



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

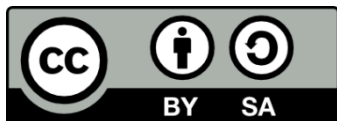
ΑΝΟΙΚΤΑ  
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



# Εισαγωγή στο Πεδίο Βαρύτητας

Ενότητα 6: Σφαιρικές Αρμονικές Συναρτήσεις  
& Αναπτύγματα Συνιστωσών του Πεδίου Βαρύτητας

Η.Ν. Τζιαβός - Γ.Σ. Βέργος  
Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



**ΑΠΘ/ΤΑΤΜ**

**Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας  
4<sup>ο</sup> Εξάμηνο**

***Εισαγωγή στο πεδίο βαρύτητας***

***Introduction to gravity field***

***Ακαδημαϊκή Χρονιά:***

***2014 – 2015***

***Πρόγραμμα:***

***Τετάρτη 9:00 – 13:00***

***Διδάσκοντες:***

***Η.Ν. Τζιαβός, Γ.Σ. Βέργος***

<http://web.auth.gr/e-topo/>

<http://olimpia.topo.auth.gr/courses/>

Ιστοσελίδες ΔΕΠ

Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας

Η. Τζιαβός ή Γ. Βέργος

Μαθήματα - εργασίες

# Σφαιρικές Αρμονικές Συναρτήσεις & Αναπτύγματα Συνιστωσών του Πεδίου Βαρύτητας

# ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΚΑΙ ΓΕΩΔΥΝΑΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

- Δυναμικό έλξης και αρμονικές συναρτήσεις
- Πολυώνυμα Legendre
- Σφαιρικές Αρμονικές (ΣΑ)
  - Συναρτήσεις Legendre
  - Αναπτύγματα σε σφαιρικές αρμονικές
  - Κανονικοποιημένες σφαιρικές αρμονικές
- Ανάπτυγμα του Γήινου δυναμικού έλξης σε ΣΑ
  - Ανάπτυγμα του κανονικού δυναμικού έλξης σε ΣΑ
  - Ανάπτυγμα του διαταρακτικού δυναμικού σε ΣΑ
- Γεωμετρία του πεδίου βαρύτητας
  - Θεμελιώδης εξίσωση της φυσικής γεωδαισίας
  - Συνιστώσες του πεδίου βαρύτητας σε ΣΑ
  - Σφαιρική προσέγγιση

- Γεωδυναμικά μοντέλα
  - Τύποι γεωδυναμικών μοντέλων
- Υπολογισμός συντελεστών γεωδυναμικών μοντέλων
  - Σύγχρονα γεωδυναμικά μοντέλα και συντελεστές
  - Σύγχρονες δορυφορικές αποστολές παρακολούθησης του πεδίου βαρύτητας
    - ✓ CHAMP
    - ✓ GRACE
    - ✓ GOCE
  - Ακρίβεια γεωδυναμικών μοντέλων
    - ✓ Συντελεστές μεταβλητότητας
    - ✓ Συντελεστές μεταβλητότητας σφάλματος
- Εφαρμογές - Ασκήσεις

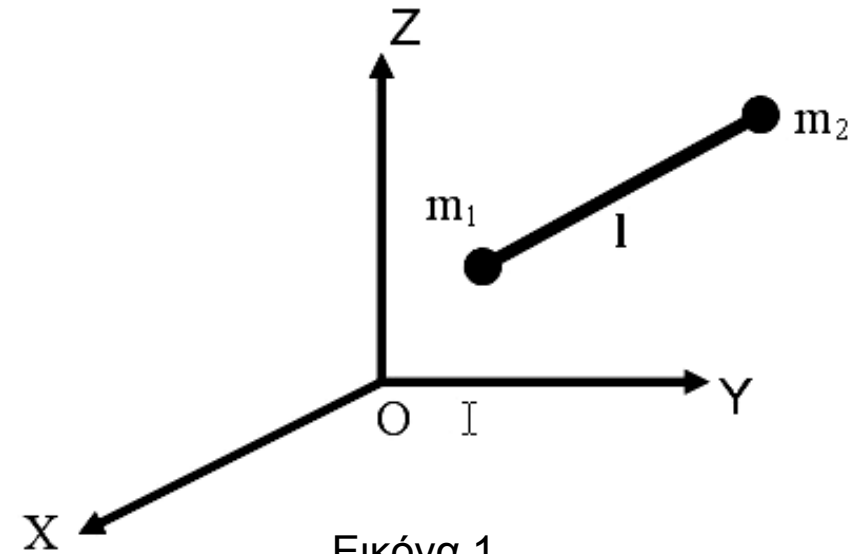


# ΝΕΥΤΩΝΙΟ ΠΕΔΙΟ ΕΛΞΗΣ

$$F = k \frac{m_1 m_2}{l^2}$$

όπου  $k = 6.672 \pm 0.001 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sec}^{-2}$

