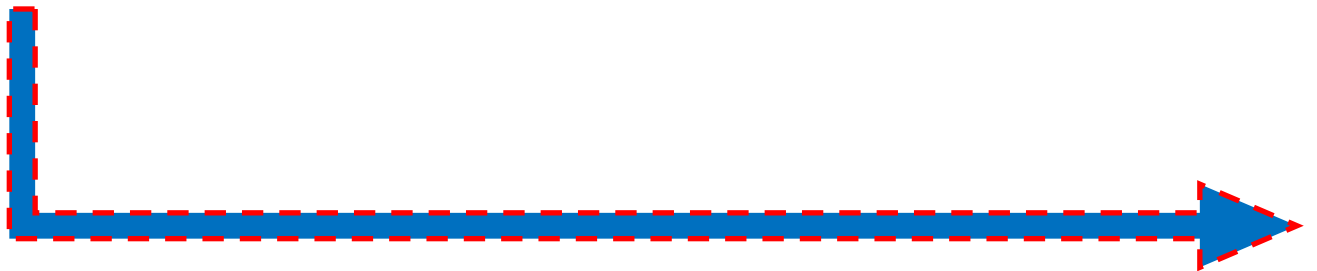
$$V = k \iiint_u \frac{dm}{l} = k \iiint_u \frac{\rho}{l} du$$

V ρίζα της εξίσωσης του Laplace



$$\Delta V = \Delta k \iiint_u \frac{dm}{l} = k \iiint_u \rho \Delta \left( \frac{1}{l} \right) du$$

εφαρμογή του τελεστή  $\Delta$  του Laplace





Δεδομένου το  $1/l$  είναι αρμονική συνάρτηση, ισχύει

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_2^n}{r_1^{n+1}} P_n \cos \psi$$

$$\cos \psi = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \lambda_1 - \lambda_2$$

# ΤΟ ΓΗΙΝΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΞΗΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

○το  $1/l$  αρμονική συνάρτηση, άρα και το δυναμικό  $V$  αρμονική συνάρτηση και επομένως μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά σφαιρικών αρμονικών (για τυχαίο σημείο απόστασης  $r$  από το κέντρο της γήινης σφαίρας)

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \alpha_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)$$

○Η αρμονική μηδενικής τάξης ( $n=0$ ) δίνει το δυναμικό της Γήινης μάζας ( $kM$ ), η οποία θεωρείται συγκεντρωμένη στο κέντρο της γήινης σφαίρας

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{kM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \alpha_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda) \right]$$

# ΤΟ ΓΗΙΝΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΞΗΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

- Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε είναι γεωκεντρικό τότε οι αρμονικοί όροι πρώτης τάξης ( $n=1$ ) εξαφανίζονται

$$V_{r,\theta,\lambda} = \frac{kM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \alpha_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda) \right]$$

- Τέλος εάν αντί για τους συντελεστές ( $a_{nm}, b_{nm}$ ) αντικαταστήσουμε τα τριπλά ολοκληρώματα των γήινων μαζών με τους **σφαιρικούς αρμονικούς συντελεστές** ( $C_{nm}, S_{nm}$ ) προκύπτει

$$V_{r,\theta,\lambda} = \frac{kM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda P_{nm}(\cos \theta) \right]$$

# ΤΟ ΓΗΙΝΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΞΗΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

- Οι σφαιρικοί αρμονικούς συντελεστές ( $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$ ) υπολογίζονται ως εξής

$$C_{n0} = C_n = \frac{1}{M} \iiint_{\gamma\eta} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n \cos\theta \, dm \quad m=0$$

$$\begin{cases} C_{nm} \\ S_{nm} \end{cases} = \frac{2}{M} \frac{n-m!}{n+m!} \iiint_{\gamma\eta} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_{nm} \cos\theta \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases} dm \quad m \neq 0$$

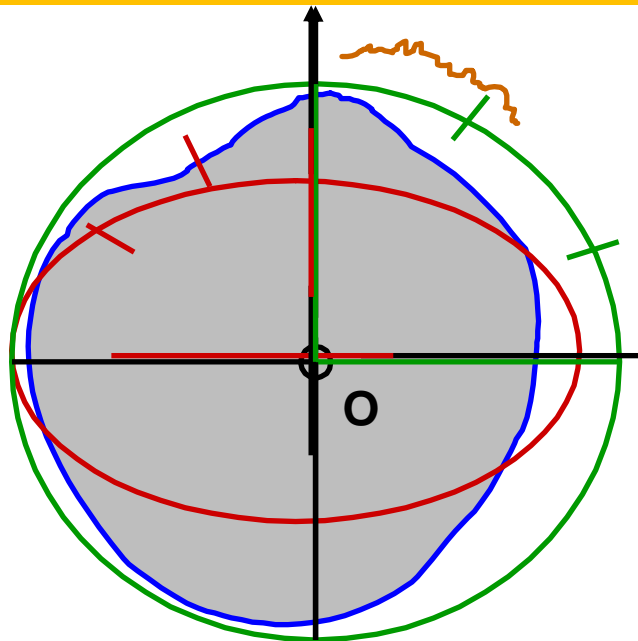
# ΤΟ ΓΗΙΝΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΞΗΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

- Σε πλήρη αναλογία με τις πλήρως κανονικοποιημένες επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές ορίζονται και οι **πλήρως κανονικοποιημένοι σφαιρικοί αρμονικοί συντελεστές**

$$\begin{cases} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{cases} = \sqrt{\frac{n+m!}{k 2n+1 n-m!}} \begin{cases} C_{nm} \\ S_{nm} \end{cases} \quad k = \begin{cases} 1 & m=0 \\ 2 & m \neq 0 \end{cases}$$

$$V_{r,\theta,\lambda} = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

# ΤΟ ΓΗΙΝΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΞΗΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ



Εικόνα 2

ΕΕΠ



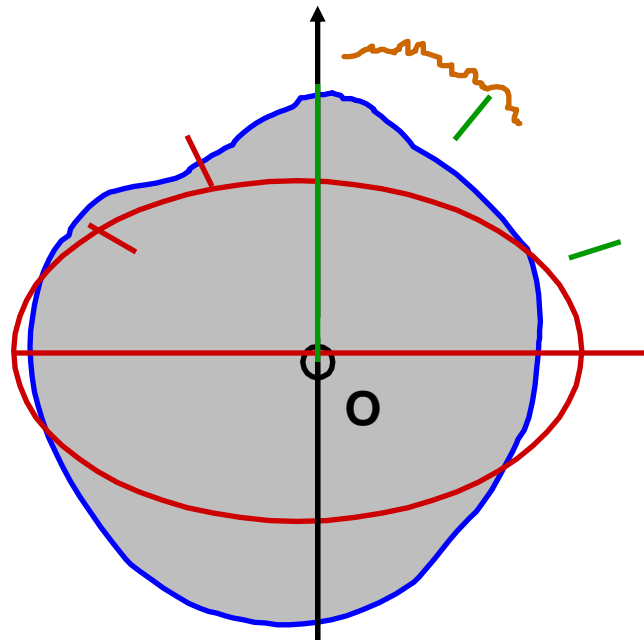
σφαίρα



$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

- Ο όρος μηδενικής τάξης ( $n=0$ ) δίνει το δυναμικό της Γήινης μάζας ( $kM$ ), η οποία θεωρείται συγκεντρωμένη στο κέντρο της γήινης σφαίρας και απουσιάζει αφού διαχωρίζεται πλήρως
- Το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε είναι γεωκεντρικό οπότε οι αρμονικοί όροι πρώτης τάξης ( $n=1$ ) εξαφανίζονται

# ΤΟ ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΞΗΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ



Εικόνα 3

ΕΕΠ



$$\bar{V}(r, \theta) = \frac{kM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} \left( \frac{a}{r} \right)^{2n} P_{2n} \cos \theta \right]$$

○ Λόγω της συμμετρίας του ΕΕΠ ως προς τον άξονα περιστροφής **μηδενίζονται** οι τραπεζοειδείς αρμονικές (δεν υπάρχει τάξη ανάπτυξης  $m$ ) και το ανάπτυγμα είναι **ανεξάρτητο** του  $\lambda$

○ Λόγω της συμμετρίας του ΕΕΠ ως προς το ισημερινό επίπεδο **μηδενίζονται** οι περιττές αρμονικές ζώνης

**Υπάρχουν στο ανάπτυγμα μόνο άρτιες αρμονικές ζώνης**

# ΤΟ ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΞΗΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

$$\bar{V}(r, \theta) = \frac{kM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} \left( \frac{a}{r} \right)^{2n} P_{2n} \cos \theta \right]$$

$$J_{2n} = -1^{n+1} \frac{3e^{2n}}{2n+1} \frac{1}{2n+3} \left( 1 - n + 5n \frac{J_2}{e^2} \right)$$

$$J_2 = \frac{C - A}{M a^2} \quad \text{συντελεστής δυναμικής μορφής για } n=1$$

$$A = \iiint_M y^2 + z^2 \, dM$$

$$C = \iiint_M x^2 + y^2 \, dM$$

Ροπές αδρανείας του ΕΕΠ ως προς τους άξονες x και z αντίστοιχα

$$e = \frac{E}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

e – πρώτη εκκεντρότητα ΕΕΠ

E – πρώτη γραμμική εκκεντρότητα



## Εκφράσεις για τους πρώτους όρους

$$J_2 = \frac{2}{3} \left[ f \left( 1 - \frac{f}{2} \right) - \frac{m}{2} \left( 1 - \frac{2}{7}f + \frac{11}{49}f^2 \right) \right]$$

$$J_4 = -\frac{4}{35} f \left( 1 - \frac{f}{2} \right) \left[ 7f \left( 1 - \frac{f}{2} \right) - 5m \left( 1 - \frac{2}{7}f \right) \right]$$

$$J_6 = \frac{4}{21} f^2 \quad 6f - 5m$$

$$m = \frac{\omega^2 a^3 (1-f)}{kM}$$


## Τιμές για το ελλειψοειδές του GRS80

$$J_2 = 0.108262982131 \times 10^{-2}$$

$$J_4 = -0.2370911200531 \times 10^{-5}$$

$$J_6 = 0.608346498882 \times 10^{-8}$$

$$J_8 = -0.142681087920 \times 10^{-10}$$



Πολύ μικρές τιμές για αυξανόμενο βαθμό  $n$

Συνήθως χρησιμοποιούμε συντελεστές μέχρι έκτο βαθμό

# ΤΟ ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΞΗΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

○ Σε πλήρη αναλογία με την ανάπτυξη του γήινου δυναμικού έλξης σε πλήρως **κανονικοποιημένους σφαιρικούς αρμονικούς συντελεστές** μπορούμε να εκφράσουμε και το κανονικό δυναμικό έλξης

$$\bar{V}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^{\text{ΕΕΠ}} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^{\text{ΕΕΠ}} \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

$$\bar{S}_{nm}^{\text{ΕΕΠ}} = 0; \quad \forall n, m$$

$$\bar{C}_{nm}^{\text{ΕΕΠ}} = 0; \quad \forall m \neq 0, m - \text{περιττό}$$

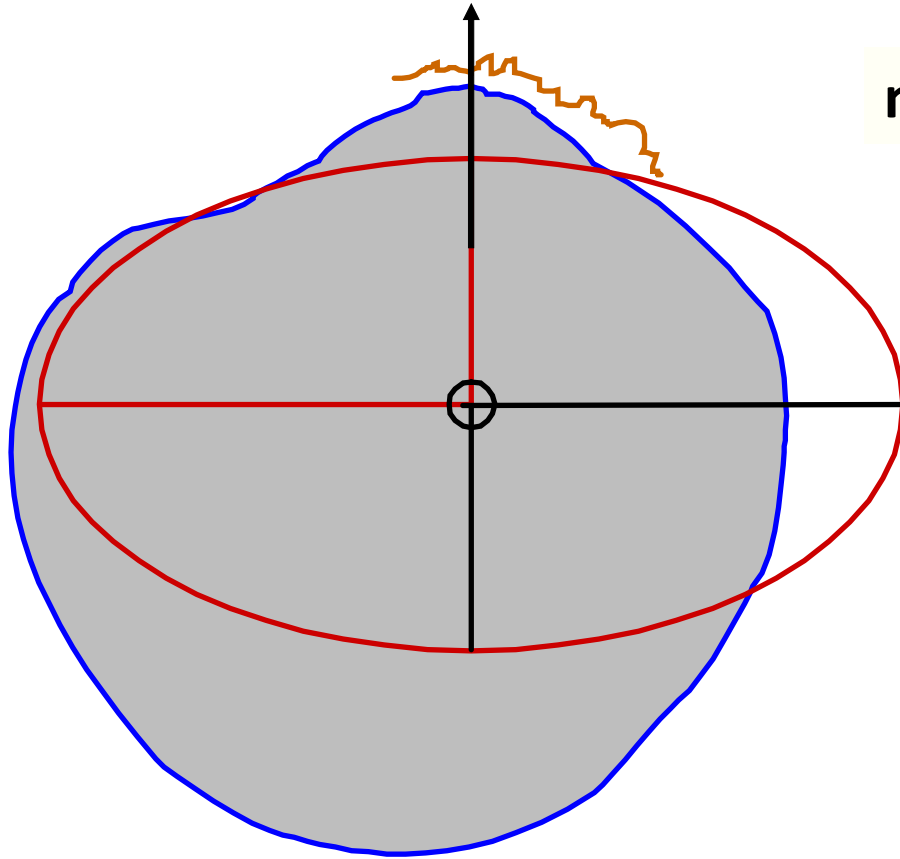
$$\bar{V}(r, \theta, \lambda) = \bar{V}(r, \theta)$$

$$\bar{V}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \left( \frac{a}{r} \right)^2 \bar{C}_{20}^{\text{ΕΕΠ}} \bar{P}_{20} + \left( \frac{a}{r} \right)^4 \bar{C}_{40}^{\text{ΕΕΠ}} \bar{P}_{40} + \left( \frac{a}{r} \right)^6 \bar{C}_{60}^{\text{ΕΕΠ}} \bar{P}_{60} + \dots \right]$$

$$\bar{C}_{n0}^{\text{ΕΕΠ}} = -\frac{J_n}{\sqrt{2n+1}}$$

## 1η προσέγγιση

η γη προσεγγίζεται με ελλειψοειδές



$\bar{V}$  δυναμικό έλξης του ΕΕΠ

$\Phi$  φυγοκεντρικό δυναμικό

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 x^2 + y^2$$

δυναμικό κανονικής γης (κανονικής βαρύτητας)  
κανονικό δυναμικό

$$U = \bar{V} + \Phi$$

# ΤΟ ΓΙΝΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

## 2η προσέγγιση

η γη προσεγγίζεται με σφαίρα

$V$  δυναμικό έλξης του ΕΕΠ

$\Phi$  φυγοκεντρικό δυναμικό

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

δυναμικό βαρύτητας

$$W = V + \Phi$$

# ΔΙΑΤΑΡΑΚΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

- Η πραγματική (θεωρητική) ποσότητα μείον ένα κανονικό μέρος (που αποτελεί το μεγαλύτερο τμήμα) και υπολογίζεται από κάποιο μοντέλο



$$\text{Διαταρακτικό δυναμικό } T$$
$$T = W - U$$



- Το πραγματικό (θεωρητικό) γήινο δυναμικό βαρύτητας μείον ένα κανονικό μέρος (που αποτελεί το μεγαλύτερο τμήμα) και υπολογίζεται από κάποιο μοντέλο (ΕΕΠ)

# ΤΟ ΔΙΑΤΑΡΑΚΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

$$T = W - U = V + \Phi - \bar{V} + \Phi = V - \bar{V}$$

διαταρακτικό

βαρύτητας

ΕΕΠ

γήινης έλξης

φυγόκεντρο

κανονικό ΕΕΠ

$$\bar{C}_{n0}^{\text{ΕΕΠ}} = -\frac{J_n}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\bar{C}_{20}^{\text{ΕΕΠ}} = -\frac{J_2}{\sqrt{5}}$$

$$\bar{C}_{40}^{\text{ΕΕΠ}} = -\frac{J_4}{3}$$

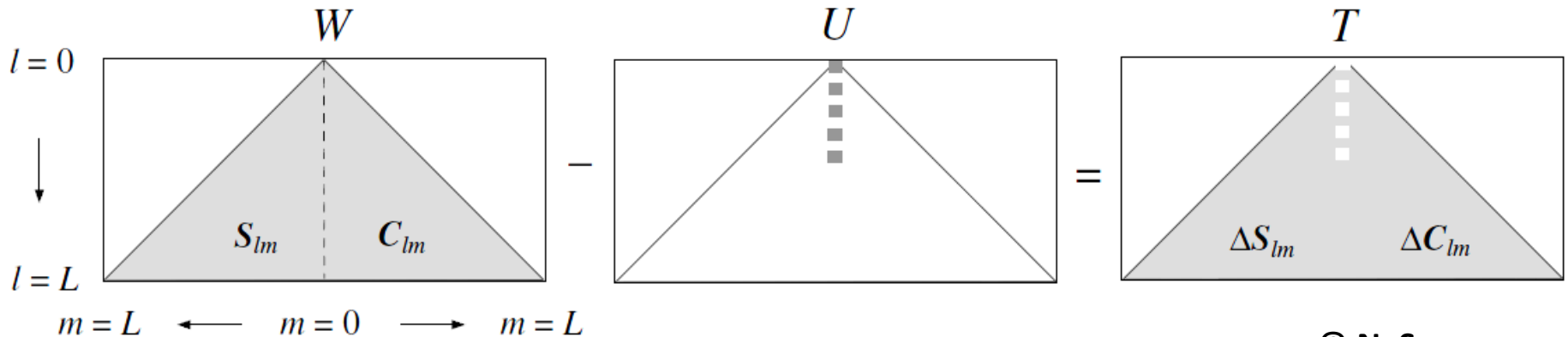
$$\bar{C}_{n0}^* = \bar{C}_{n0} - \bar{C}_{n0}^{\text{ΕΕΠ}}$$

$$\bar{S}_{nm}^* = \bar{S}_{nm}$$

$$T_{r,\theta,\lambda} = \frac{kM}{r} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

# ΤΟ ΔΙΑΤΑΡΑΚΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

$$T_{r,\theta,\lambda} = \frac{kM}{r} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

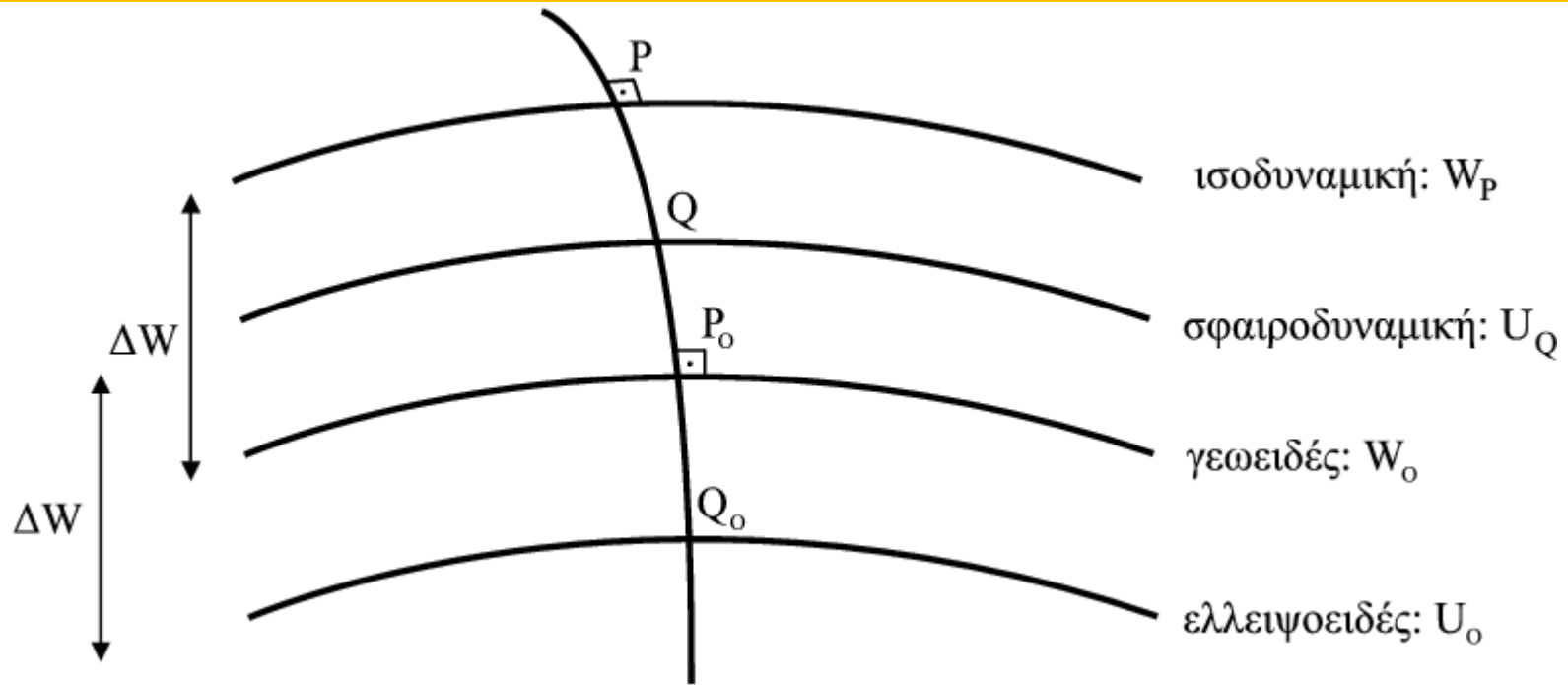


© N. Sneeuw

Εικόνα 4



# ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ



Εικόνα 5

$$W_P = W_0 + \Delta W$$

$$U_Q = U_0 + \Delta W$$



σφαιροδυναμική επιφάνεια

$$V = W + \Phi = \frac{km}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

# ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗ ΦΥΣΙΚΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ

Σε σφαιρική προσέγγιση προκύπτει

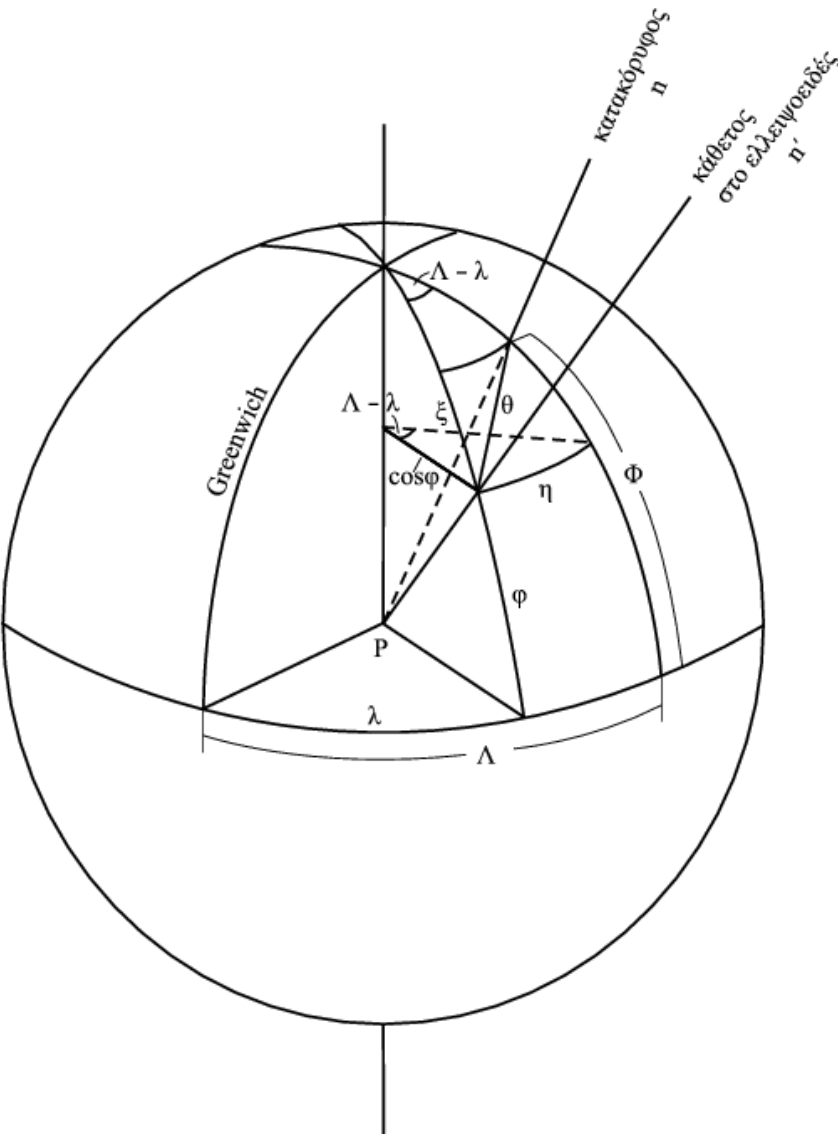
$$\Delta g_p = -\frac{\partial T_p}{\partial n} + \frac{1}{\gamma_Q} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial n'} \right)_Q T_p$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{1 \partial \gamma}{\gamma \partial h} = -\frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1 \partial \gamma}{\gamma \partial h} = -\frac{2}{R}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = \frac{\partial \gamma}{\partial r} = -2 \frac{kM}{r^3} \Rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial h} = -\frac{2G}{R}$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T$$