$$l = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$



Εικόνα 1

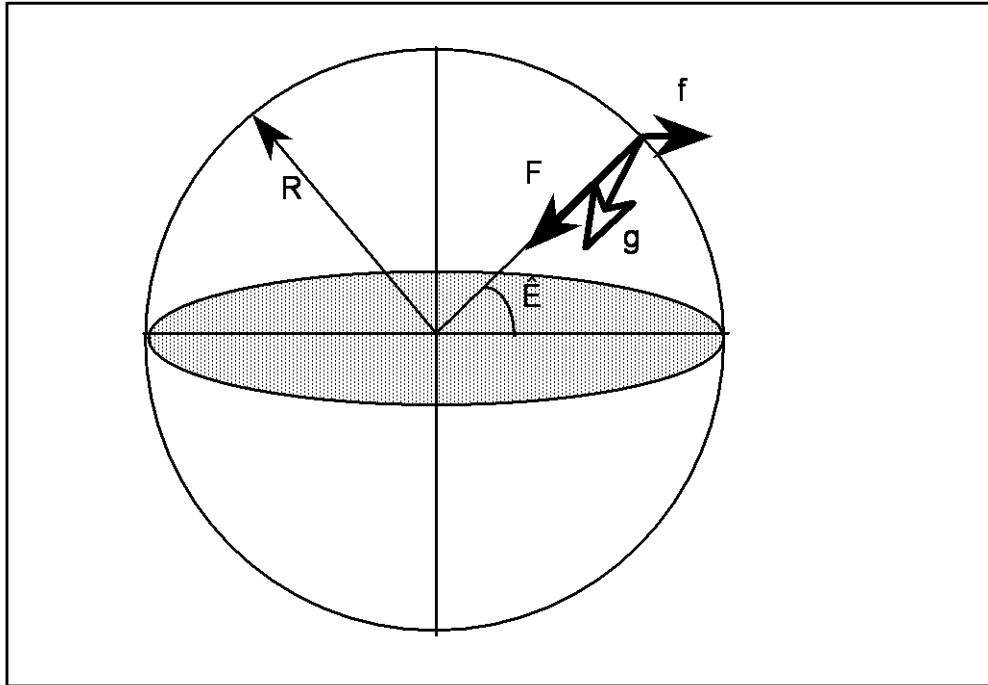
Συνιστώσες έλξης:

$$F_x = -F \cos(l, x) = -\frac{km(x - \xi)}{l^3}$$

$$F_y = -F \cos(l, y) = -\frac{km(y - \eta)}{l^3}$$

$$F_z = -F \cos(l, z) = -\frac{km(z - \zeta)}{l^3}$$

# Η ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΤΗΣ ΓΗΣ



Εικόνα 2

φυγόκεντρη δύναμη

$$f = \omega^2 R \cos\phi$$

$$g = F + f$$

❑ Στον ισημερινό η μέγιστη τιμή:

$$f_{\max} = \omega^2 R = 3.4 \text{ gal}$$

$$g_{\text{equ}} = 978.0 \text{ gal}$$

❑ Στους πόλους:

$$f = 0$$

$$g_{\text{pole}} = 983.2 \text{ gal}$$

# ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ - ΒΑΡΥΤΗΜΕΤΡΙΑ



Εικόνα 3

**Όργανα μέτρησης σχετικών τιμών βαρύτητας**

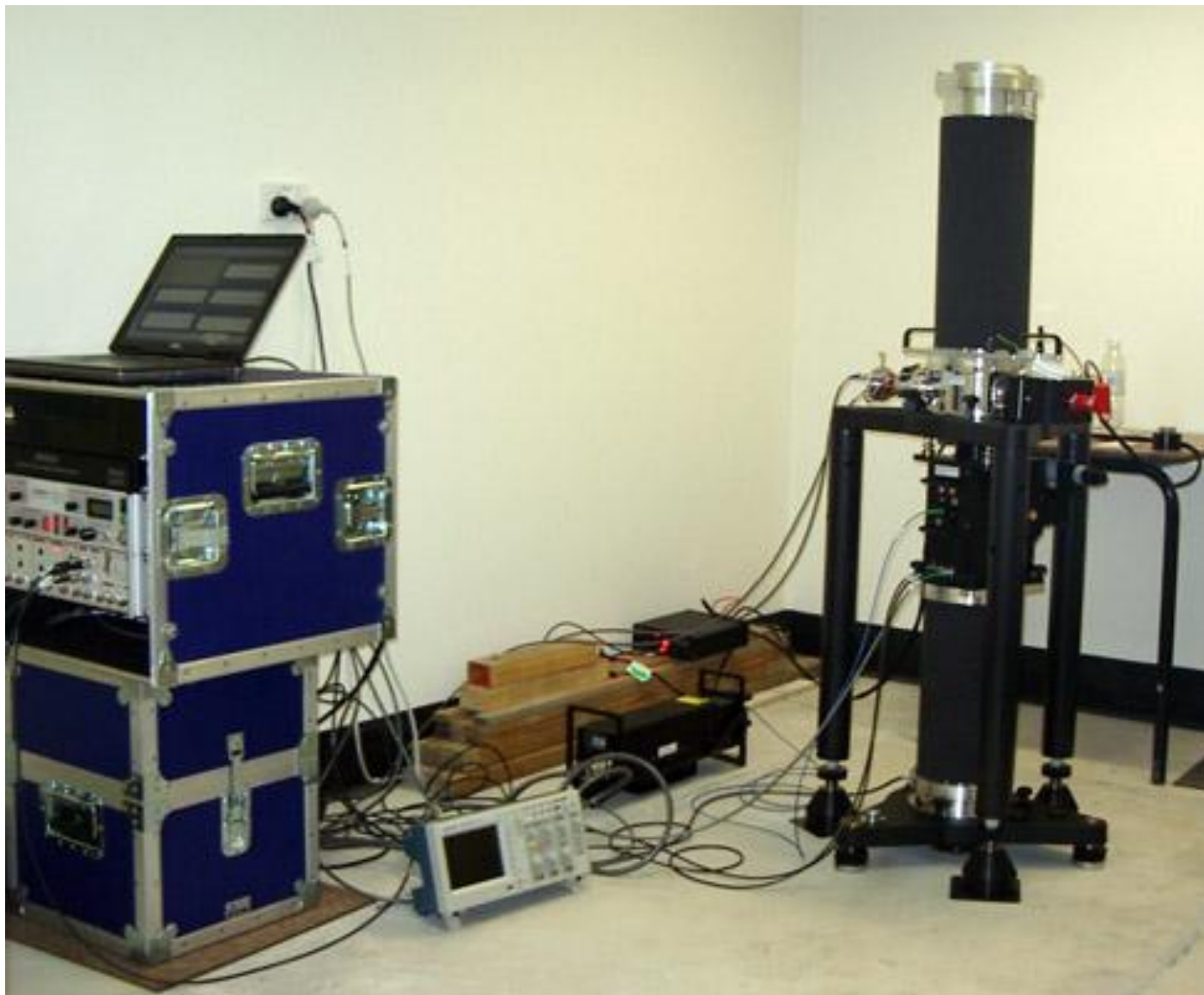
# ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ - ΒΑΡΥΤΗΜΕΤΡΙΑ



Εικόνα 4

**Όργανα μέτρησης απόλυτων τιμών βαρύτητας**

# ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ - ΒΑΡΥΤΗΜΕΤΡΙΑ



Εικόνα 5  
Όργανα μέτρησης απόλυτων τιμών βαρύτητας



# ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ - ΒΑΡΥΤΗΜΕΤΡΙΑ



Εικόνα 6

**Όργανα μέτρησης σχετικών τιμών βαρύτητας από αέρα**



Εικόνα 7

**Όργανα μέτρησης σχετικών τιμών βαρύτητας στη θάλασσα**

# ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Οι σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις αποτελούν λύσεις της εξίσωσης *Laplace*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

1. Πολυώνυμα και γενικευμένες συναρτήσεις *Legendre*
2. Πλήρως κανονικοποιημένα πολυώνυμα και πλήρως κανονικοποιημένες γενικευμένες συναρτήσεις *Legendre*
3. Επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές και πλήρως κανονικοποιημένες επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές



Εξίσωση *Laplace*:

$$\Delta V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\Delta V = 0$$

Στο χώρο έξω από τις έλκουσες μάζες – πυκνότητα σταθερή (έξω από τη συνοριακή επιφάνεια)  $\rho=0$  οπότε το δυναμικό έλξης είναι αρμονική συνάρτηση.