Εικόνα 6

# ΑΝΩΜΑΛΙΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T$$

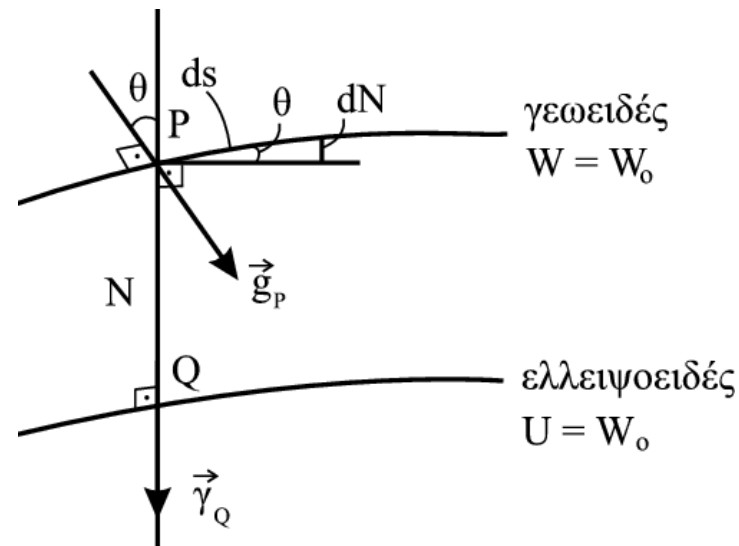
$$T_{r,\theta,\lambda} = \frac{kM}{r} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{kM}{ra} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} -n-1 \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

$$\frac{2}{r}T = \frac{kM}{ra} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} 2 \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

$$\Delta g_{r,\theta,\lambda} = \frac{kM}{r^2} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} n-1 \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

# ΆΛΛΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ



Εικόνα 7

$$N = \frac{T}{\gamma}$$

$$\theta = -\frac{dN}{ds} = -\frac{1}{\gamma} \frac{dT}{ds}$$

$$\xi = -\frac{1}{\gamma r} \frac{\partial T}{\partial \phi}$$

$$\eta = -\frac{1}{\gamma r \cos \phi} \frac{\partial T}{\partial \lambda}$$

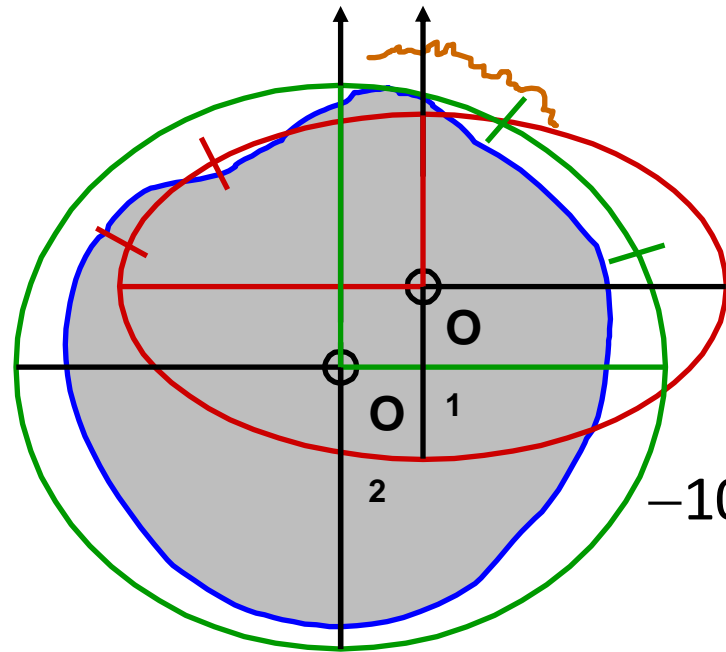
$$\frac{\partial \bar{P}_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta = \frac{1}{\sin \theta} n \bar{P}_n \cos \theta - n \bar{P}_{n+1} \cos \theta$$

$$N_{r, \theta, \lambda} = \frac{kM}{r\gamma} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

$$\xi_{r, \theta, \lambda} = -\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \frac{\partial \bar{P}_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta$$

$$\eta_{r, \theta, \lambda} = -\frac{1}{\cos \phi} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n -\bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda m \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

# ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ



Εικόνα 8

Γεωειδές  $\sim$  ΕΕΠ  $\sim$  Σφαίρα  $a = r = R$

Αποχή ΕΕΠ από σφαίρα  $f \approx 1/300$



$$-100m \leq N \leq 100m \rightarrow \varepsilon_N \approx 0.3m$$

$$-30'' \leq \xi, \eta \leq 30'' \rightarrow \varepsilon_{\xi, \eta} \approx 0.1''$$

- Ο όρος **σφαιρική προσέγγιση** δεν σημαίνει ότι οι υπολογισμοί κανονικού δυναμικού και κανονικής βαρύτητας γίνονται στη σφαίρα.
- Το ΕΕΠ παραμένει **επιφάνεια αναφοράς**, όπου και γίνονται οι υπολογισμοί.
- Οι σχέσεις σε σφαιρική προσέγγιση για τα  $T$ ,  $\Delta g$ ,  $N$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ , που δίνονται στη συνέχεια, υπολογίζονται στη συνοριακή επιφάνεια του γεωειδούς και στη συνέχεια το **γεωειδές προβάλλεται στη σφαίρα**

# ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

$$T_{r,\theta,\lambda} = \frac{kM}{r} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

$$\Delta g_{r,\theta,\lambda} = \frac{kM}{r^2} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} n-1 \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

$$N_{r,\theta,\lambda} = \frac{kM}{r\gamma} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

$$\xi_{r,\theta,\lambda} = - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \frac{\partial \bar{P}_{nm} \cos \theta}{\partial \theta}$$

$$\eta_{r,\theta,\lambda} = - \frac{1}{\cos \phi} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n -\bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda m \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

# ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

$\bar{C}_{nm}$  } Μοντέλα συντελεστών σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων  
 $\bar{S}_{nm}$  } Ομάδες συντελεστών του δυναμικού έλξης

- Smithsonian Standard Earth – SSE
- Ohio State University - OSU
- GSFC (Goddard Space Flight Center) / NASA
- Texas University – USA
- GeoForschungZentrum / Potsdam / Germany
- Institut fur Erdmessung / Hannover / Germany
- NIMA (National Imaging and Mapping Agency) / USA
- NGS (National Geospatial Imaging Service) / USA

# ΓΕΩΔΥΝΑΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Μοντέλο	$n, m$	Δεδομένα	Εύρος επίγειων δεδομένων	Έτος
GEM9	20	Δορυφορικά	—	1977
GEM10	36	GEM10 + Δορ.αλτ. ( $\Delta g$ )	$5^0$	1979
GEM-L2	20	GEM9+LAGEOS	—	1982
GEM-T2	36	GEM9+LAGEOS+χ.ά.δορυφ.	—	1989
GEM10B	36	GEM10 + Δορ.αλτ. (N)	$5^0$	1981
GEM10C	180	GEM10B + $\Delta g$	$1^0$	1981
OSU81	180	GEM9 + $\Delta g$ + Δορ.αλτ. ( $\Delta g$ )	$1^0$	1981
OSU86D	180	GEM-L2 + $\Delta g$ + Δορ.αλτ. ( $\Delta g$ )	$1^0$	1986
OSU89B	360	GEM-T2 + $\Delta g$ + Δορ.αλτ. ( $\Delta g$ )	$0.5^0$	1989
OSU91A	360	GEM-T2 + $\Delta g$ + Δορ.αλτ. ( $\Delta g$ )	$0.5^0$	1991
JGM-1	70	Δορυφορικά + $\Delta g$ + Δορ.αλτ. (N)	$1^0$	1994
JGM-2	70	JGM-1 + τροχ. TOPEX	$1^0$	1994
JGM-3	70	JGM-1 + Δορυφορικά	—	1996
GRIM2	30	GRIM1 + Δορυφορικά + $\Delta g$	$5^0$	1976
GRIM3B	36	GRIM3+LAGEOS	$1^0$	1983
GRIM4-C3	60	GRIM4-S3 + $\Delta g$ + Δορ.αλτ. (N)	$1^0$	1993
GRIM4-C4	72	GRIM4-S4 + $\Delta g$ + Δορ.αλτ. (N)	$1^0$	1997
GFZ93A	360	GRIM4-C3 + $\Delta g$ + Δορ.αλτ. (N)	$0.5^0$	1993
GFZ93B	360	GRIM4-C3 + $\Delta g$ + Δορ.αλτ. (N)	$0.5^0$	1993
GFZ95A	360	GRIM4-C4 + $\Delta g$ + Δορ.αλτ. (N)	$0.5^0$	1995

Εικόνα 9



# ΓΕΩΔΥΝΑΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Μοντέλο	$n, m$	Δεδομένα	Εύρος επίγειων δεδομένων	Έτος
GPM2	200	GEM-L2+ $\Delta g$ + $\Delta\sigma\rho$ .αλτ.(N)	1 <sup>0</sup>	1985
GPM98A	1800	GEM-L2+ $\Delta g$ + $\Delta\sigma\rho$ .αλτ.(N)	5'	1998
GPM98B	1800	GEM-L2+ $\Delta g$ + $\Delta\sigma\rho$ .αλτ.(N)	5'	1998
EGM96	360	$\Delta\sigma\rho\upsilon\phi$ .+ $\Delta g$ + $\Delta\sigma\rho$ .αλτ.( $\Delta g$ )	0.5 <sup>0</sup>	1996
EIGEN-01S	120	CHAMP	–	2002
GGM-01C	200	GRACE + $\Delta g$	~ 1 <sup>0</sup>	2003
GRACE-01S	140	GRACE	–	2003
EIGEN-03S	140	CHAMP	–	2004
EIGEN-02S	150	GRACE	–	2004
EIGEN-CG01C	360	CHAMP+GRACE + $\Delta g$ + $\Delta\sigma\rho$ .αλτ.( $\Delta g$ )	1 <sup>0</sup>	2004
EIGEN-CG03C	360	CHAMP+GRACE + $\Delta g$ + $\Delta\sigma\rho$ .αλτ.( $\Delta g$ )	1 <sup>0</sup>	2005
EIGEN-GL04C	360	CHAMP+GRACE + $\Delta g$ + $\Delta\sigma\rho$ .αλτ.( $\Delta g$ )	1 <sup>0</sup>	2005

Εικόνα 10

&

EGM2008 2190 CHAMP+GRACE 5' 2008  
+ $\Delta g$ + $\Delta\sigma\rho$ .αλτ.( $\Delta g$ )

- EGM96 – Earth Geopotential Model 1996
- Πλήρες σε βαθμό και τάξη 360 (nxm)=(360x360)
- Μέσες τιμές ανωμαλιών βαρύτητας  $\Delta g$  30'x30'

## Παράμετροι ελλειψοειδούς/Συστήματος αναφοράς

$$kM = 3986004.415 \times 10^8 \text{ [cm}^3 \text{sec}^{-2}\text{]}$$

$$\omega = 7292115 \times 10^{-11} \text{ radsec}^{-1}$$

$$a = 6378136.3 \text{ m}$$

$$b = 6356751.6 \text{ m}$$

$$e^2 = 0.00669439810568$$

$$1/f = 298.256415099$$

$$\gamma_{eq} = 978032.758157 \text{ mGal}$$

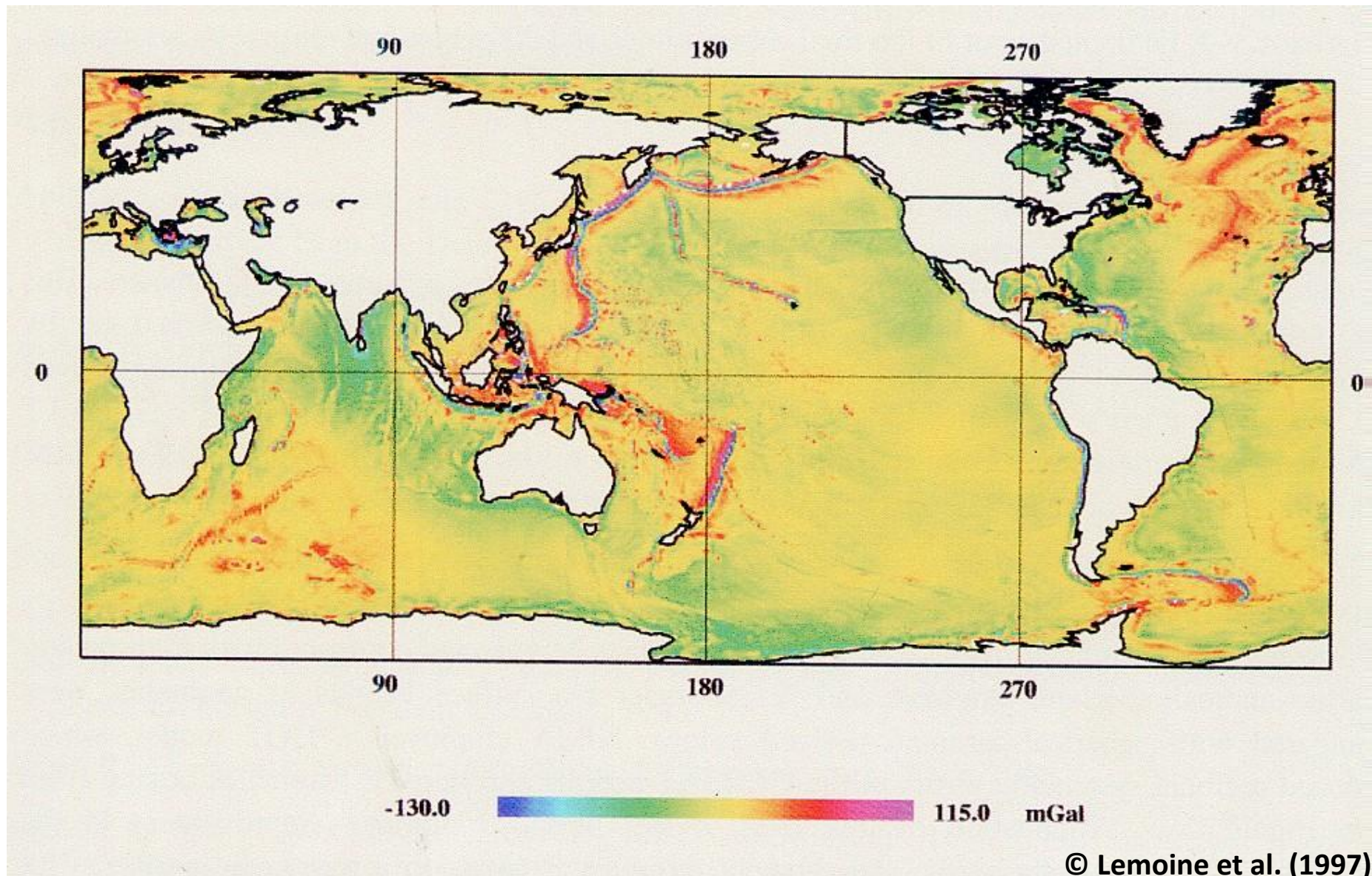
$$\gamma_p = 983218.707745 \text{ mGal}$$

# ΓΕΩΔΥΝΑΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ – EGM96

n	m	$\overline{C}_{nm}$	$\overline{S}_{nm}$	$\sigma\overline{C}_{nm}$	$\sigma\overline{S}_{nm}$
2	0	-4.8416537E-04		3.561063E-11	
2	1	-1.8698763E-10	1.1952801E-09	1.00000E-30	1.00000E-30
2	2	2.4391435E-06	-1.4001668E-06	5.37391E-11	5.43532E-11
3	2	9.0462776E-07	-6.1902594E-07	1.09623E-10	1.11828E-11
3	3	7.2107265E-07	1.4143562E-06	9.51562E-10	9.32850E-11
4	3	9.9077180E-07	-2.0092836E-07	8.46578E-11	8.26625E-11
4	4	-1.8856080E-07	3.0885316E-07	8.73153E-11	8.78528E-11
10	9	1.2549133E-07	-3.7651622E-08	9.04659E-11	9.09597E-11
10	10	1.0053863E-07	-2.4014844E-08	1.59640E-10	1.59565E-10
15	15	-1.9093053E-07	-4.7113942E-08	4.83064E-11	4.71337E-11
20	20	4.0144832E-09	-1.2045064E-08	3.67449E-10	3.67121E-10
36	36	0.4601464E-08	-0.5942453E-08	0.44653E-09	0.44731E-09
50	49	0.2270561E-08	-0.4598092E-08	0.44825E-09	0.44874E-09
50	50	0.5438521E-08	0.1480274E-08	0.47332E-09	0.47313E-09
180	179	-0.2401477E-09	-0.2113737E-09	0.18781E-09	0.18780E-09
180	180	-0.4065727E-09	-0.5877261E-09	0.18849E-09	0.18849E-09
200	200	-0.6725117E-10	-0.1518175E-09	0.16511E-09	0.16500E-09
250	249	-0.7006286E-09	0.1718826E-09	0.12048E-09	0.12051E-09
250	250	-0.2928266E-09	-0.2017245E-09	0.12079E-09	0.12082E-09
360	359	0.1839716E-10	-0.3101236E-10	0.50033E-10	0.50033E-10

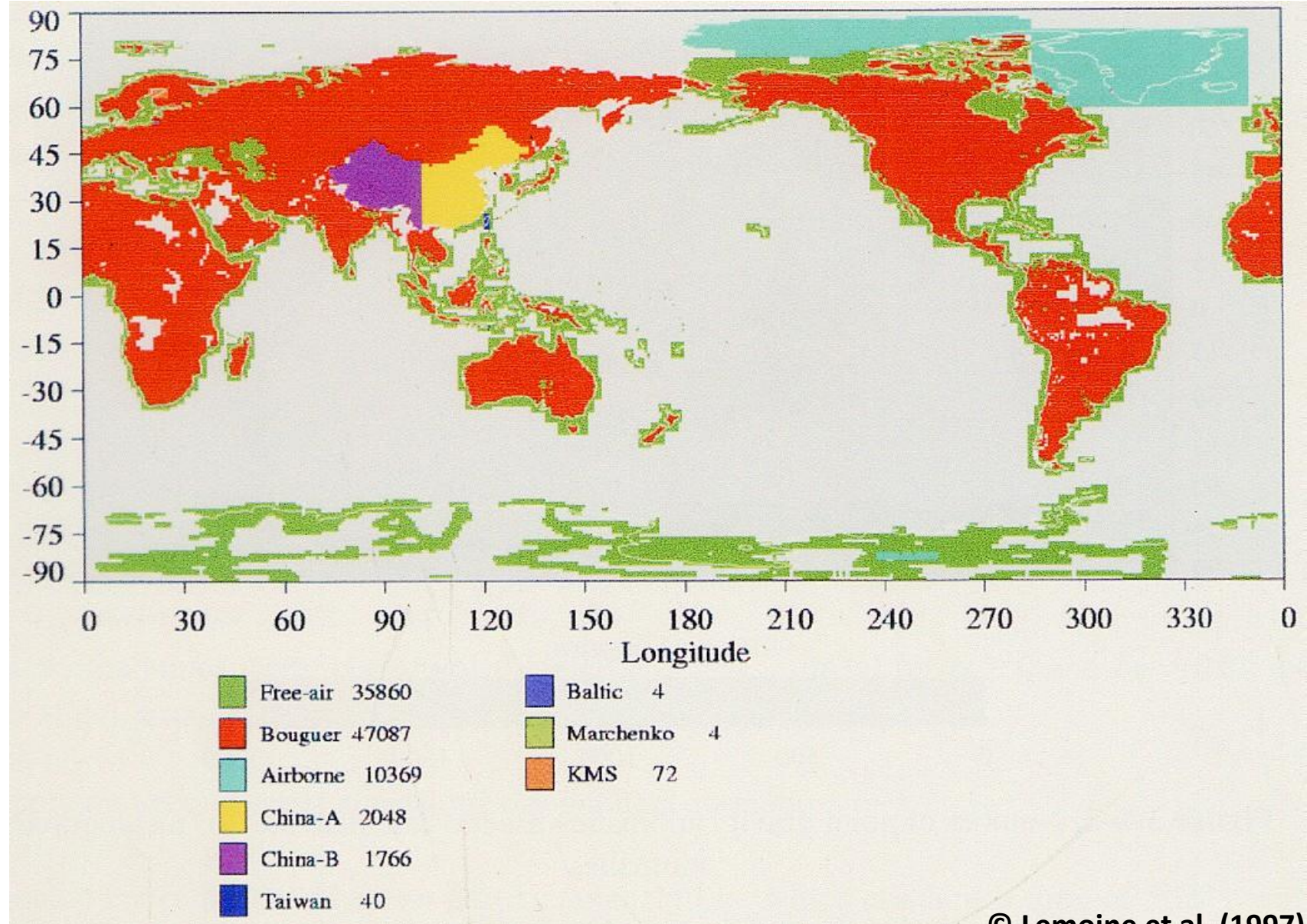
Εικόνα 11

# ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ – EGM96



Εικόνα 12

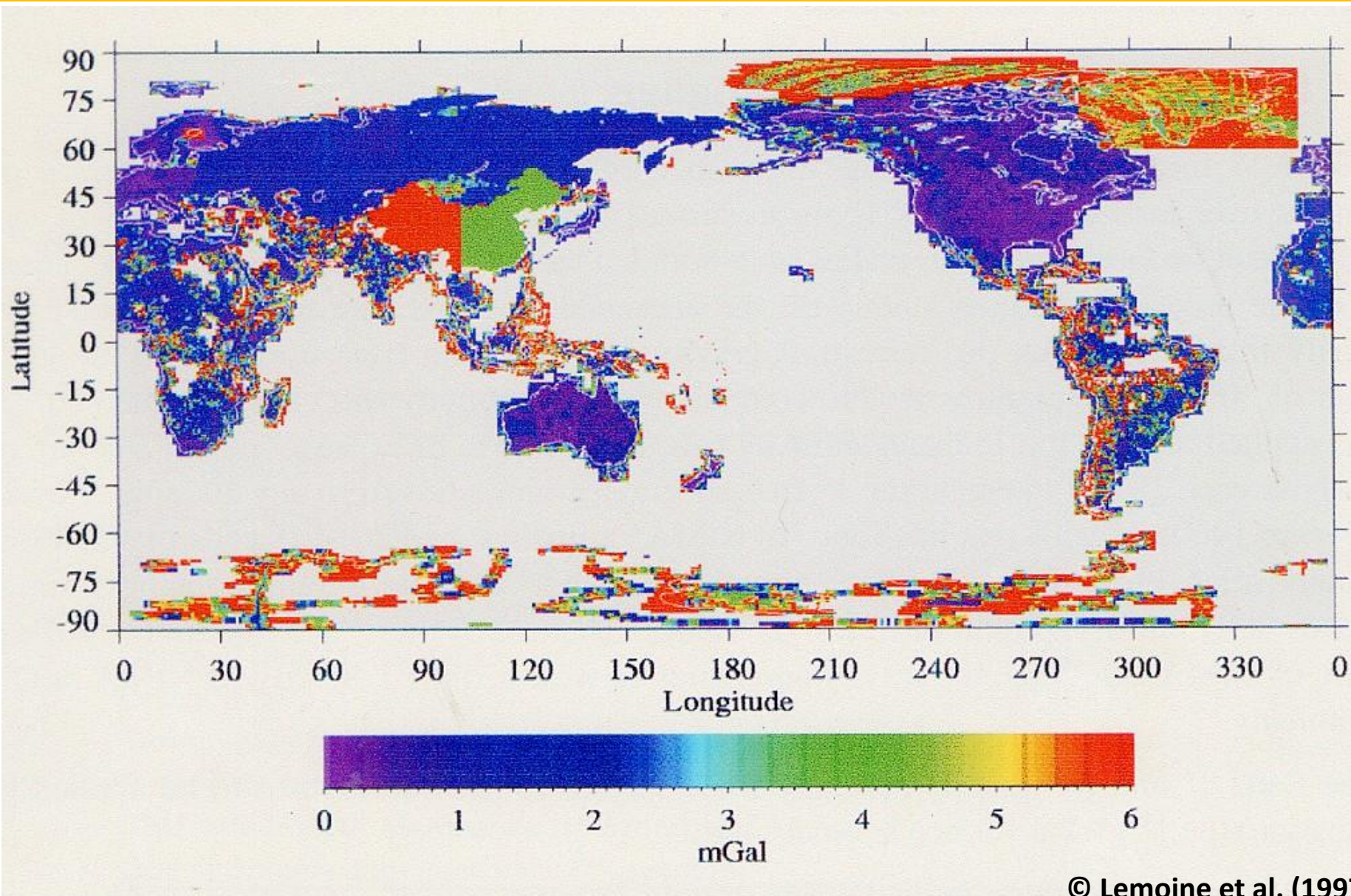
# ΕΠΙΓΕΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ – EGM96



Εικόνα 13

© Lemoine et al. (1997)

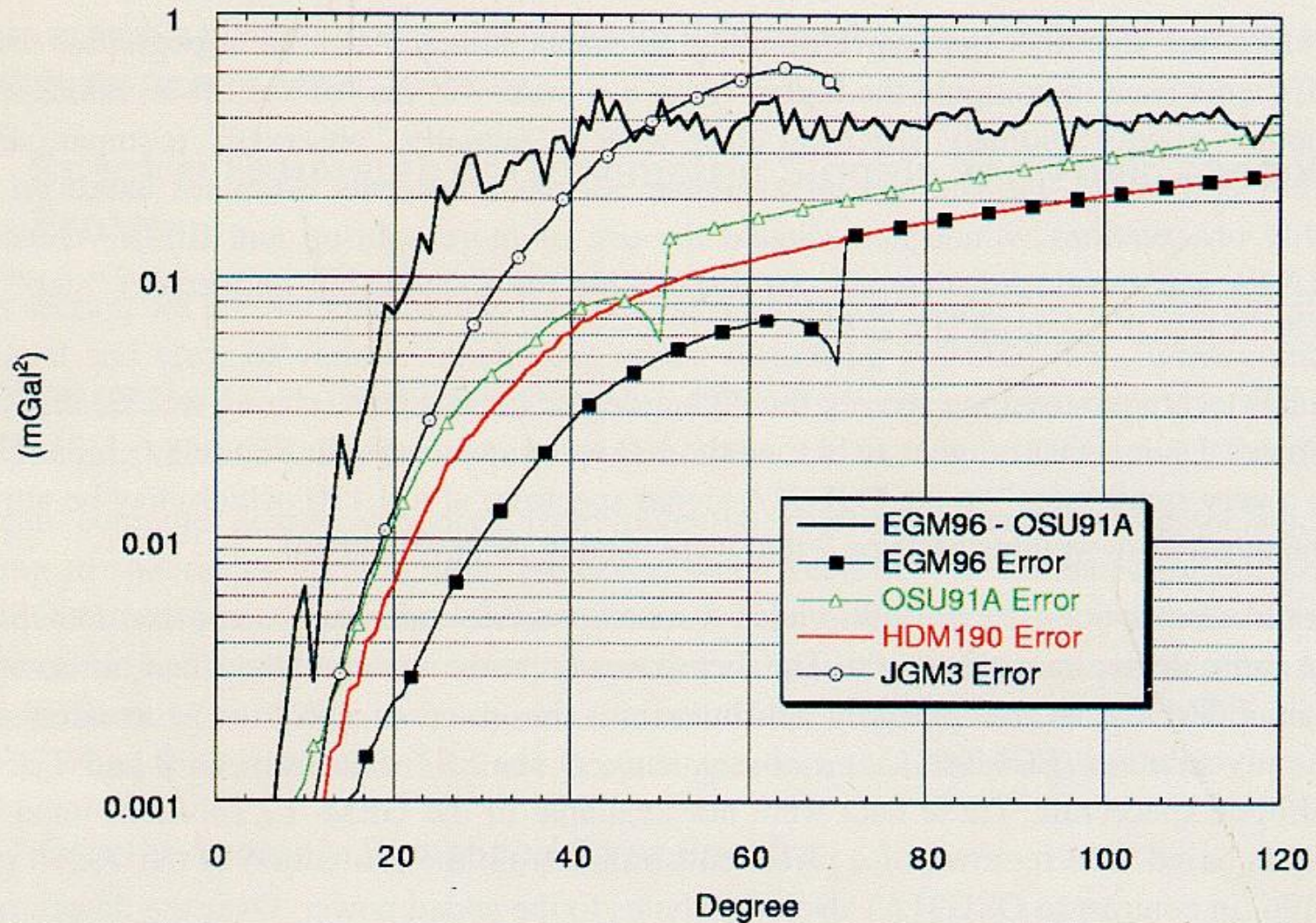
# ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΕΠΙΓΕΙΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ – EGM96



© Lemoine et al. (1997)

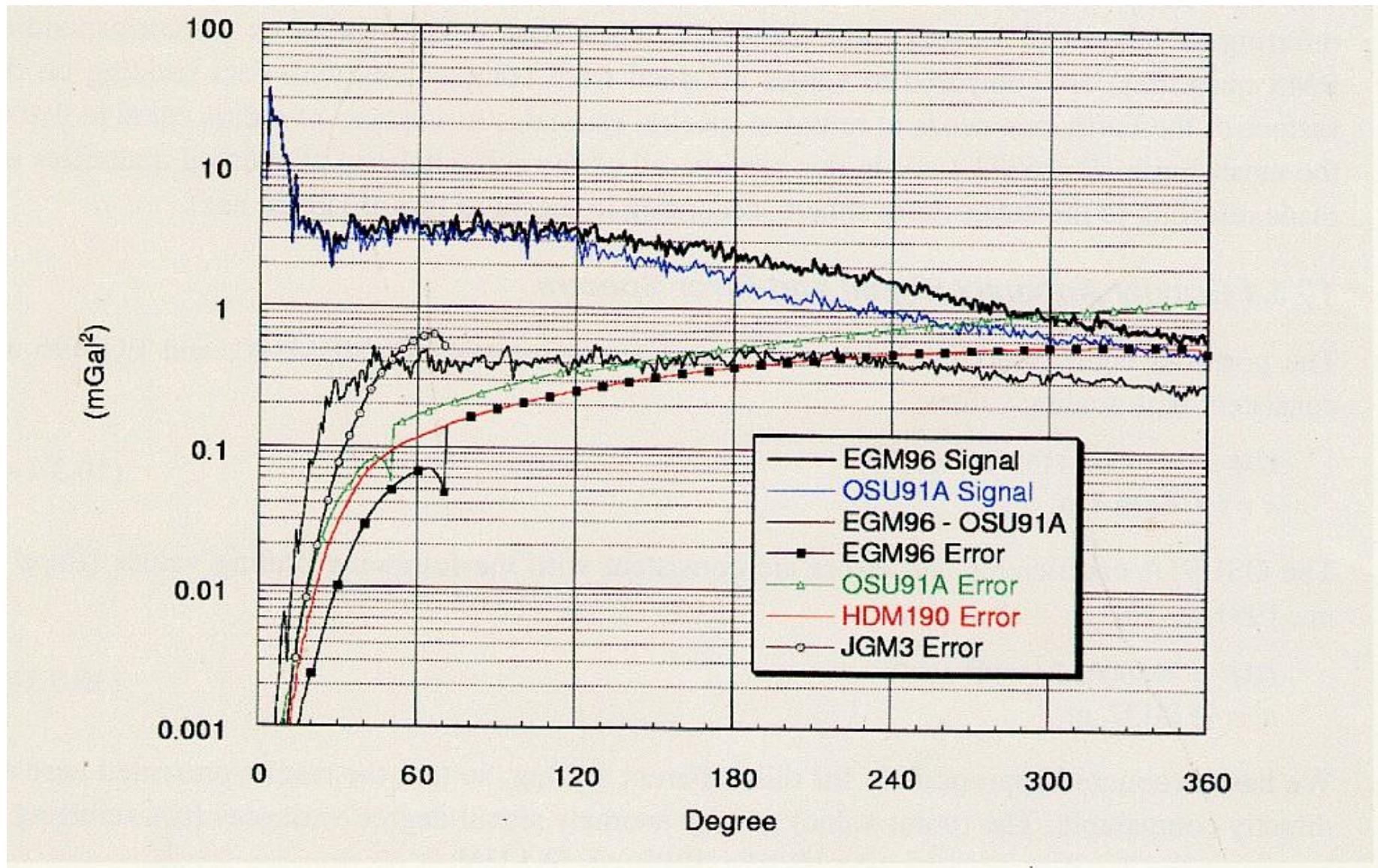
Εικόνα 14

# ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ – EGM96



Εικόνα 15

© Lemoine et al. (1997)



Εικόνα 16

© Lemoine et al. (1997)



- EGM08 – Earth Geopotential Model 2008
- Πλήρες σε βαθμό και τάξη 2190 (nxm)=(2190x2190)
- Μέσες τιμές ανωμαλιών βαρύτητας  $\Delta g$  5'x5'

## Παράμετροι ελλειψοειδούς/Συστήματος αναφοράς

$$kM = 3986004.415 \times 10^8 \text{ [cm}^3 \text{sec}^{-2} \text{]}$$

$$\omega = 7292115 \times 10^{-11} \text{ radsec}^{-1}$$

$$a = 6378136.3 \text{ m}$$

$$b = 6356751.6 \text{ m}$$

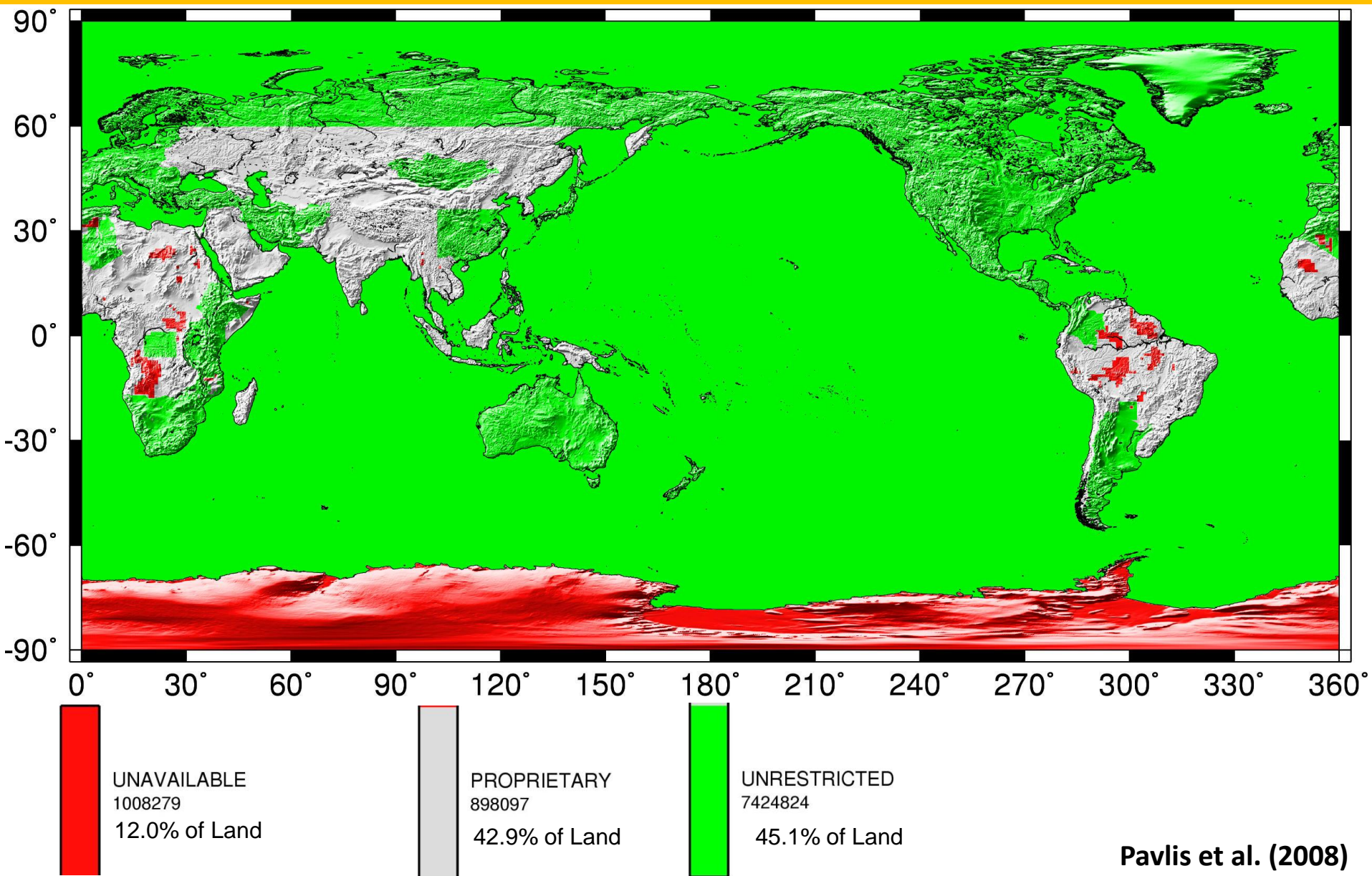
$$e^2 = 0.00669439810568$$

$$1/f = 298.256415099$$

$$\gamma_{eq} = 978032.758157 \text{ mGal}$$

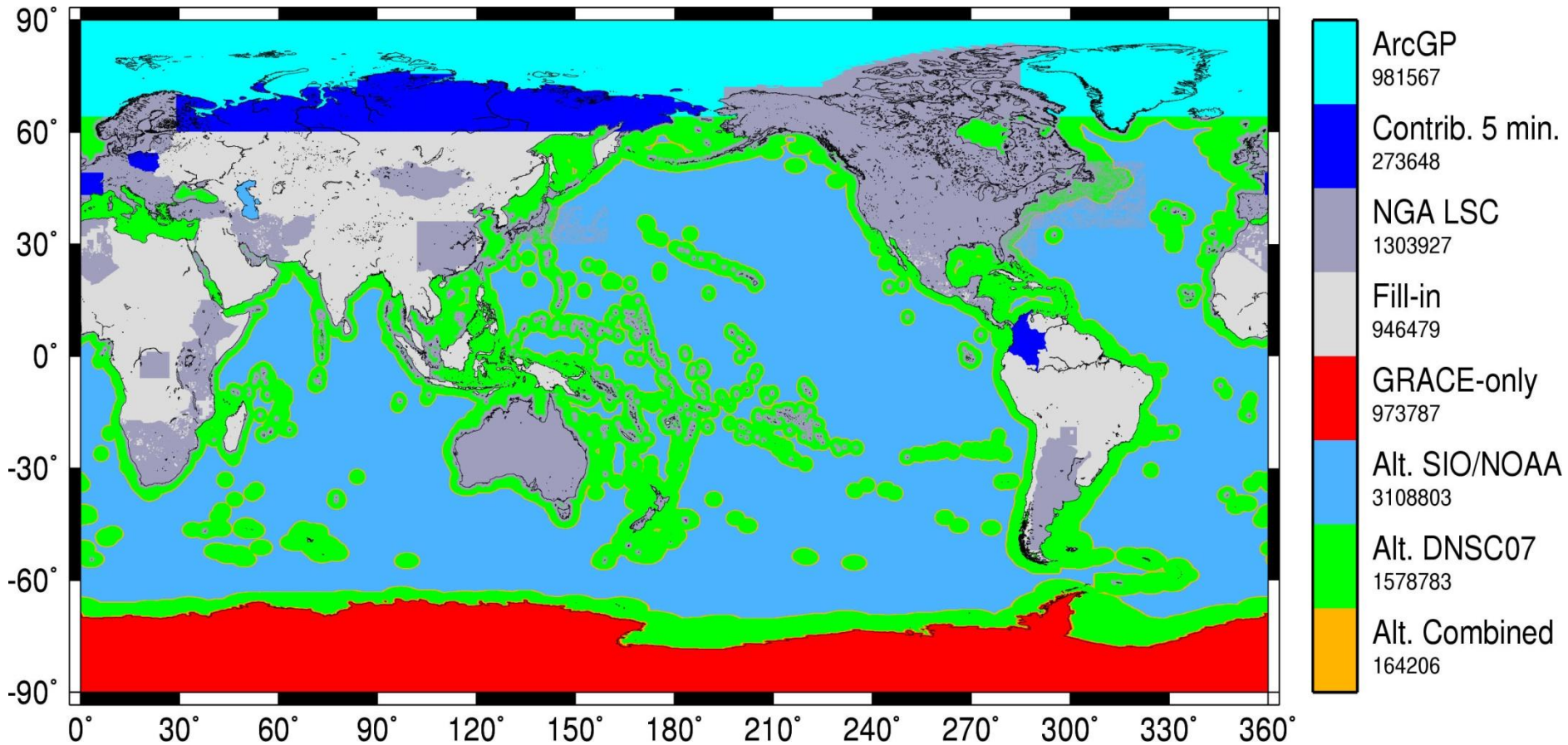
$$\gamma_p = 983218.707745 \text{ mGal}$$

# ΔΙΑΘΕΣΙΜΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ – EGM08



Εικόνα 17

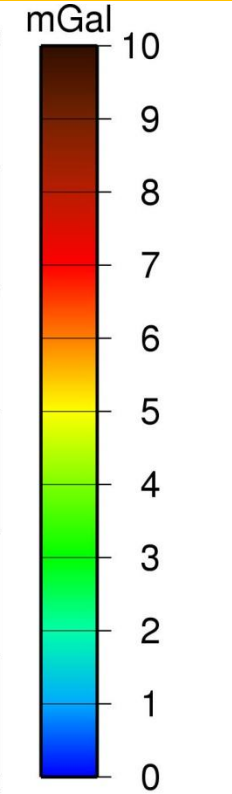
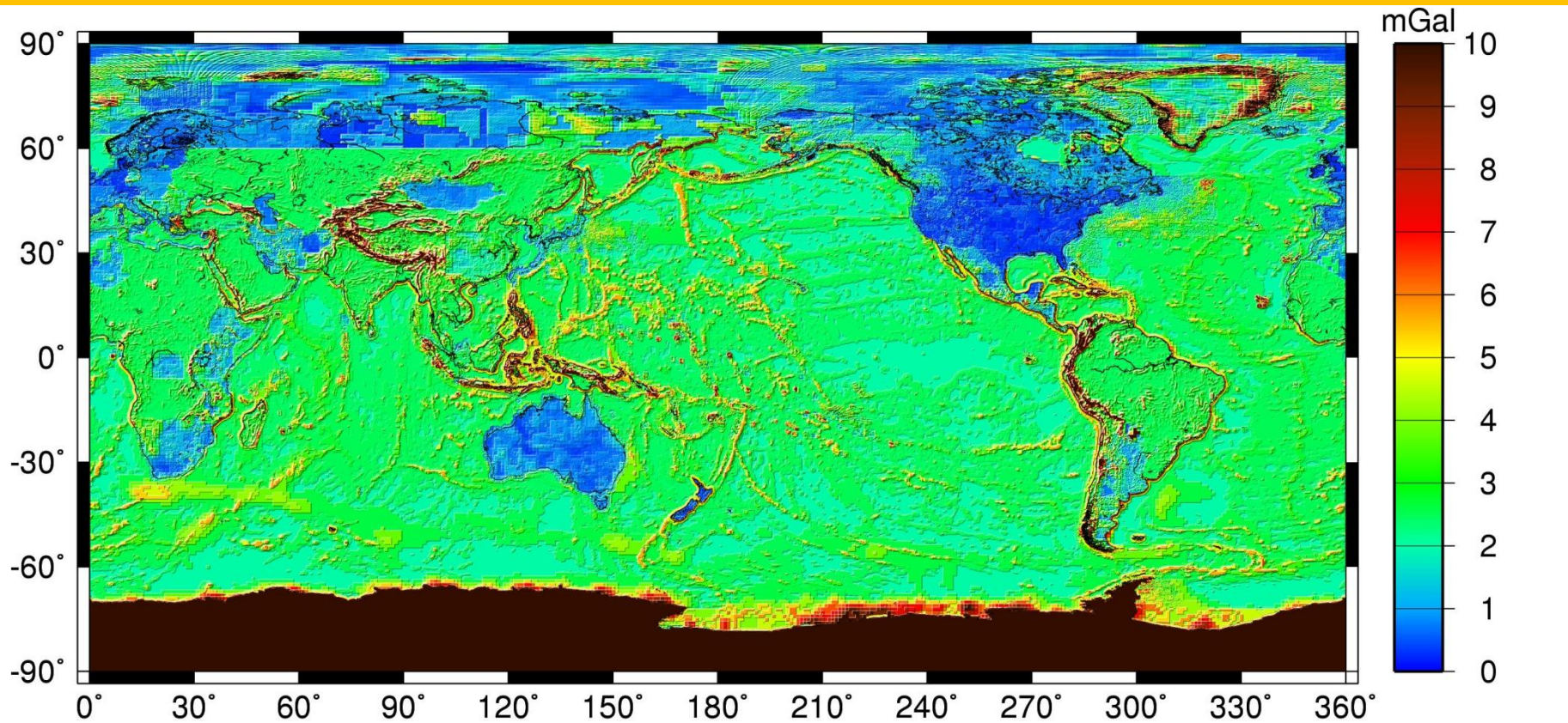
# ΠΗΓΕΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ – EGM08



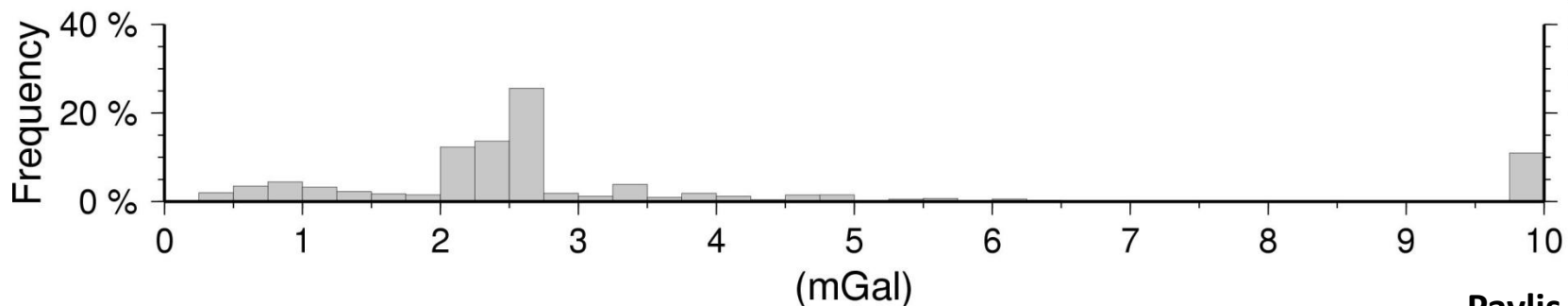
Εικόνα 18

Pavlis et al. (2008)

# ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΕΠΙΓΕΙΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ – EGM08



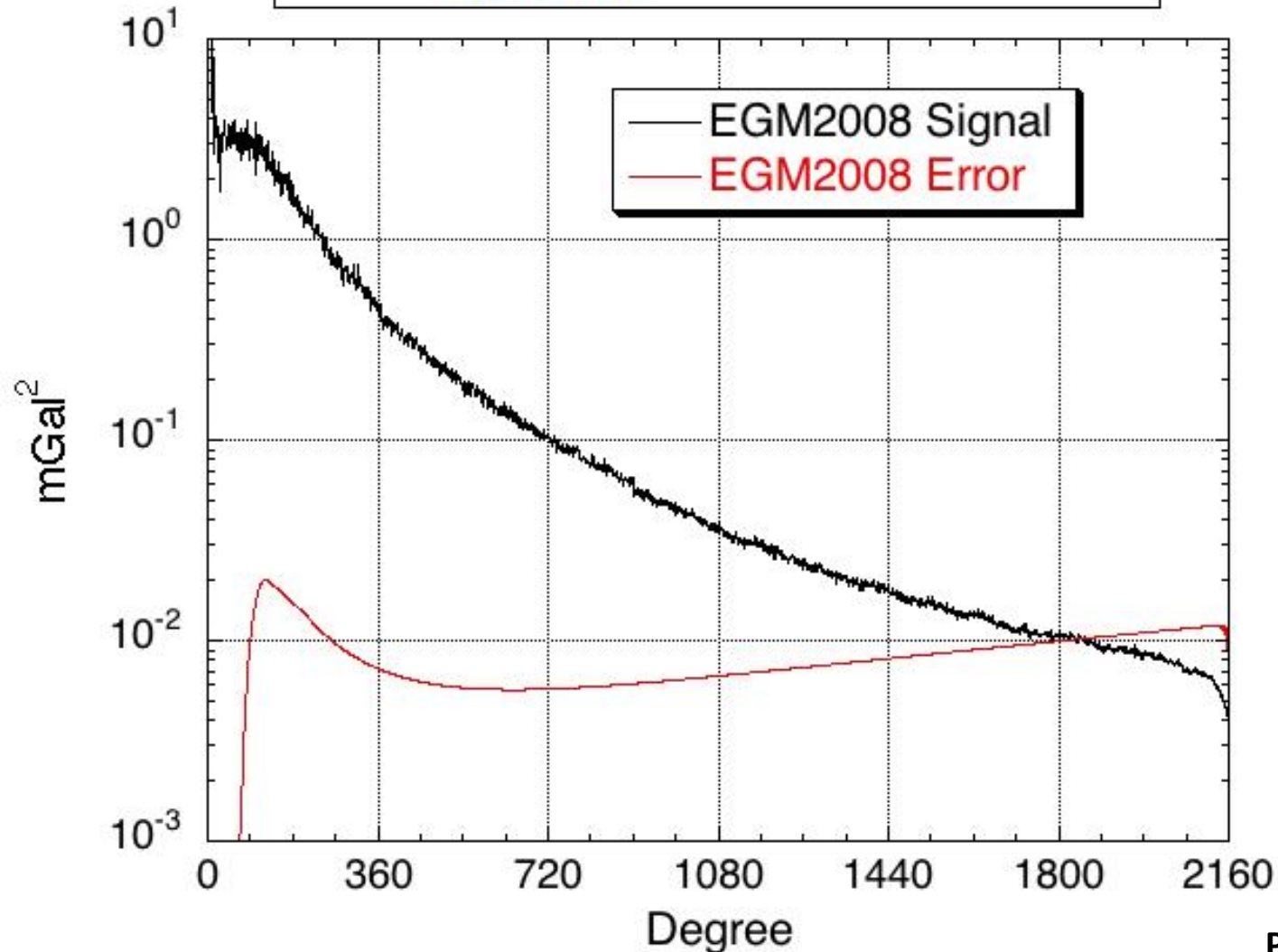
N = 9331200  
Min = 0.090  
Max = 75.450  
RMS = 4.069