Στο χώρο όμως εντός των ελκυσών μαζών είναι:

Εξίσωση *Poisson*:

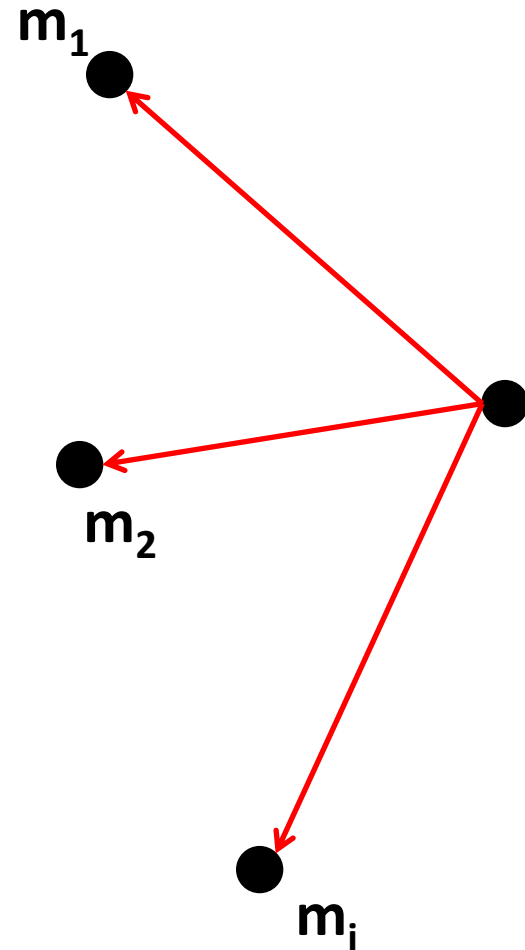
$$\Delta V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -4\pi k\rho$$

# ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΞΗΣ

Το δυναμικό έλξης σε κάποιο σημείο του χώρου θα είναι:

$$V = k \frac{m}{l}$$

$$V = k \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i}$$

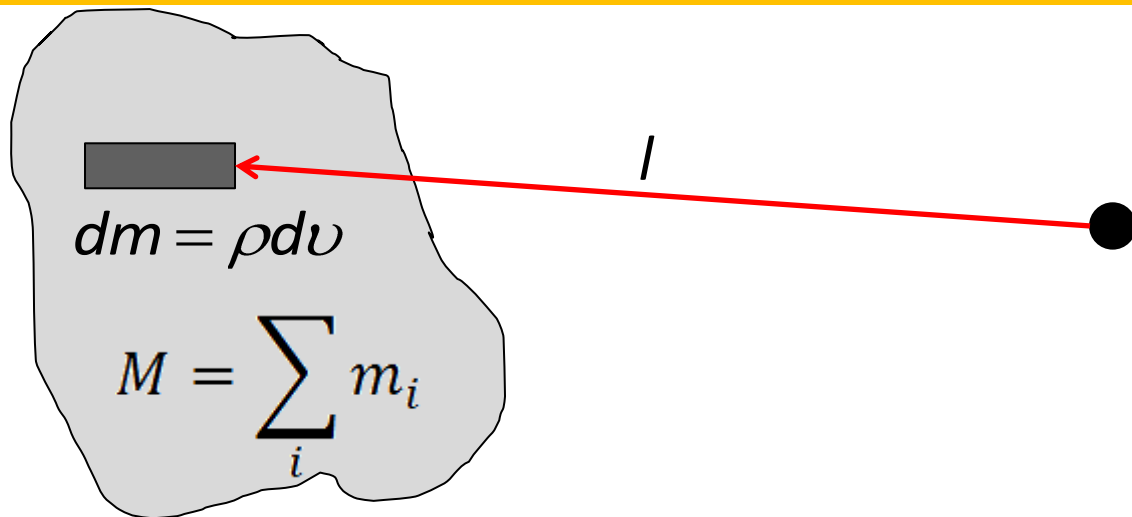


Εικόνα 8

- Βαρύτητα  $1 \text{ gal} = 1 \text{ cm sec}^{-2}$   
 $1 \text{ mgal} = 10^{-5} \text{ m sec}^{-2}$
- Δυναμικό  $\text{m}^2 \text{ sec}^{-2}$
- Μεταβολή 'g' κατά την κατακόρυφο  
 $1\text{E} = 10^{-9} \text{ sec}^{-2}$  (Eotvos)