Εικόνα 19

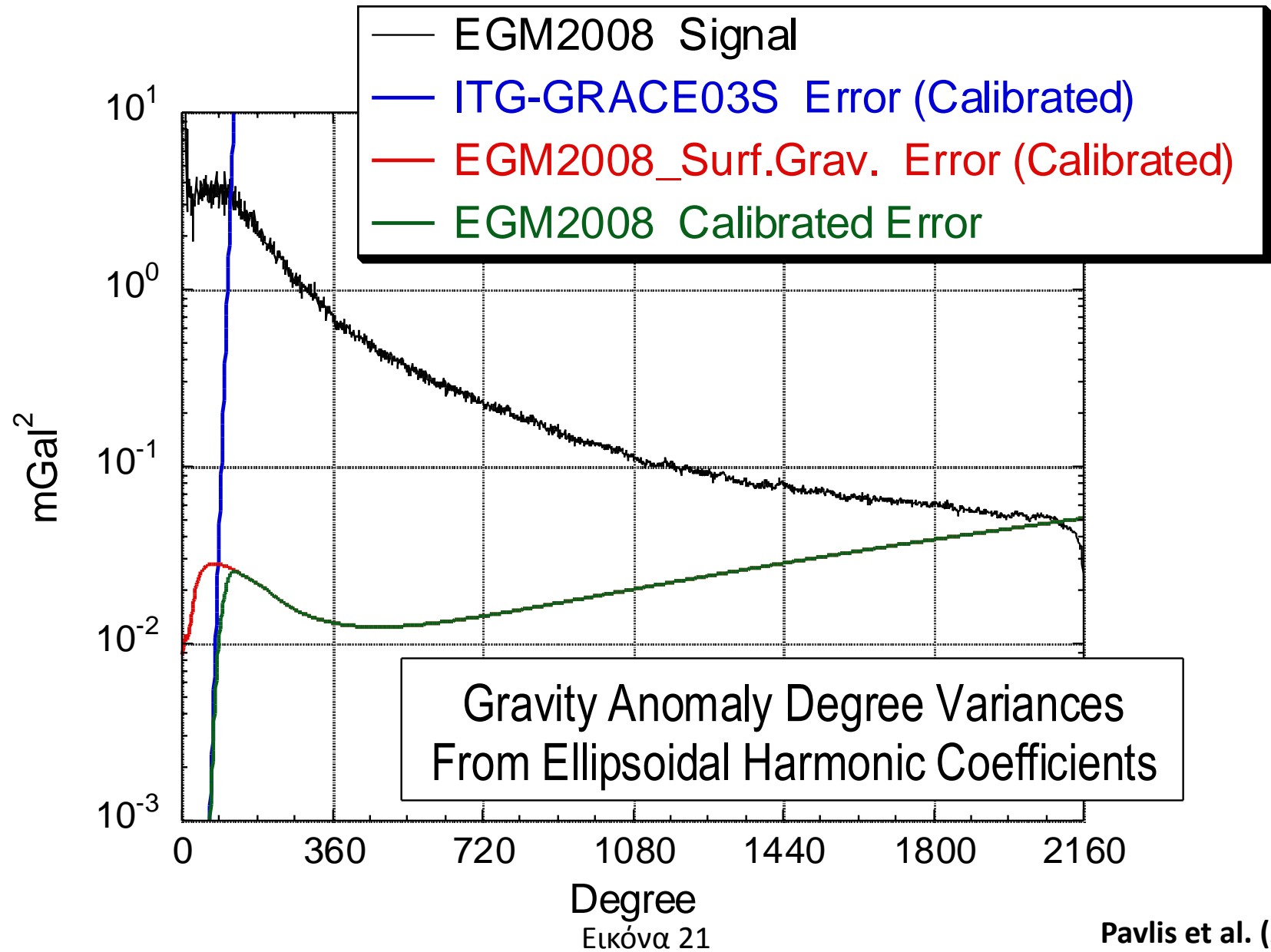
Pavlis et al. (2008)

Gravity Anomaly Degree Variances  
From **Spherical** Harmonic Coefficients



Pavlis et al. (2008)

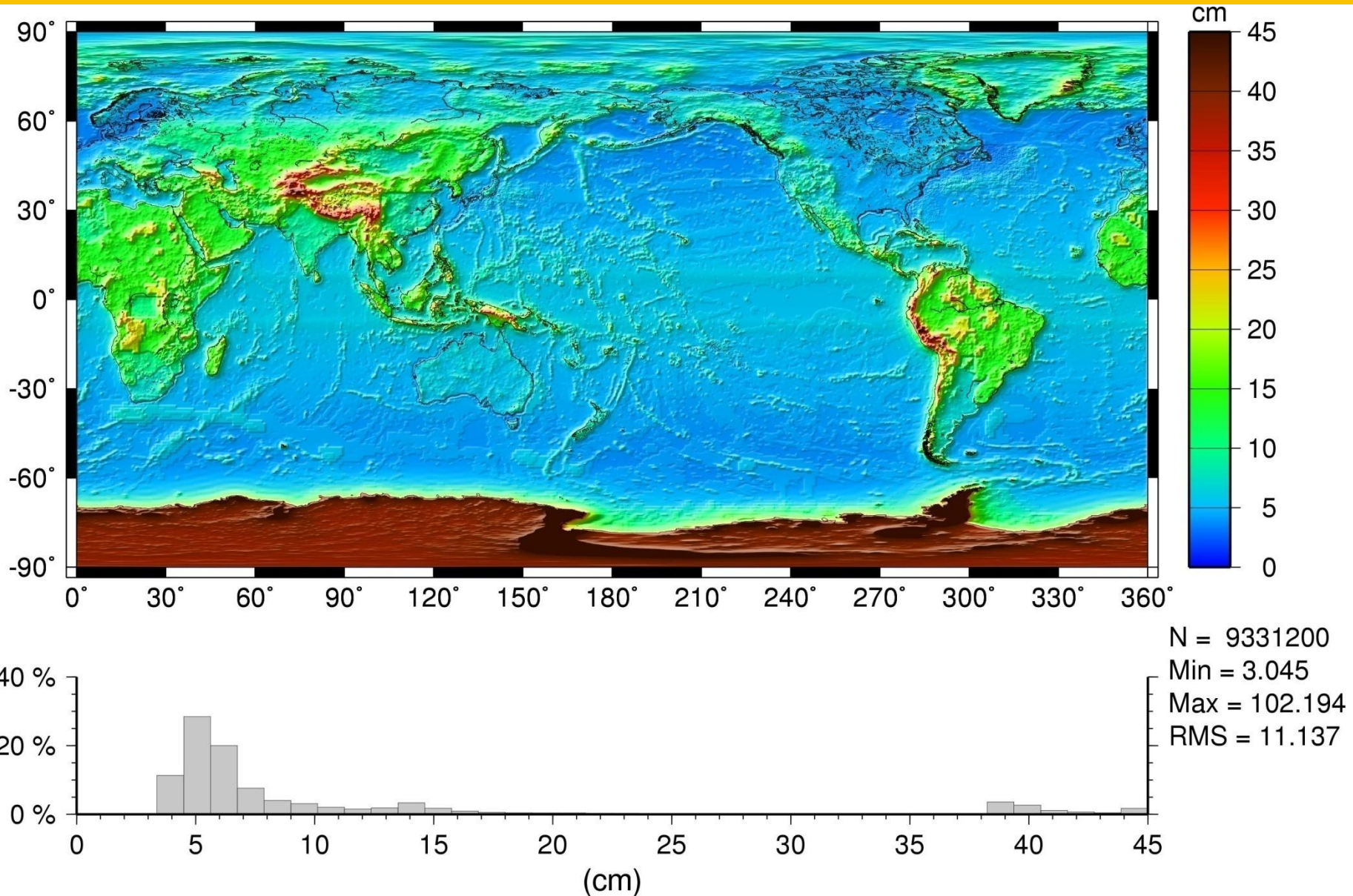
Εικόνα 20



Εικόνα 21

Pavlis et al. (2008)

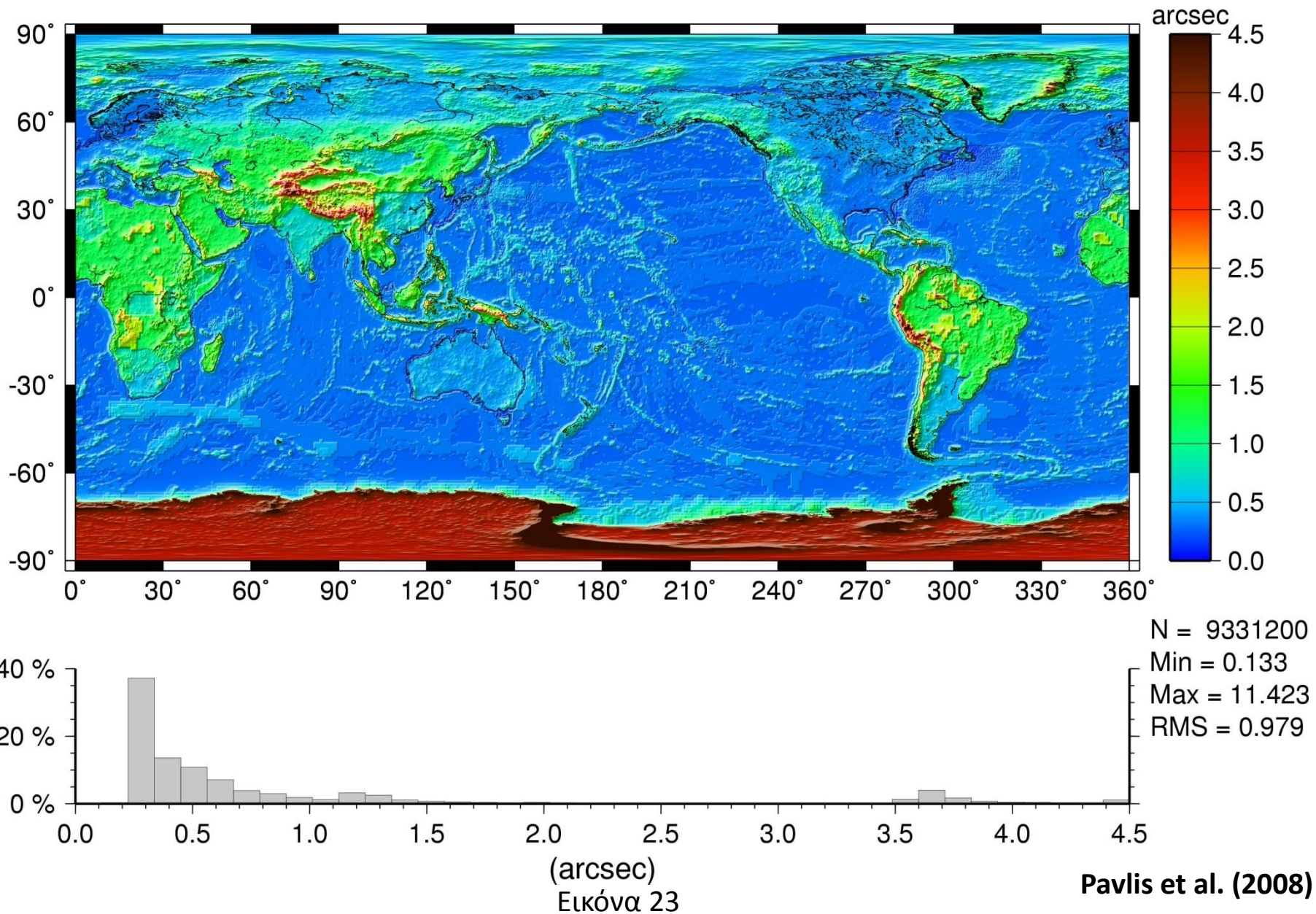
# ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΥΨΟΜΕΤΡΩΝ ΤΟΥ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ – EGM08



Εικόνα 22

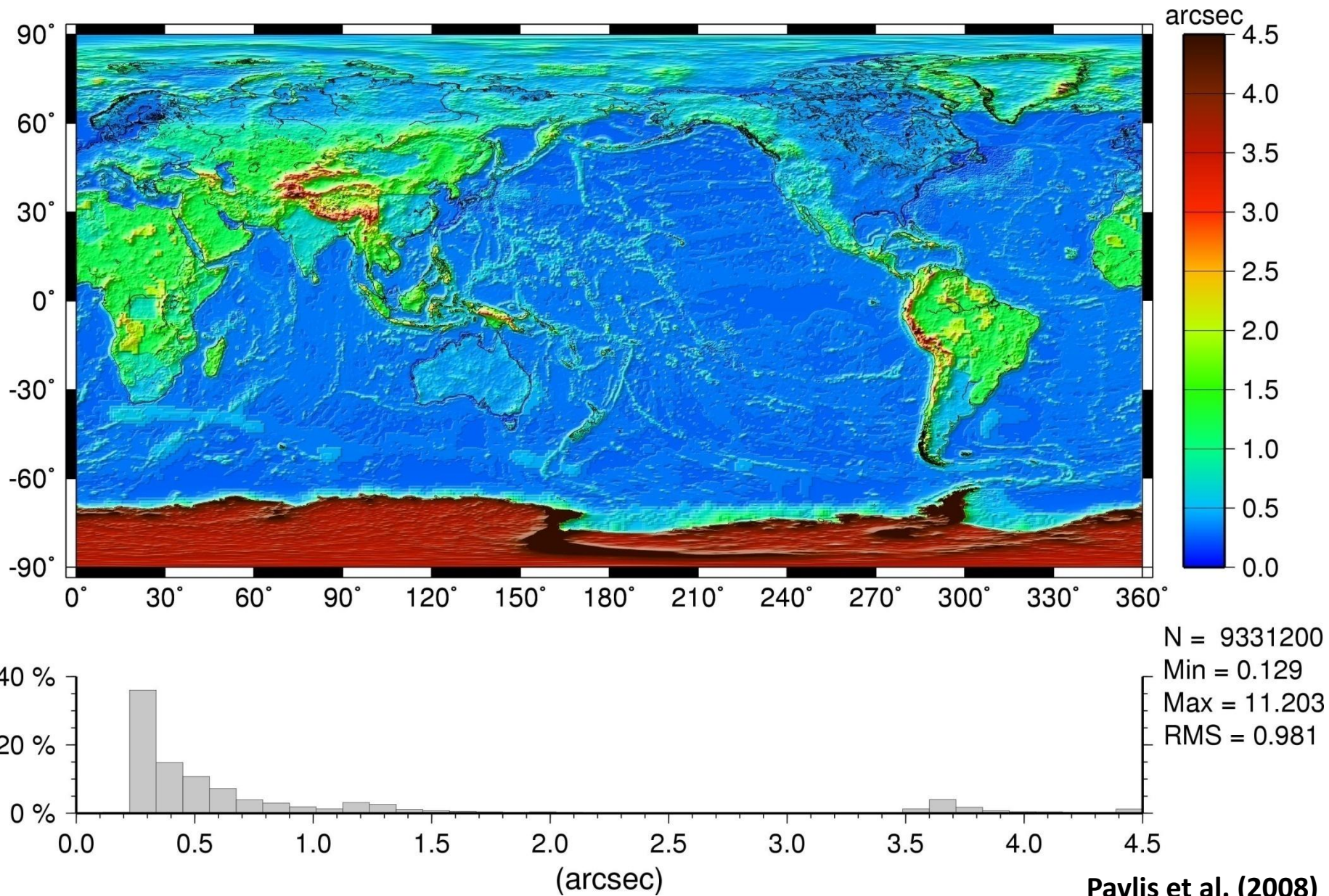
Pavlis et al. (2008)

# ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΣΥΝΙΣΤΩΣΑΣ $\xi$ – EGM08



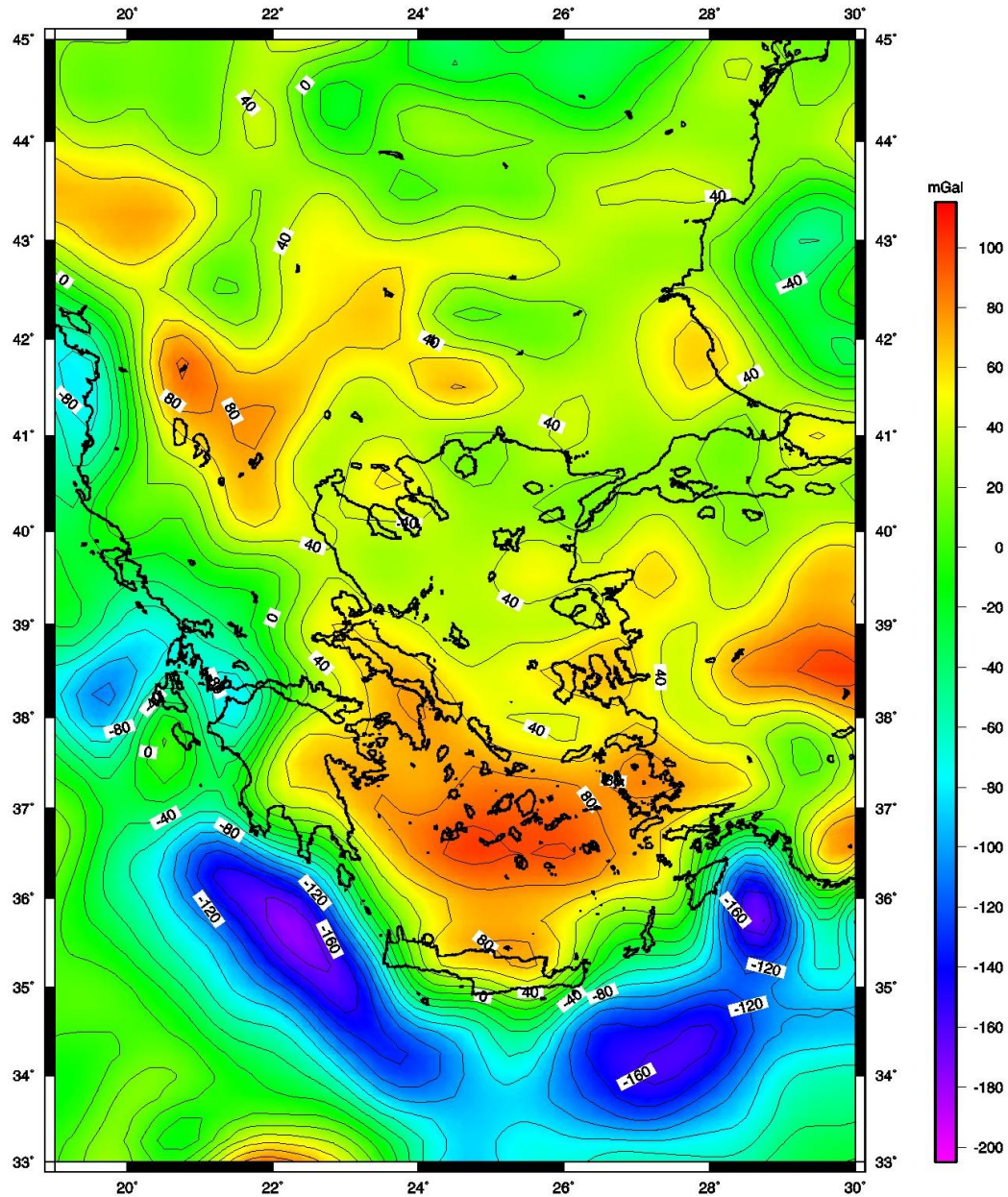


# ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΣΥΝΙΣΤΩΣΑΣ $\eta$ – EGM08



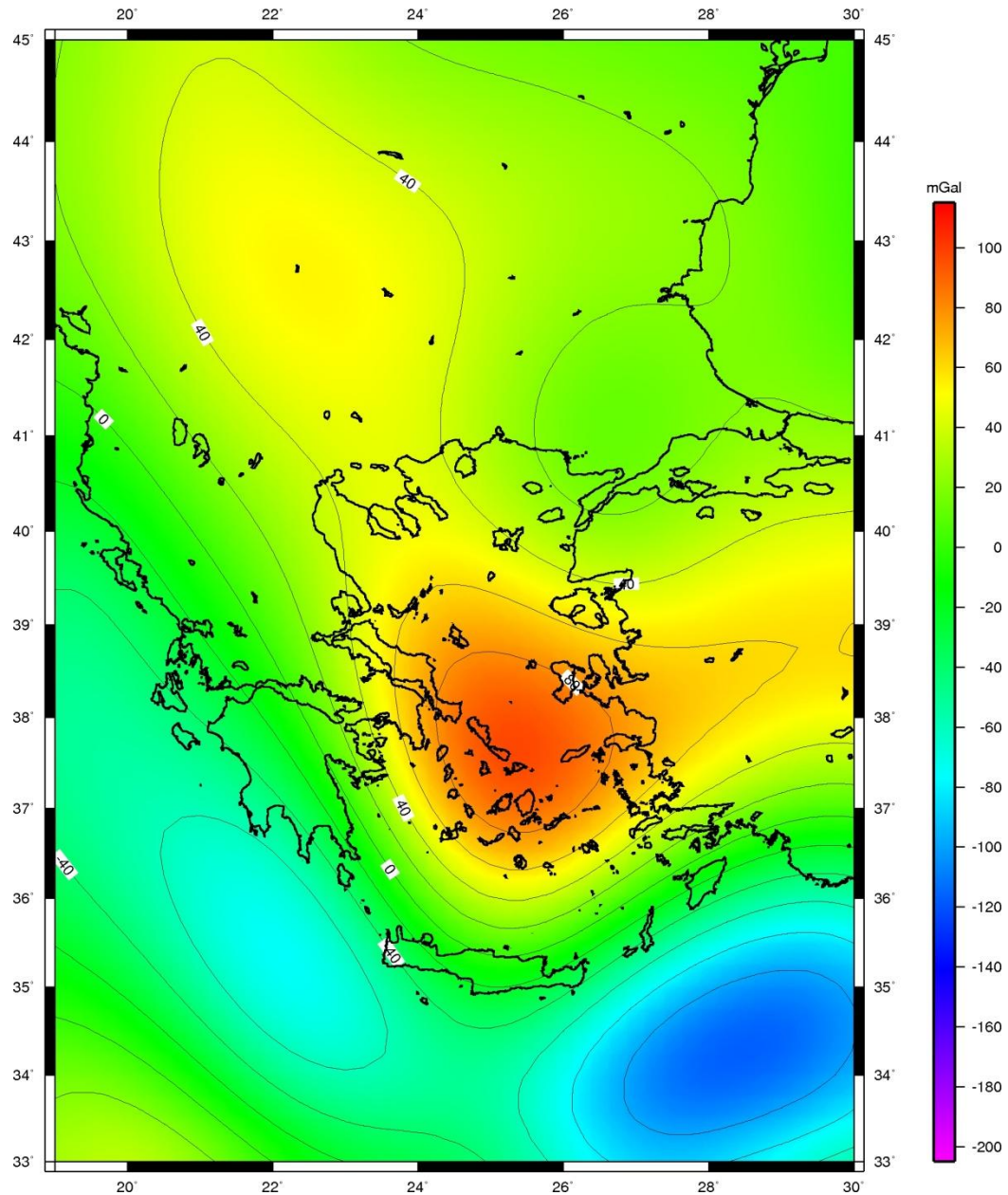
Εικόνα 24

# ΑΝΩΜΑΛΙΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ EGM96



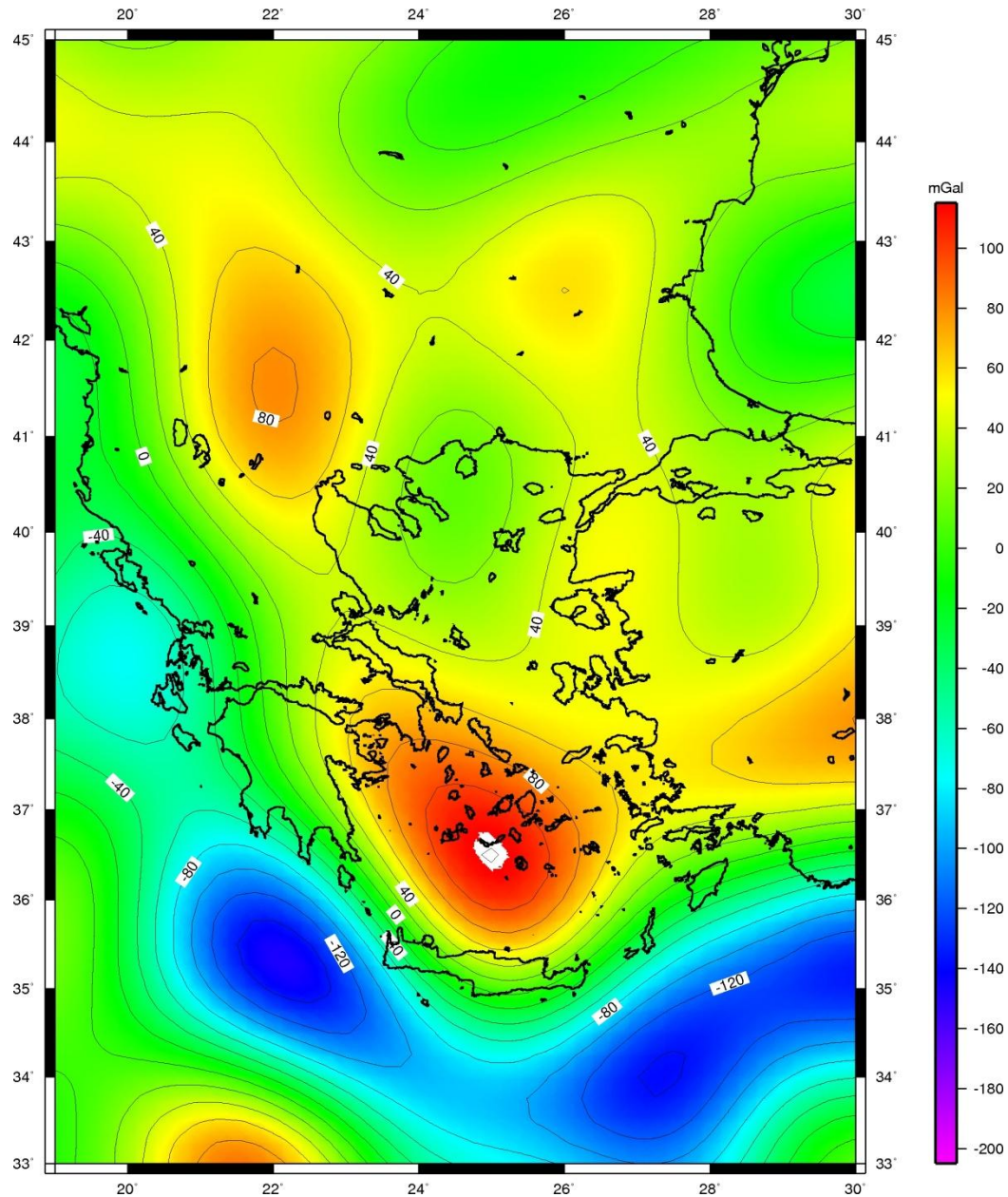
Εικόνα 25

# ΑΝΩΜΑΛΙΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΕΙΓΕΝ3p



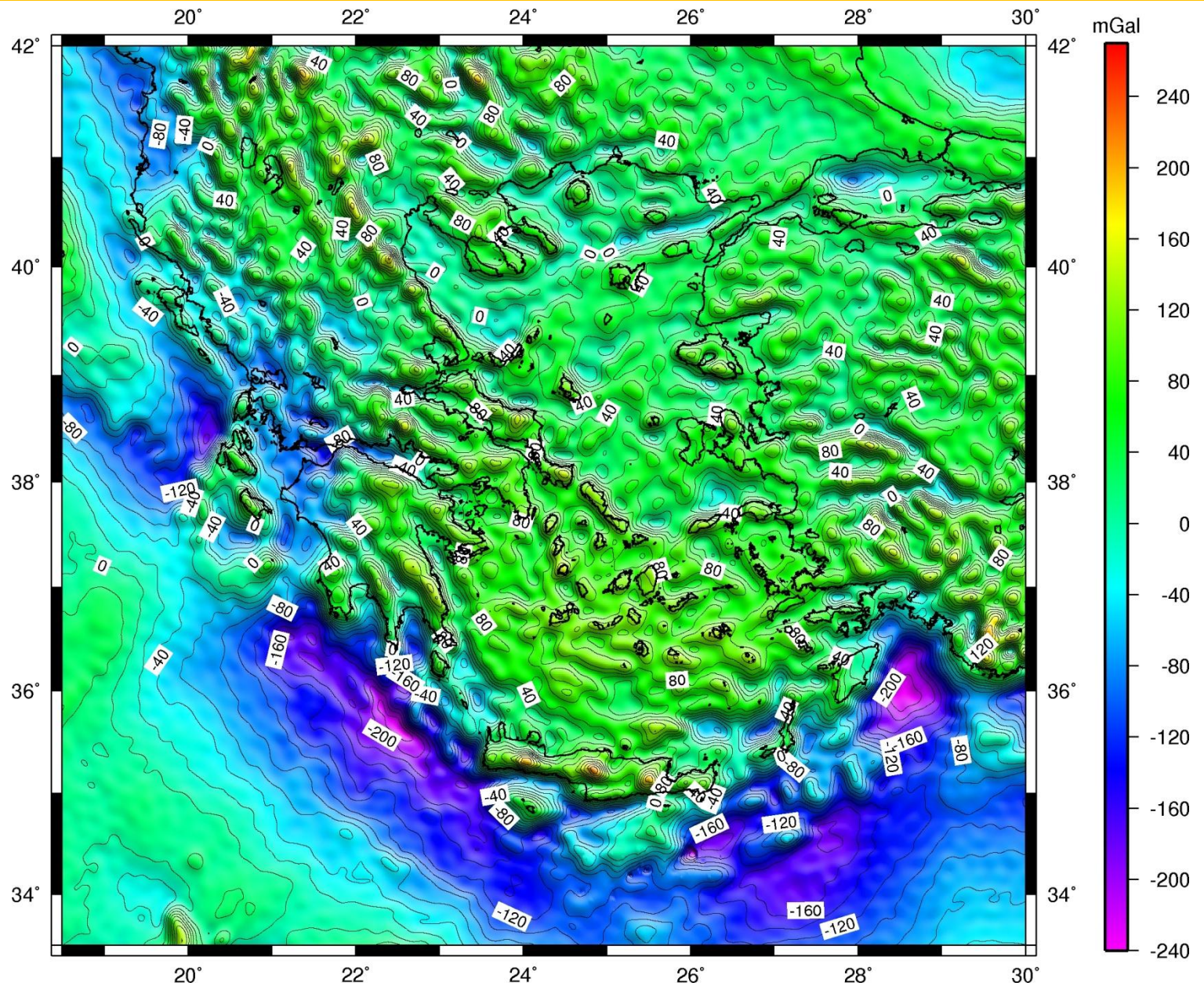
Εικόνα 26

# ΑΝΩΜΑΛΙΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ GGM01S



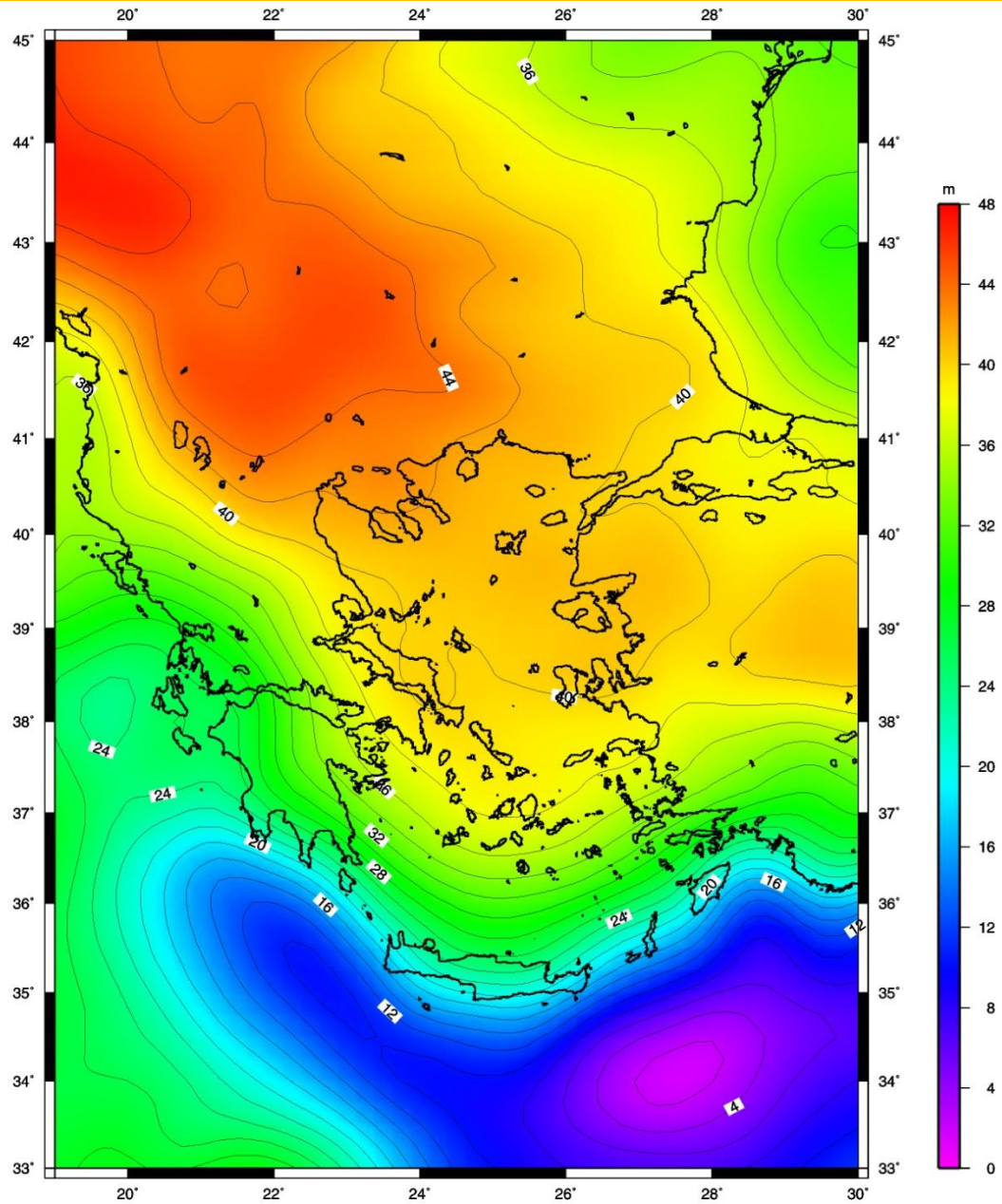
Εικόνα 27

# ΑΝΩΜΑΛΙΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ EGM2008



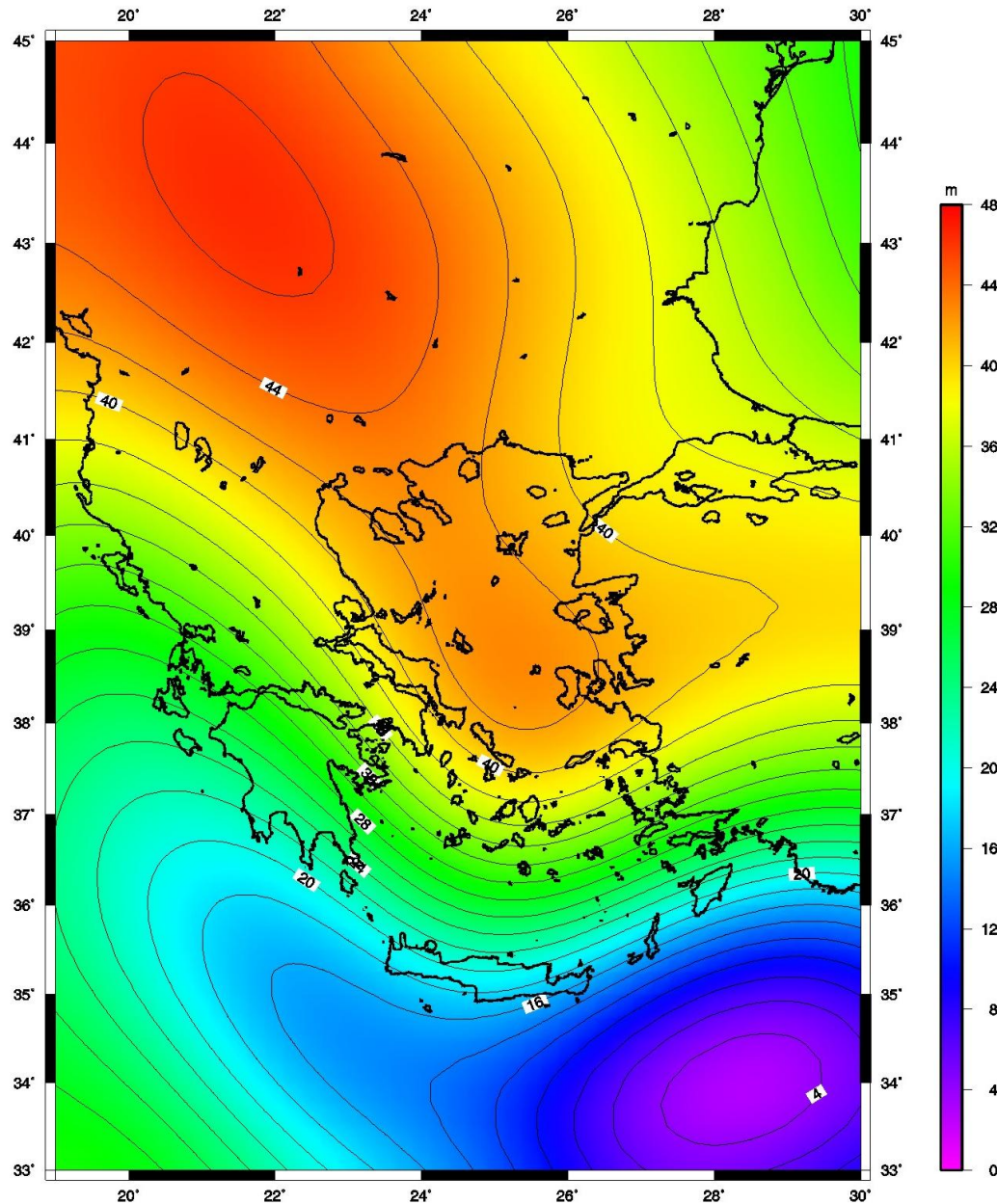
Εικόνα 28

# ΥΨΟΜΕΤΡΑ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ EGM96



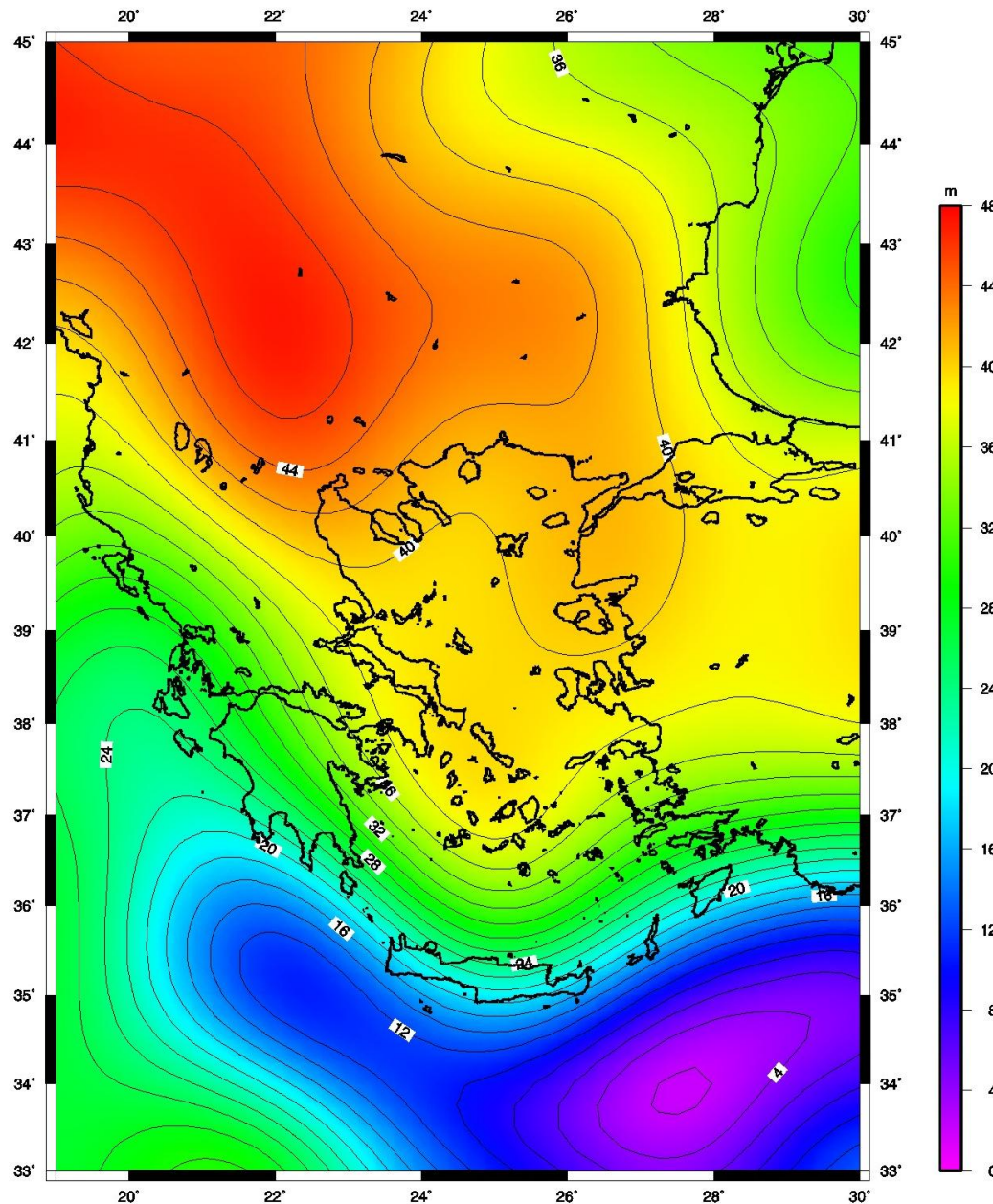
Εικόνα 29

# ΥΨΟΜΕΤΡΑ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ ΕΙΓΕΝ3ρ



Εικόνα 30

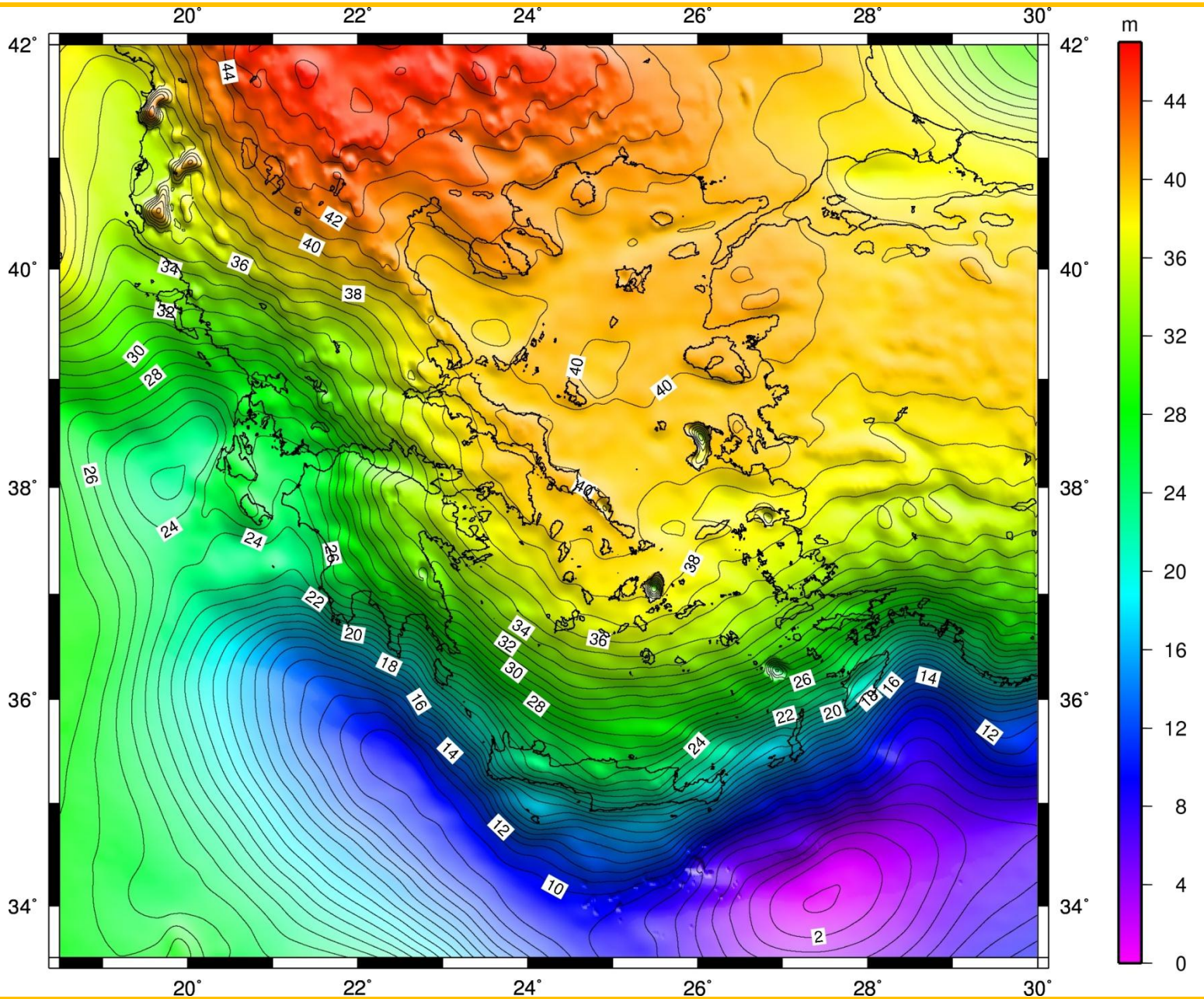
# ΥΨΟΜΕΤΡΑ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ GGM01S



Εικόνα 31

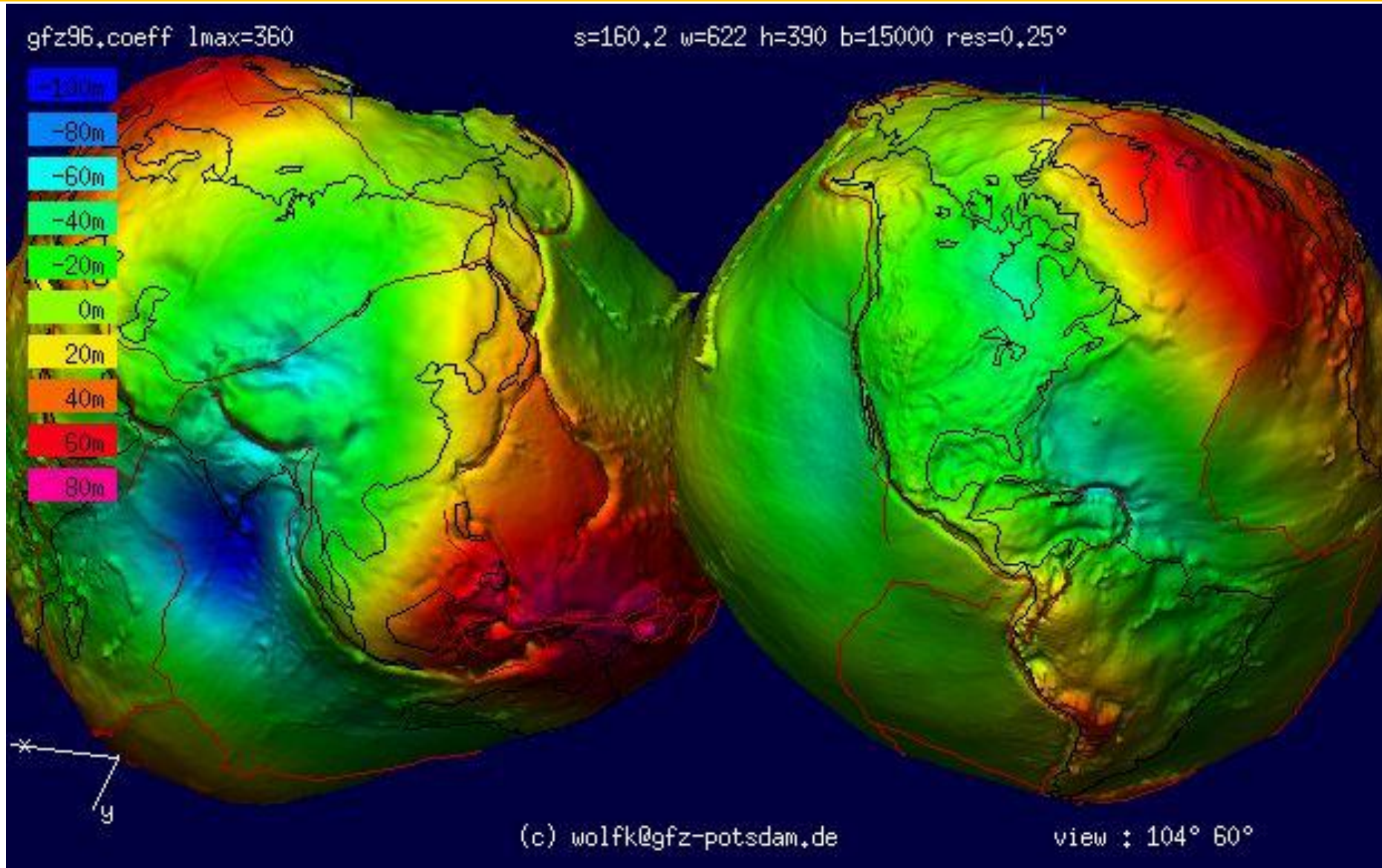


# ΥΨΟΜΕΤΡΑ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ EGM2008



Εικόνα 32

# ΤΟ ΓΕΩΕΙΔΕΣ ΑΠΟ ΤΑ ΓΕΩΔΥΝΑΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

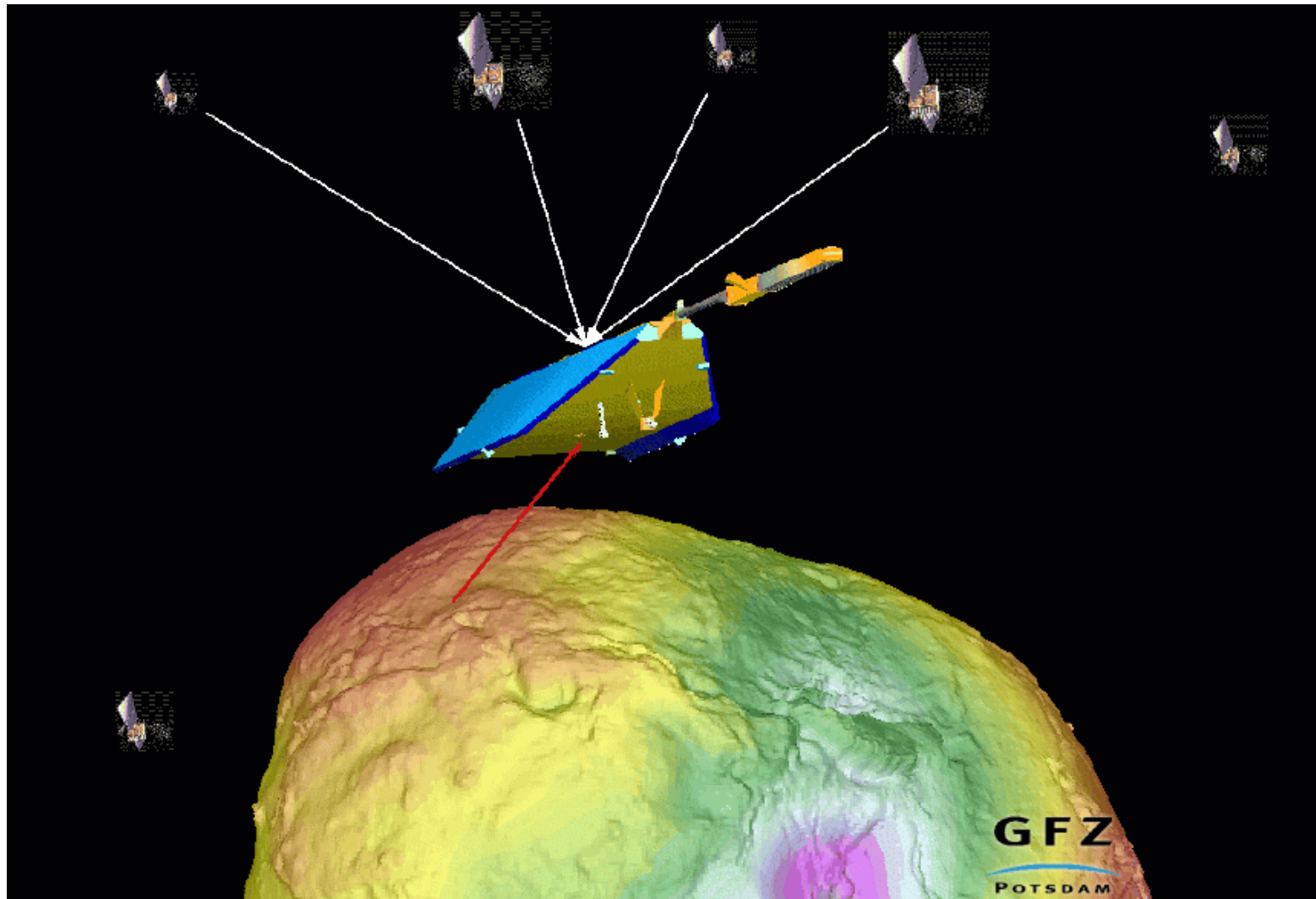


Εικόνα 33

[www.gfz-potsdam.de](http://www.gfz-potsdam.de)

# Η ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗ CHAMP ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

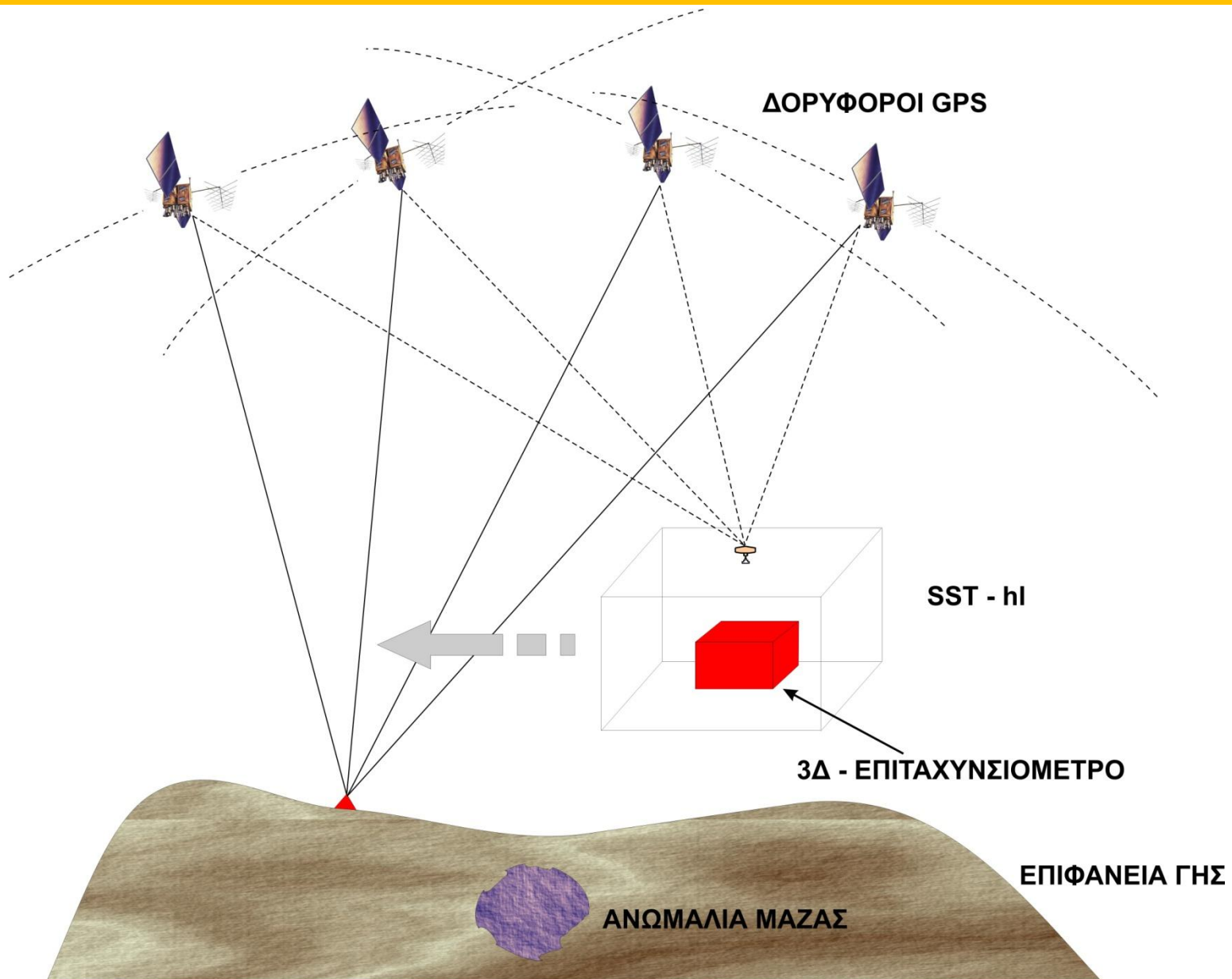
CHAMP - CHAllenging Mini-satellite Payload



Εικόνα 34

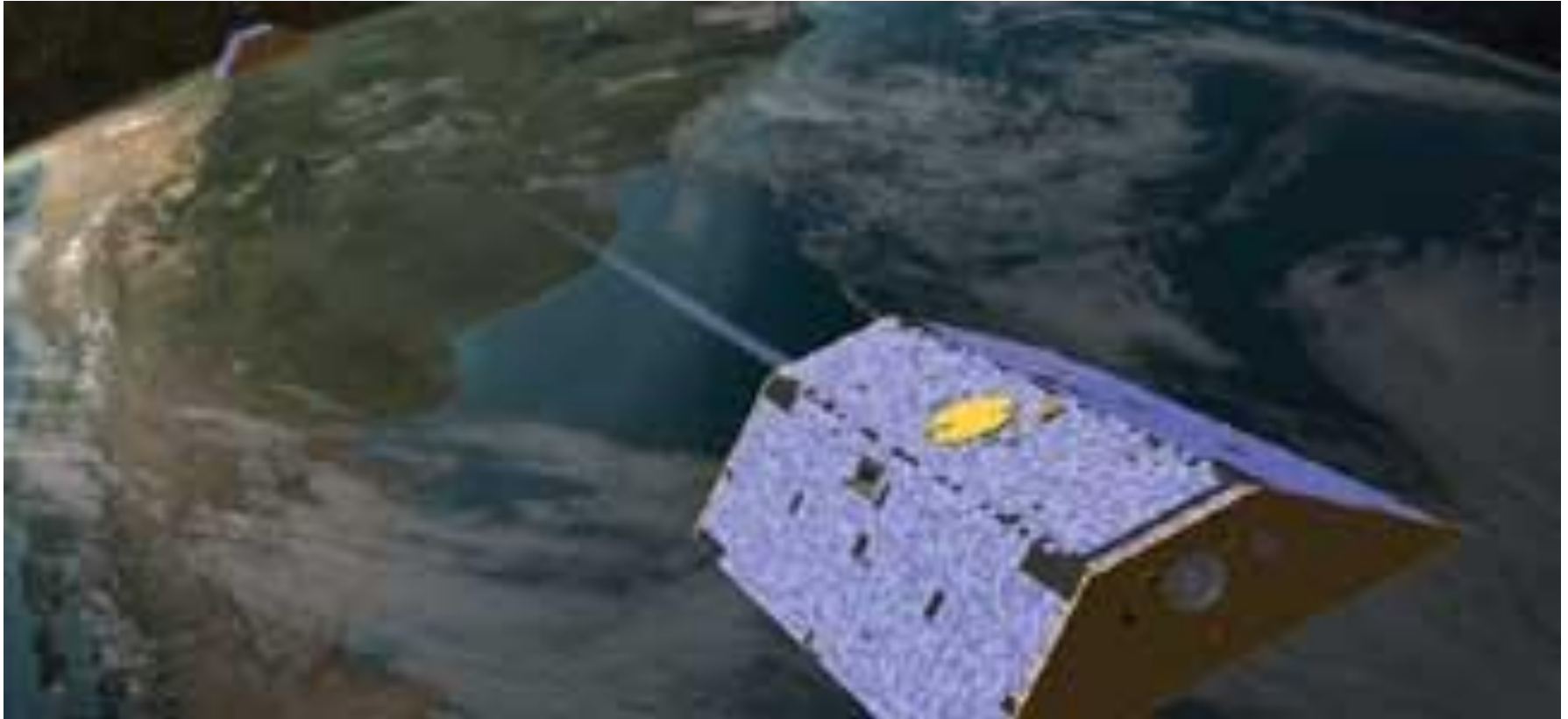
Δορυφορικές λύσεις για γεωδυναμικό μέχρι το βαθμό 60-80

# Η ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗ CHAMP ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ



Εικόνα 35

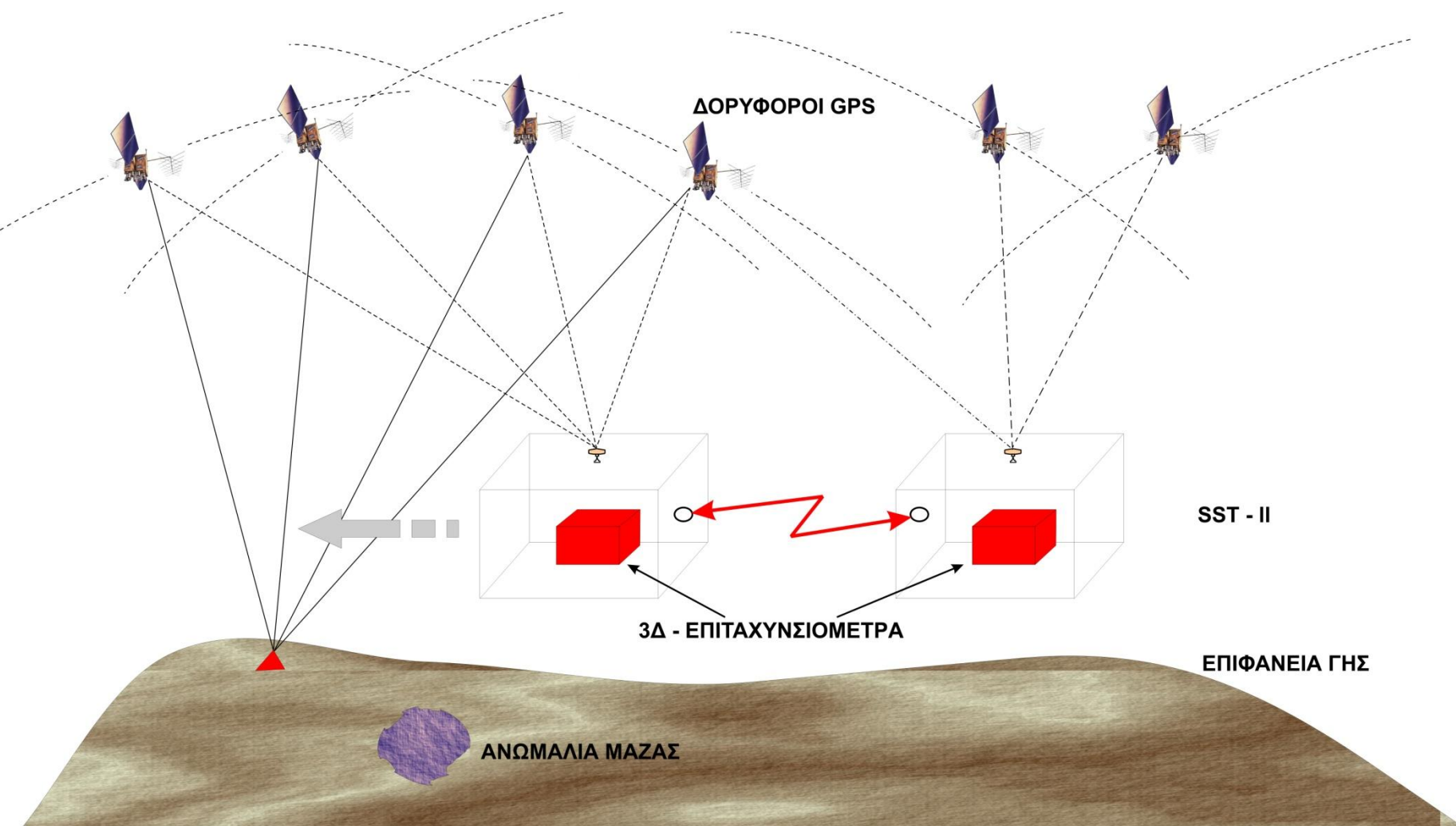
## GRACE - Gravity Recovery and Climate Experiments



Εικόνα 36

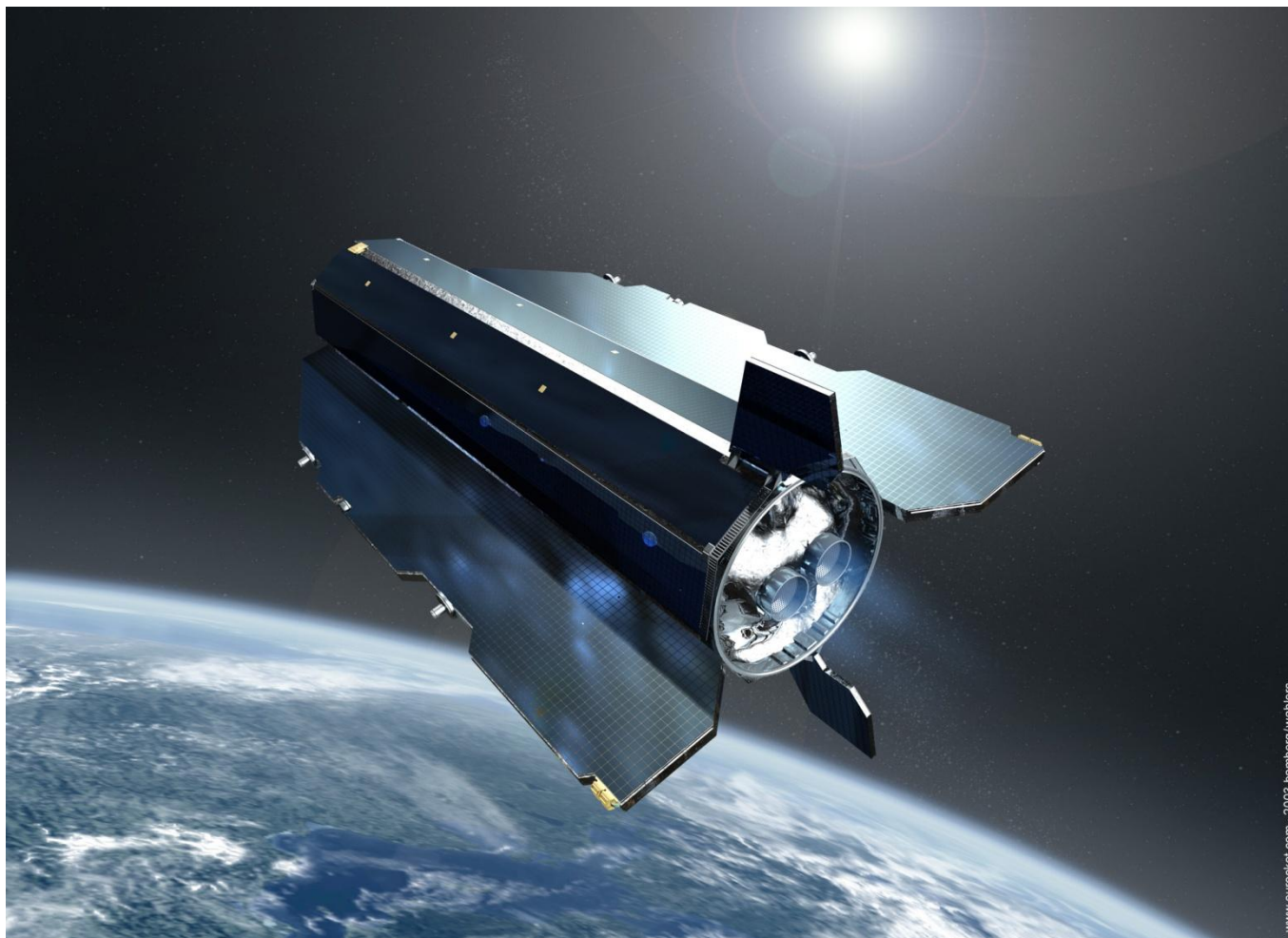
Βαθμιδομετρία και πεδίο βαρύτητας

# Η ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗ GRACE ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ



Εικόνα 37

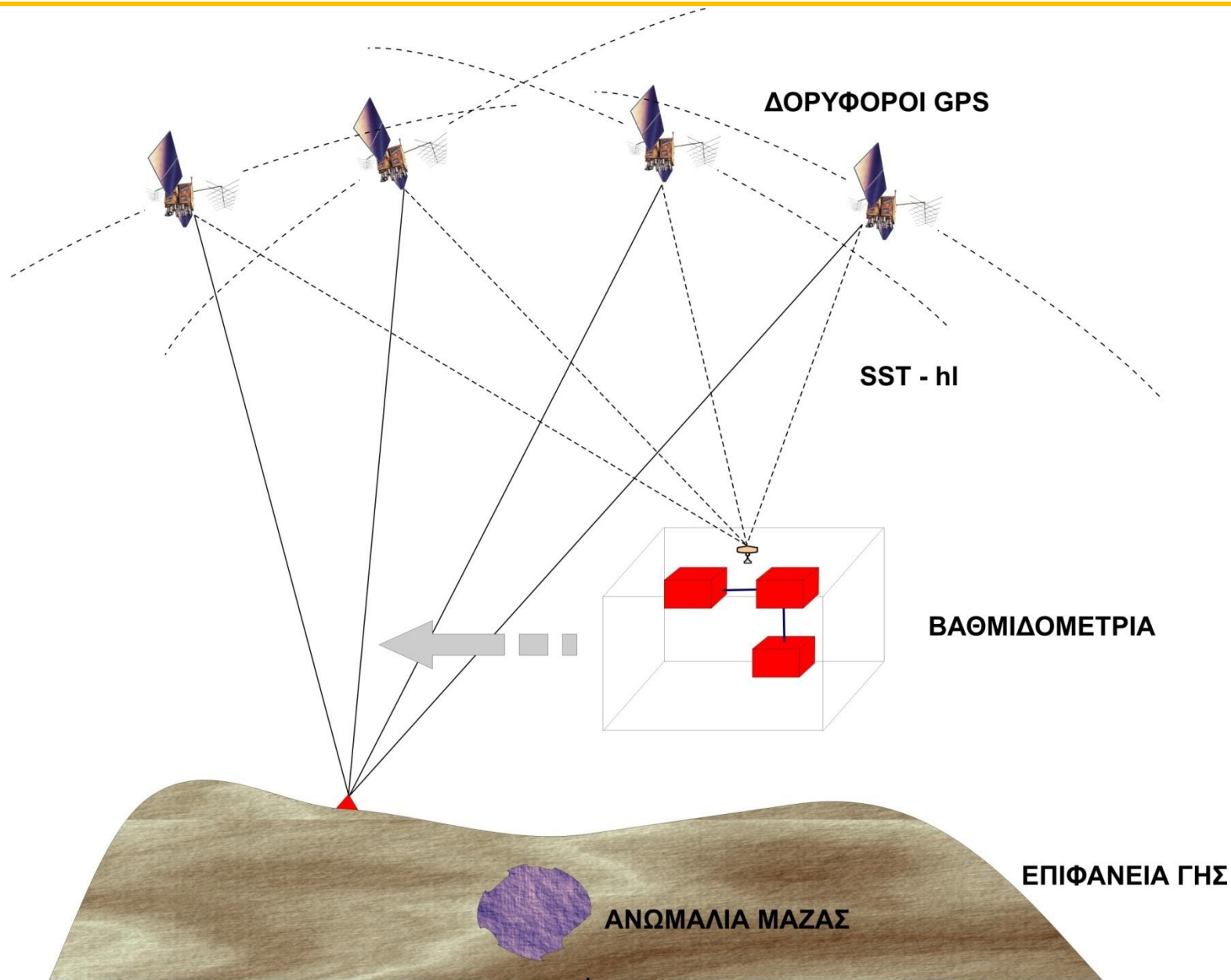
## GOCE - Gravity and Ocean Circulation Explorer



Εικόνα 38

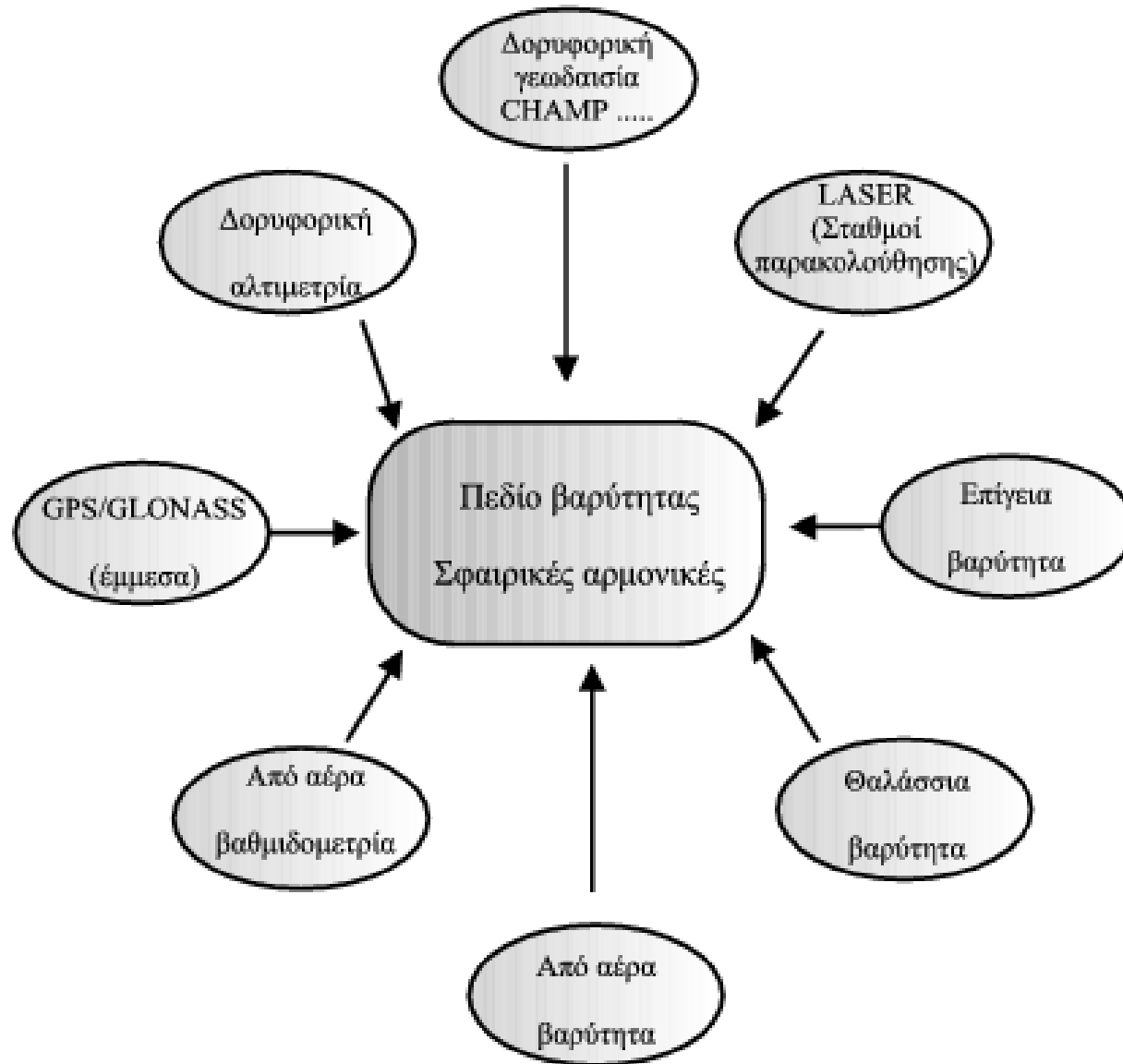
Κατακόρυφες βαθμίδες του πεδίο βαρύτητας

# Η ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗ GOCE ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ



Εικόνα 39





Εικόνα 40

- μετρήσεις τροχιών τεχνητών δορυφόρων
- επίγεια δεδομένα βαρύτητας
- συνδυασμό επίγειων και δορυφορικών δεδομένων

**Το σύνολο των δεδομένων επίγειων και δορυφορικών μετατρέπεται σε ανωμαλίες βαρύτητας (σημειακές ή μέσες), οι οποίες θεωρούνται αντιπροσωπευτικές ενός γεωγραφικού διαμερίσματος που ορίζεται από μεσημβρινούς και παραλλήλους.**

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm}^* \\ \bar{S}_{nm}^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi GM} \iint_{\sigma} \frac{r^2}{n-1} \left(\frac{r}{a}\right)^n \Delta g \bar{P}_{nm}(\sin\varphi) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} d\sigma$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm}^* \\ \bar{S}_{nm}^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi GM} \iint_{\sigma} r\gamma \left(\frac{r}{a}\right)^n N \bar{P}_{nm}(\sin\varphi) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} d\sigma$$

- Μέσες Τιμές 1 x 1 για ολόκληρη τη γη (πλέγμα μεσημβρινών και παραλλήλων, 180x360=64800 τιμές)

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi GM} \sum_{k=1}^{64800} \frac{\Delta g_k}{\beta_n(\psi_o)} \iint_{\sigma} \frac{r^2}{n-1} \left(\frac{r}{a}\right)^n \bar{P}_{nm}(\sin\varphi) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} d\sigma$$

- Ο βαθμός και η τάξη του αναπτύγματος των συντελεστών εξαρτώνται από τη διακριτική ικανότητα των διαθέσιμων δεδομένων
- Η ακρίβεια των συντελεστών εξαρτάται από την ακρίβεια των δεδομένων

συντελεστής εξομάλυνσης *Pellinen*

$$\beta_n \psi_0 = \cot \psi_0 / 2 \frac{P_{n1}}{n \ n+1}$$

$\psi_0$  είναι η ακτίνα ενός κύκλου εμβαδού ίσου (προσεγγιστικά) με το εμβαδό τετραγώνου πλευράς  $\bar{\theta}$

$$\sin \psi_0 = \sqrt{\frac{\bar{\theta} \sin \bar{\theta}}{4\pi}}$$

Το εύρος  $\Delta\sigma$  των διαμερισμάτων μέσω τιμών εξαρτάται από την κατανομή των δεδομένων και αντιστοιχεί στο μέγιστο βαθμό ανάπτυξης του μοντέλου  $n_{max}$

$$n_{max} = \frac{180^\circ}{\bar{\theta}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} \Rightarrow N, \Delta g, \xi, \eta$$

- Ακρίβεια δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των συντελεστών του γεωδυναμικού μοντέλου
- Διακριτική ικανότητα (πυκνότητα) δεδομένων
- Καταλληλότητα (adequacy) του γεωδυναμικού μοντέλου για τον προσδιορισμό των συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας

$$n_{\max} = \frac{180^\circ}{\bar{\theta}}$$

- Για  $n_{\max}=360$  είναι  $\bar{\theta} = 0.5^\circ$  ή  $\sim 55$  km
- Για  $n_{\max}=2160$  είναι  $\bar{\theta} = 5'$  ή  $\sim 10$  km

Από τη φασματική ανάλυση διακριτών σημάτων προκύπτει ότι μπορώ να αναπαραστήσω το πεδίο βαρύτητας μέχρι μήκος κύματος ίσο με  $2\bar{\theta}$

## Αριθμός συντελεστών γεωδυναμικού μοντέλου

$$N = (n_{\max} + 1)^2 - 1$$

$n, m \rightarrow 360$                       130320 συντελεστές                       $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$

$n, m \rightarrow 1800$                       3243600 συντελεστές                       $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$

# ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ

$$\sigma_n(T) = M T_n^2 = \sum_{n=2}^{\infty} T_n$$

$$\sigma_n(T) = R^2 G^2 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_{nm}^{*2} + \bar{S}_{nm}^{*2}$$

$$c_n(\Delta g) = (n-1)^2 G^2 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_{nm}^{*2} + \bar{S}_{nm}^{*2}$$

$$c_n(N) = \frac{R^2}{G^2} \frac{1}{(n-1)^2} c_n(\Delta g)$$

$$c_n(\theta) = \frac{1}{G^2} \frac{n(n+1)}{(n-1)^2} c_n(\Delta g)$$

$$RMS = \sqrt{\sum_{m=2}^n c_n}$$

- Εκτίμηση ακρίβειας στον υπολογισμό μιας συνιστώσας του πεδίου βαρύτητας, που υπολογίζεται από ένα γεωδυναμικό μοντέλο

$$c_n(\varepsilon_{\Delta g}) = (n-1)^2 G^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sigma \bar{C}_{nm}^{*2} + \sigma \bar{S}_{nm}^{*2}$$

$$c_n(\varepsilon_N) = \frac{R^2}{G^2} \frac{1}{(n-1)^2} c_n(\varepsilon_{\Delta g})$$

$$c_n(\varepsilon_{\theta}) = \frac{1}{G^2} \frac{n(n+1)}{(n-1)^2} c_n(\varepsilon_{\Delta g})$$

$$RMS = \sqrt{\sum_{m=2}^n c_n(\varepsilon)}$$

$$\text{Σφάλμα αποκοπής στα } N \sim \frac{64}{n_{\max}} \quad [\text{m}]$$

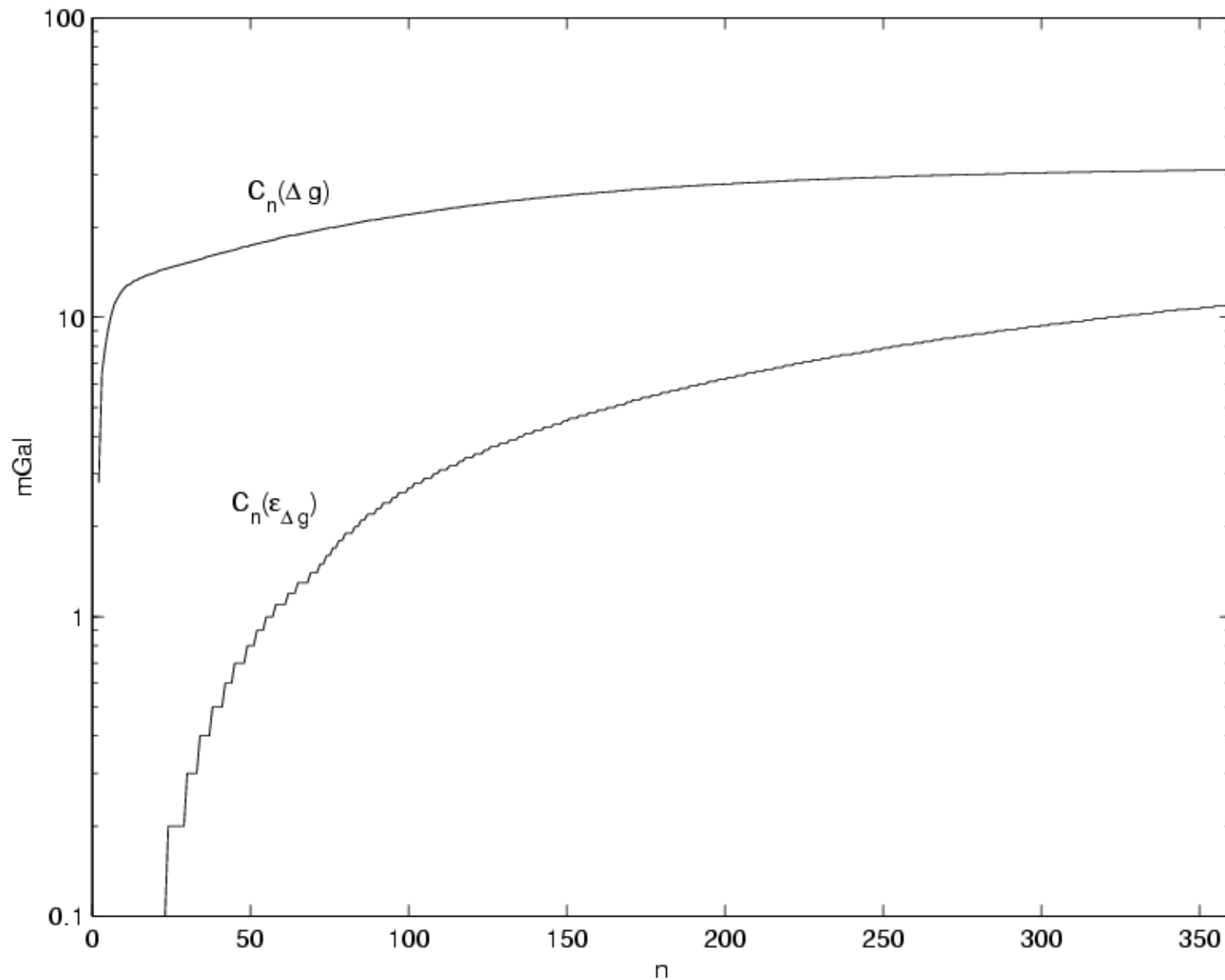


# ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑ ΤΟΥ EGM96 ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΣΥΝΙΣΤΩΣΩΝ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

ΣΥΝΙΣΤΩΣΑ	$RMS = \sqrt{\sum c_n}$					Μονάδες	
	για n=	36	70	120	180		360
N		30.5	30.5	30.6	30.6	30.6	m
$\Delta g$		15.9	19.4	23.6	27.1	31.1	mgal
$\theta(\xi, \eta)$		3.8	4.3	4.9	5.5	6.1	arcsec

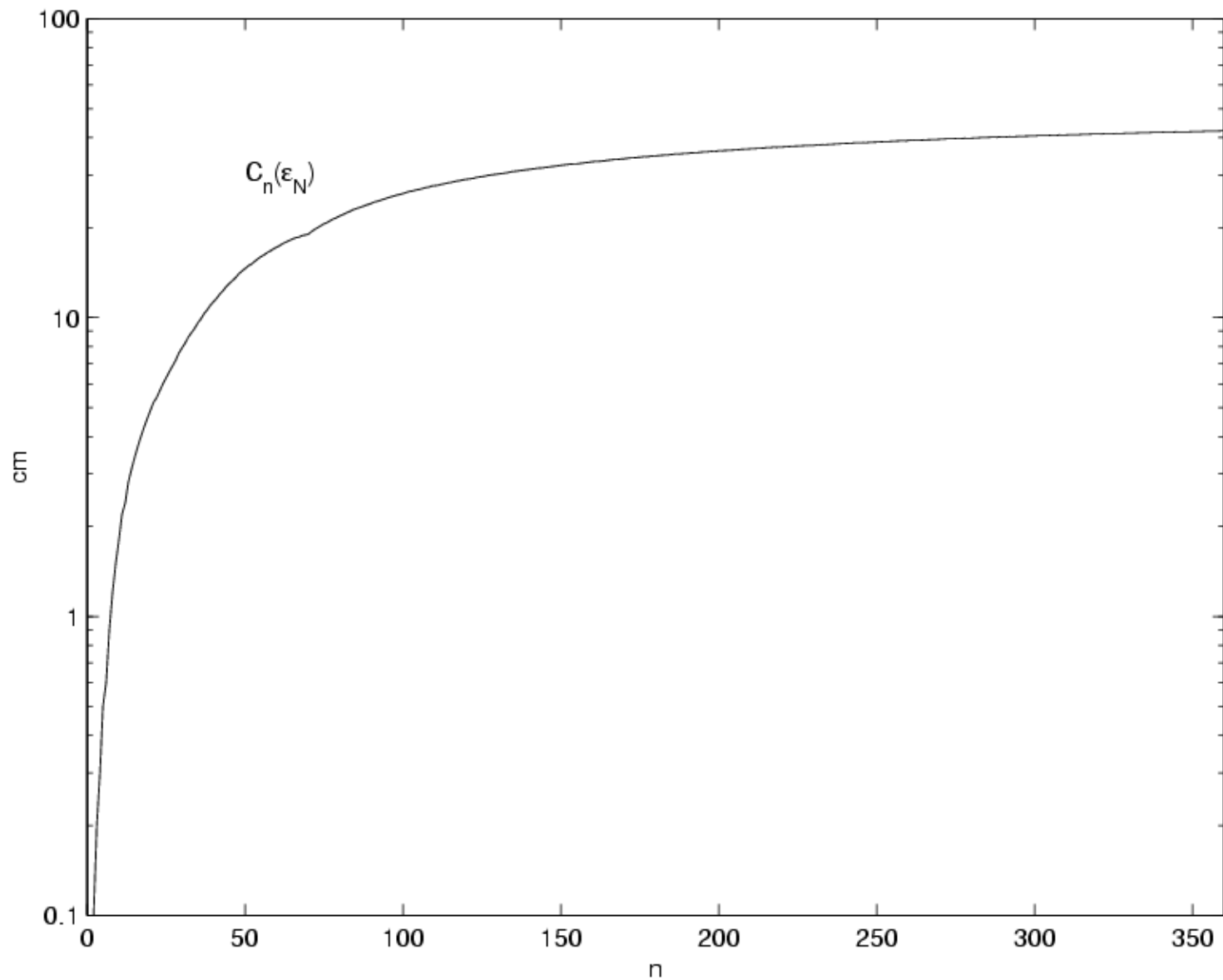
Συνιστώσα	$RMS = \sqrt{\sum c_n \varepsilon}$					Μονάδες	
	για n=	36	70	120	180		360
N		9.9	19.0	29.0	34.7	42.1	cm
$\Delta g$		0.4	1.4	3.4	5.6	31.1	mgal
$\theta(\xi, \eta)$		0.1	0.3	0.6	1.0	6.1	arcsec

# ΣΗΜΑ ΚΑΙ ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΤΟΥ EGM96 ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ $\Delta g$



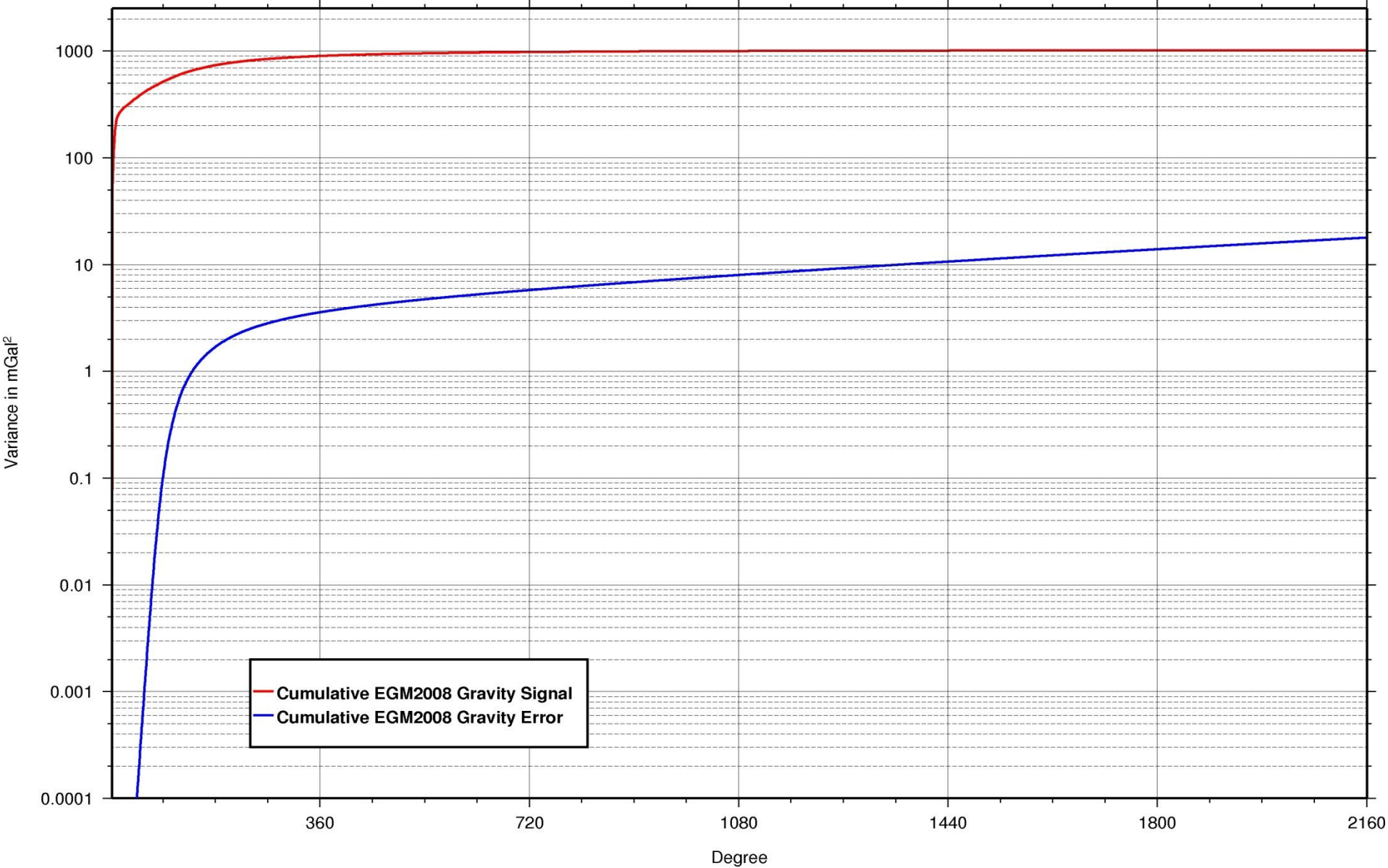
Εικόνα 41

# ΣΗΜΑ ΚΑΙ ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΤΟΥ EGM96 ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ N



Εικόνα 42

# ΣΗΜΑ ΚΑΙ ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΤΟΥ EGM08 ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ $\Delta g$

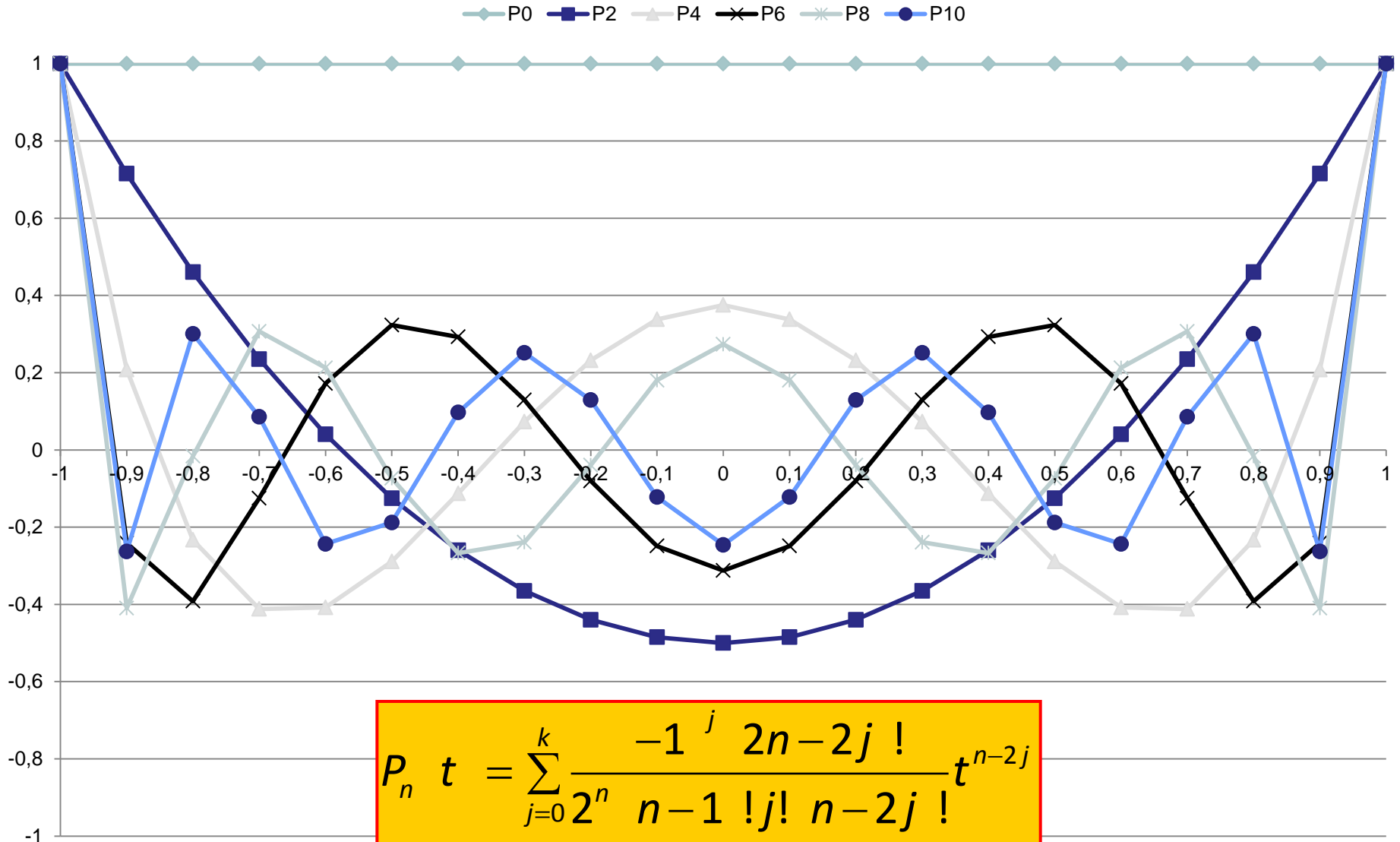


Εικόνα 43

Ποια είναι η διαφορά ανάμεσα στα πολυώνυμα του Legendre και τις συναρτήσεις Legendre ;;

Τα πολυώνυμα εξαρτώνται από το βαθμό, οι συναρτήσεις από βαθμό και τάξη. Ανάλογη είναι η γραφική αναπαράσταση (βλ. σχήμα 7.3 του βιβλίου).

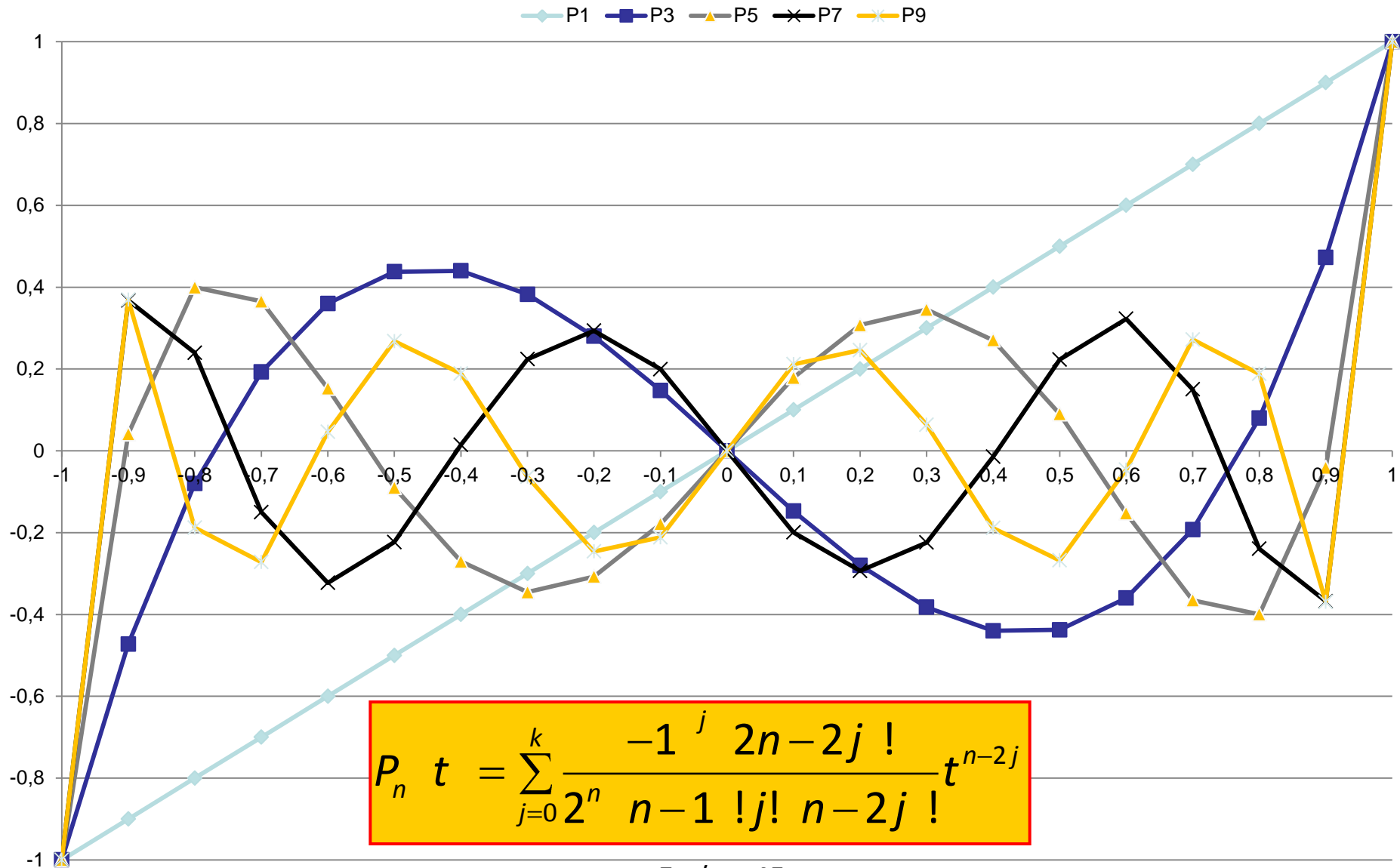
## Άρτια πολυώνυμα Legendre



$$P_n t = \sum_{j=0}^k \frac{-1^j 2n-2j!}{2^n (n-1)! j! (n-2j)!} t^{n-2j}$$

Εικόνα 44

## Περίττα πολυώνυμα Legendre



Εικόνα 45



# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

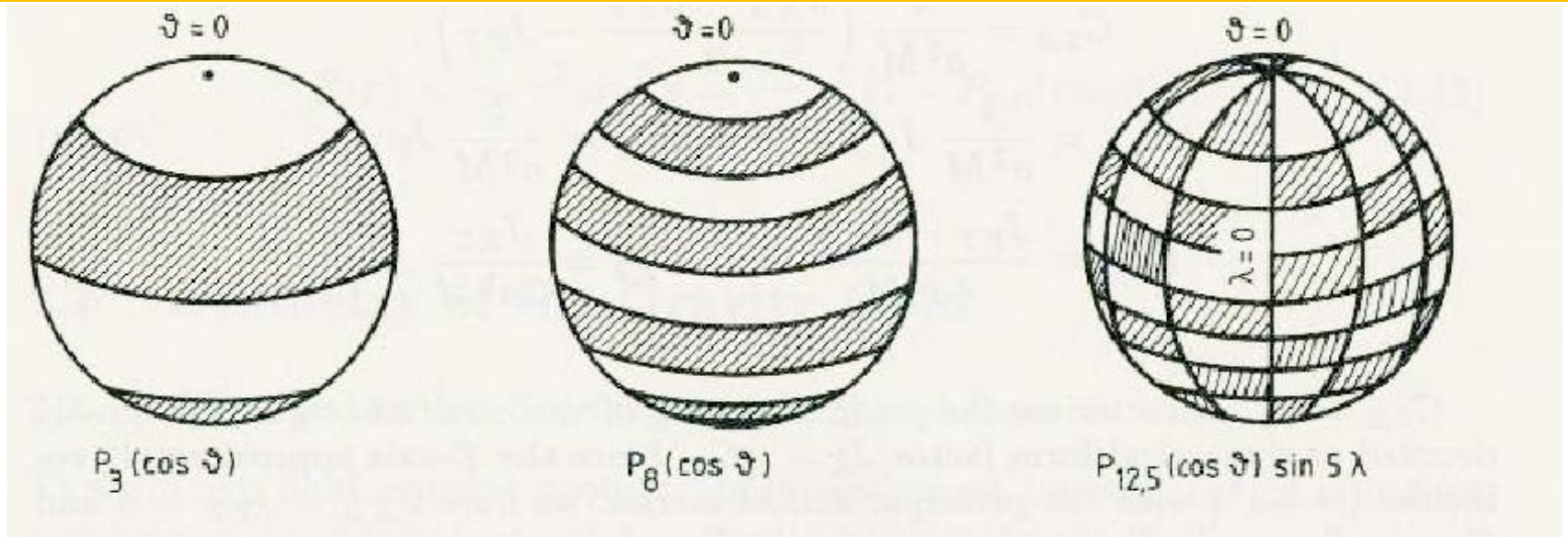
## ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Legendre

$$P_{nm}(t) = \frac{1-t^2}{2^n} \sum_{j=0}^{n-m/2} \frac{(-1)^j 2n-2j!}{j! (n-j)! (n-m-2j)!} t^{n-m-2j}$$

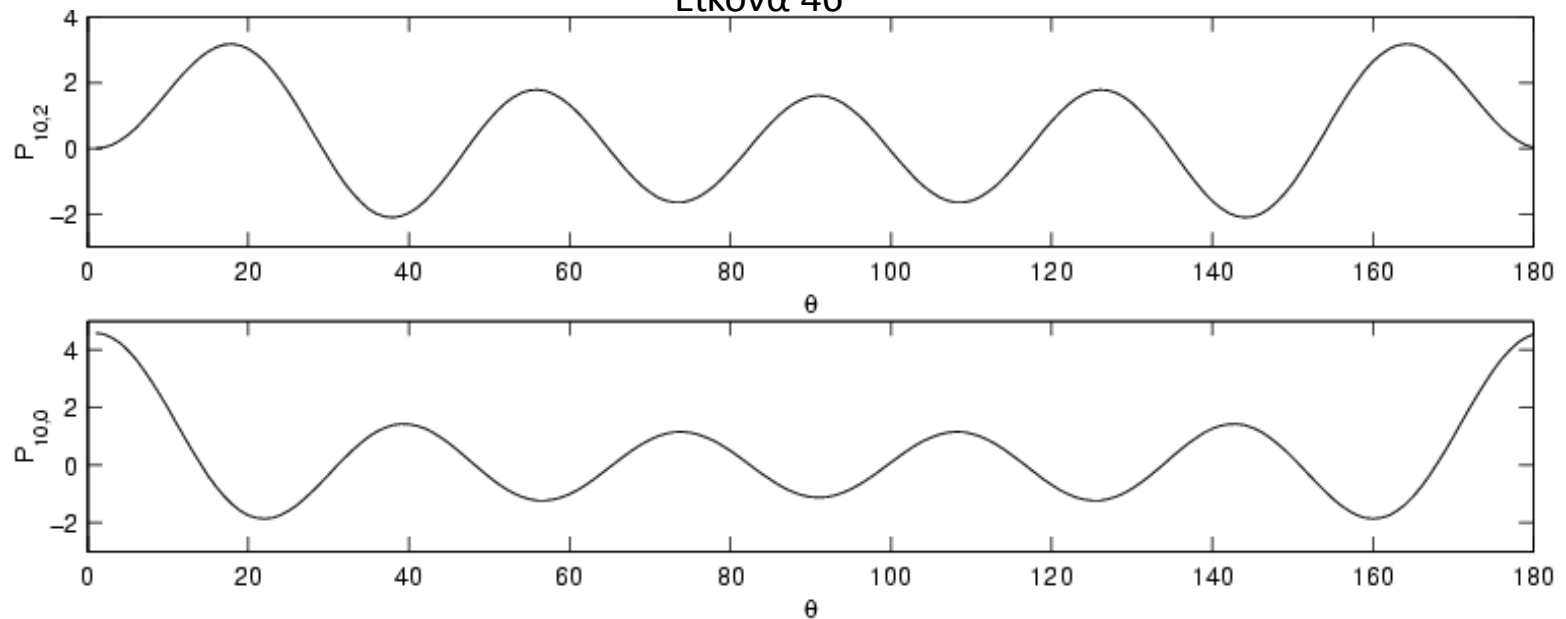
$$P_{nm}(t) = \frac{2n-1}{n-m} t P_{n-1,m}(t) - \frac{n+m-1}{n-m} P_{n-2,m}(t) \quad n-2 \geq m$$

$$P_{nm}(t) = 2m-1 \frac{t}{1-t^2} P_{n,m-1}(t) - \frac{n-m+2}{n+m+1} P_{n,m-2}(t) \quad m \geq 2$$

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ



Εικόνα 46



Εικόνα 47

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ποια είναι η διαφορά ανάμεσα σε μια ισοδυναμική και μια σφαιροδυναμική επιφάνεια ;;

- Το δυναμικό έχει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο της ισοδυναμικής επιφάνειας
- Σφαιροδυναμική επιφάνεια είναι η επιφάνεια για την οποία ισχύει η σχέση:

$$U_Q = U_0 + \Delta W$$



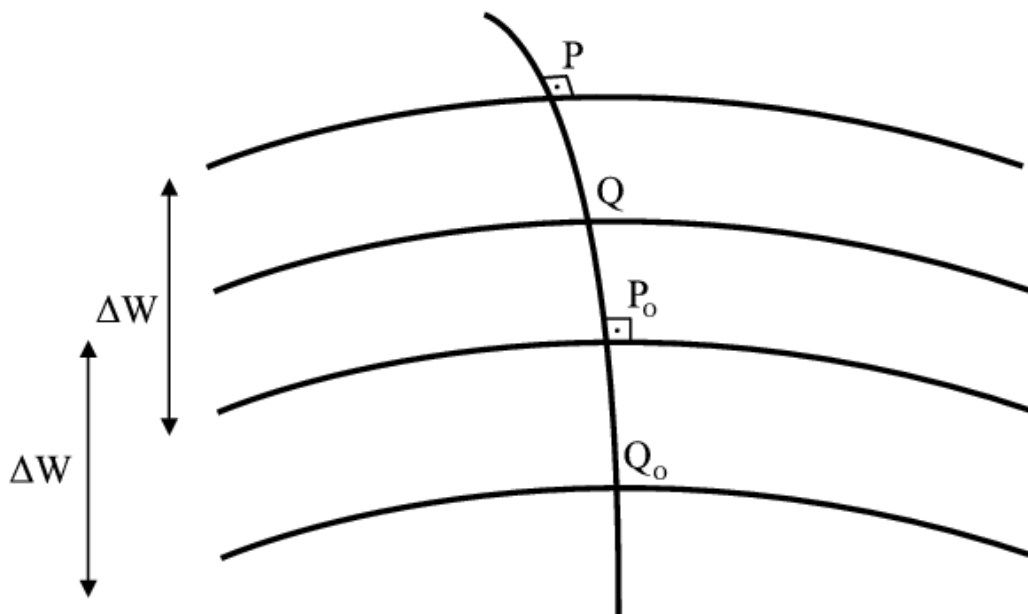
σφαιροδυναμική επιφάνεια  
ισοδυναμική:  $W_P$

σφαιροδυναμική:  $U_Q$

γεωειδές:  $W_0$

ελλειψοειδές:  $U_0$

$$W_P = W_0 + \Delta W$$



Εικόνα 48

Γιατί απουσιάζουν οι όροι μηδενικού και πρώτου βαθμού από τα αναπτύγματα των συνιστωσών του πεδίου βαρύτητας σε συντελεστές σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων;

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{kM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

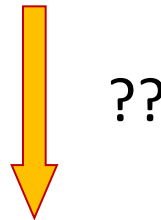
- Ο όρος μηδενικής τάξης υπάρχει στο ανάπτυγμα
- Ο όρος 1ης τάξης απουσιάζει γιατί:

$W_0$  (γεωειδές)  $\equiv U_0$  (ΕΕΠ)

κέντρο γήινης μάζας (σφαιρικής γης)  $\equiv$  κέντρο συστήματος συντεταγμένων (ΕΕΠ)

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{kM}{r} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

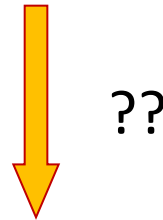


$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{kM}{R} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

$$a = r = R$$

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$N_{r,\theta,\lambda} = \frac{kM}{r\gamma} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$



$$N_{r,\theta,\lambda} = R \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

✓  $a = r = R$

✓ Πολ/ζω και διαιρώ με R .....

Γιατί από την ανάλυση των μετρήσεων των τροχιών των τεχνητών δορυφόρων υπολογίζονται μόνο χαμηλού βαθμού και τάξης συντελεστές αναπτυγμάτων του γεωδυναμικού;

- Στο μεγάλο ύψος της δορυφορικής τροχιάς το πεδίο έλξης είναι εξομαλυσμένο και κατά συνέπεια υπολογίζονται αρμονικές στα μεγάλα μήκη κύματος, δηλαδή συντελεστές γεωδυναμικού χαμηλού βαθμού και τάξης

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μέχρι ποιο βαθμό και τάξη είναι δυνατόν να υπολογιστούν θεωρητικά συντελεστές αναπτυγμάτων του γεωδυναμικού, όταν είναι διαθέσιμες για όλη τη γη μέσες τιμές ανωμαλιών βαρύτητας:

$1^\circ \times 1^\circ$



$$n_{\max} = 180$$

$0.5^\circ \times 0.5^\circ$

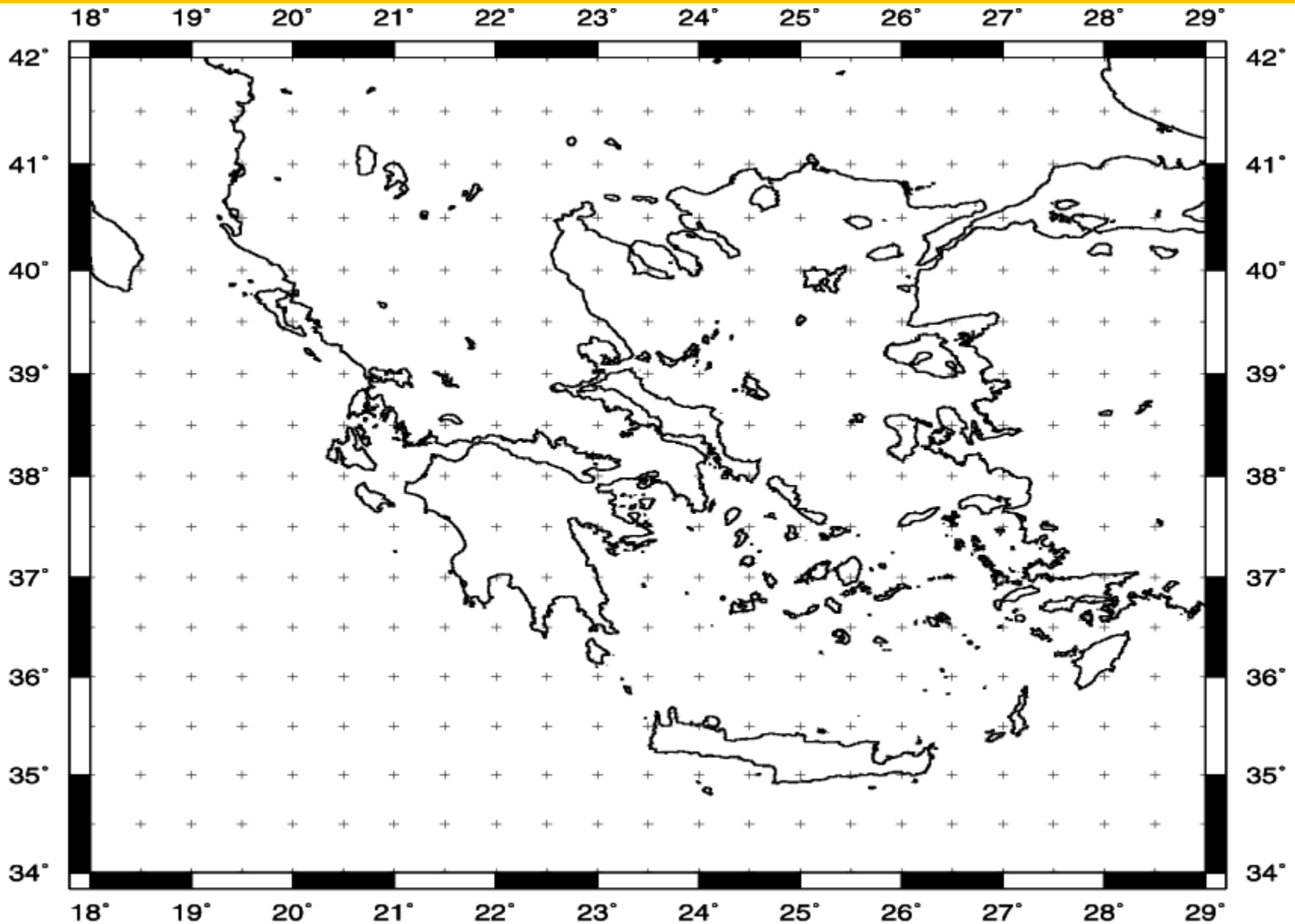


$$n_{\max} = 360$$

$$n_{\max} = \frac{180^\circ}{\bar{\theta}}$$



# ΑΣΚΗΣΕΙΣ (5<sup>η</sup> σελ. 163)



Εικόνα 49

# ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

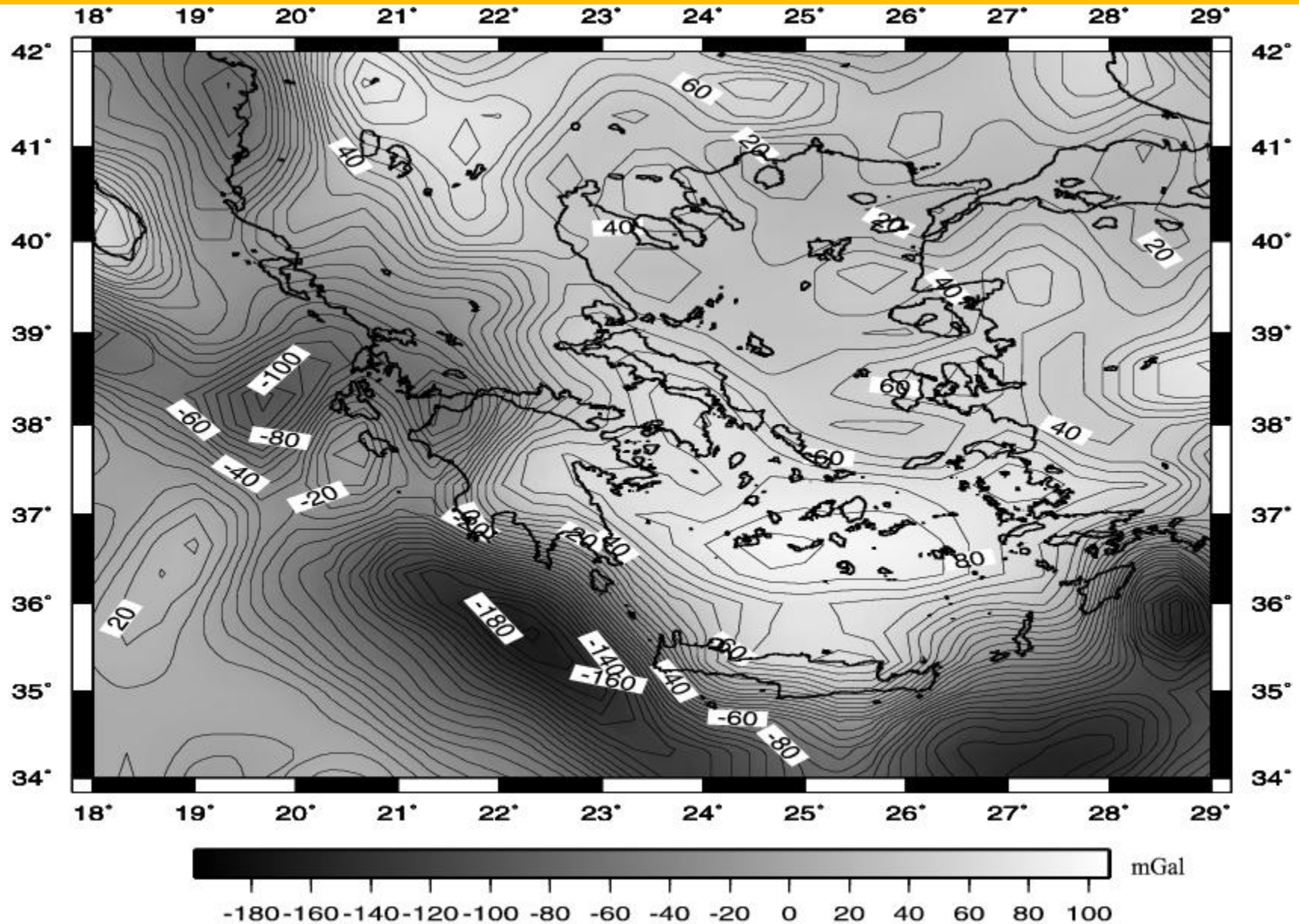
$$T_{r,\theta,\lambda} = \frac{kM - kM_E}{r} + \frac{kM}{r} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

$$\Delta g_{r,\theta,\lambda} = \frac{kM}{r^2} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} n-1 \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

$$N_{r,\theta,\lambda} = \frac{kM}{r\gamma} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \bar{C}_{nm}^* \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^* \sin m\lambda \bar{P}_{nm} \cos \theta \right]$$

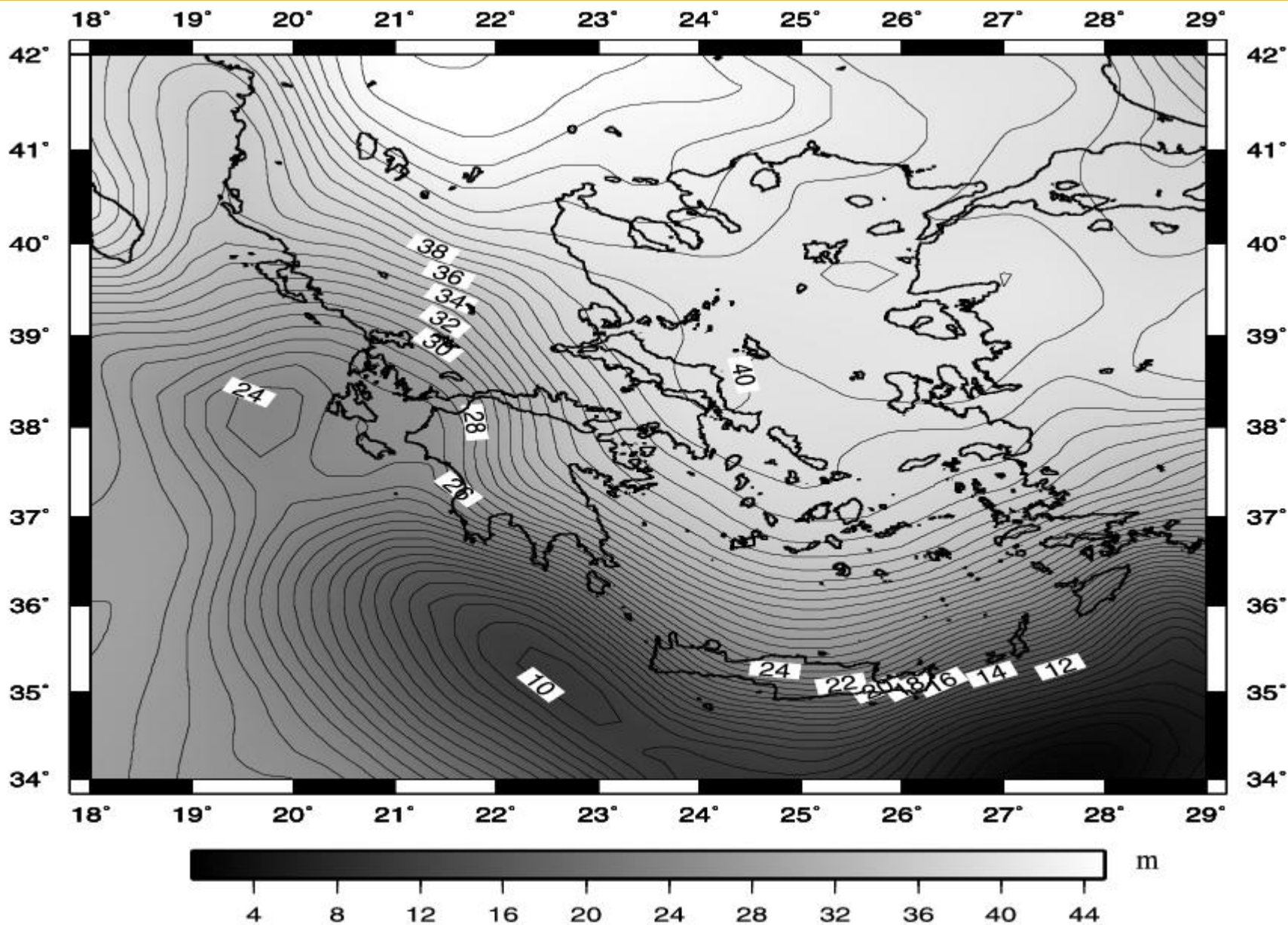
$$N = \frac{T}{\gamma}$$

# ΑΝΩΜΑΛΙΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΑΠΟ ΤΟ EGM96



Εικόνα 50

# ΥΨΟΜΕΤΡΑ ΓΕΩΕΙΔΟΥΣ ΑΠΟ ΤΟ EGM96



Εικόνα 51

# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες
- Εικόνες 1, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 40, 41, 42, 44-51: Αραμπέλος Δ και Τζιαβός ΗΝ (2007) Εισαγωγή στο πεδίο βαρύτητας της Γης. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Εικόνες 2, 3, 8: Leica (2000) Leica GPS Basics. Leica Geosystems AG, v1.0.
- Εικόνα 4: [http://www.uni-stuttgart.de/gi/education/BSC/19840\\_12\\_Physikalische\\_Geodasie/LNErdm.pdf](http://www.uni-stuttgart.de/gi/education/BSC/19840_12_Physikalische_Geodasie/LNErdm.pdf) <Τελευταία επίσκεψη: 22.05.2015 >
- Εικόνες 12-16: F. G. Lemoine, S. C. Kenyon, J. K. Factor, R.G. Trimmer, N. K. Pavlis, D. S. Chinn, C. M. Cox, S. M. Klosko, S. B. Luthcke, M. H. Torrence, Y. M. Wang, R. G. Williamson, E. C. Pavlis, R. H. Rapp and T. R. Olson, The Development of the Joint NASA GSFC and NIMA Geopotential Model EGM96, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, 20771 USA, July 1998.
- Εικόνες 25-32, 35, 37, 39, 43: Βέργος ΓΣ (2006) Μελέτη του πεδίου βαρύτητας και της θαλάσσιας τοπογραφίας στον Ελληνικό χώρο με συνδυασμό επίγειων δεδομένων και δεδομένων των νέων δορυφορικών CHAMP και GRACE. Διδακτορική Διατριβή, Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας, Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών, Πολυτεχνική Σχολή, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
- Εικόνες 17-24: Pavlis NK, Holmes SA, Kenyon SC, Factor JK (2012) The Development and Evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). J Geophys Res 117(B04406), doi:10.1029/2011JB008916.
- Εικόνα 33: <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/> <Τελευταία επίσκεψη: 22.05.2015 >
- Εικόνα 36: <http://www.csr.utexas.edu/grace/> <Τελευταία επίσκεψη: 22.05.2015 >
- Εικόνα 38: <http://smc.cnes.fr/lcGOCE/goce1.jpg>. <Τελευταία επίσκεψη: 22.05.2015 >



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Ηλίας Τζιαβός – Γεώργιος Βέργος. «Εισαγωγή στο Πεδίο Βαρύτητας. Σφαιρικές Αρμονικές Συναρτήσεις & Αναπτύγματα Συνιστωσών του Πεδίου Βαρύτητας». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://eclass.auth.gr/courses/OCRS374/>.



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Αριστοτέλειο  
Πανεπιστήμιο  
Θεσσαλονίκης



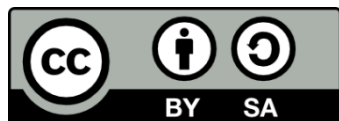
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ  
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



# Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Δαλάκης Νικόλαος  
Θεσσαλονίκη, 16/9/2014



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



# ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