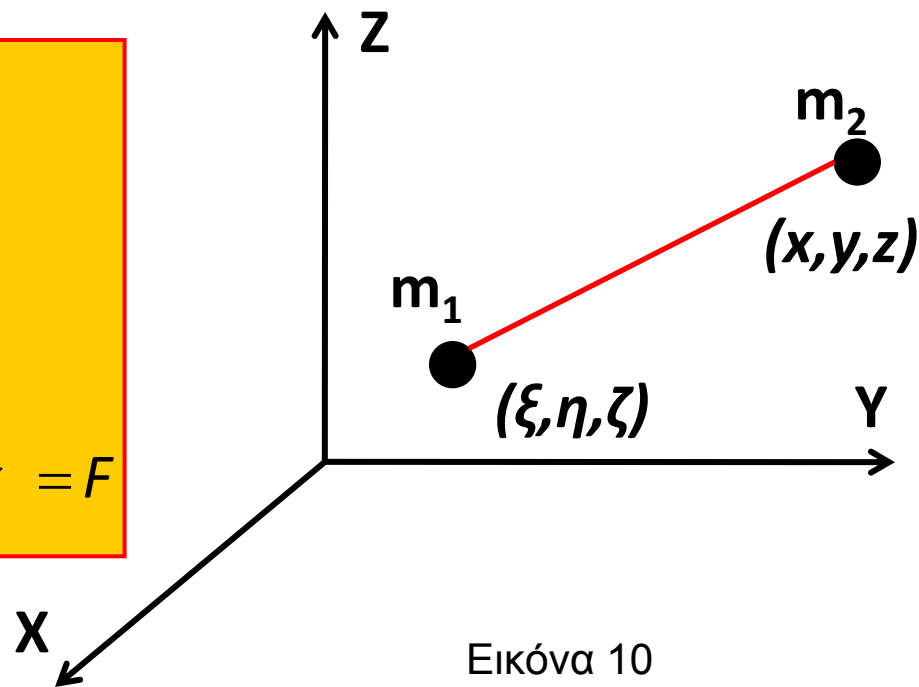
# ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΕΛΞΗΣ

$$V = k \iiint_v \frac{dm}{l} = k \iiint_v \frac{\rho}{l} dv$$



Εικόνα 9

$$\begin{aligned} \text{grad}V &= \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} i + \frac{\partial V}{\partial y} j + \frac{\partial V}{\partial z} k = \\ &= \frac{\partial V}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial x} i + \frac{\partial V}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial y} j + \frac{\partial V}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial z} k = \\ &= -\frac{km}{l^3} (x - \xi) i + (y - \eta) j + (z - \zeta) k = F \end{aligned}$$



Εικόνα 10

$$V = \frac{km}{l}$$

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{kM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \right]$$

- $r, \theta, \lambda$ : οι πολικές συντεταγμένες του σημείου υπολογισμού
- $M$  η μάζα της Γης
- $a$  ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς αναφοράς
- $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$  οι συντελεστές του γήινου δυναμικού έλξης
- $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$  οι πλήρως κανονικοποιημένες γενικευμένες συναρτήσεις *Legendre*

- Προσδιορισμός συνοριακής επιφάνειας
- Εξομαλυσμένο πεδίο βαρύτητας (μικρές τιμές  $\Delta g$ ,  $T$ )

# ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

## ○ Πρόβλημα συνοριακών τιμών *Stokes*

Να υπολογιστεί η αρμονική συνάρτηση  $V$  στο εξωτερικό μιας επιφάνειας  $S$  από τον γραμμικό συνδυασμό της  $V$  και των παραγώγων της  $\partial V / \partial n$  επάνω στην  $S$

$$V_e(r, \theta, \lambda) = R \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{n-1}$$

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_S \Delta g S(\psi) d\sigma$$

**Stokes**

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T$$

# ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Οποιαδήποτε συνάρτηση (ορισμένη από τις τιμές επάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας  $S$ ) είτε είναι αρμονική είτε όχι, μπορεί να αναπτυχθεί σε επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές (δεν αποτελεί όμως λύση των προβλημάτων συνοριακών τιμών)

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)$$

$$\Delta f \geq 0$$

○ Μία αρμονική συνάρτηση μπορεί πάντοτε να αναπτυχθεί σε στερεές σφαιρικές αρμονικές χρησιμοποιώντας τις συνοριακές τιμές της που είναι δοσμένες επάνω σε μια σφαιρική επιφάνεια  $S$  (και αποτελεί λύση των προβλημάτων συνοριακών τιμών)

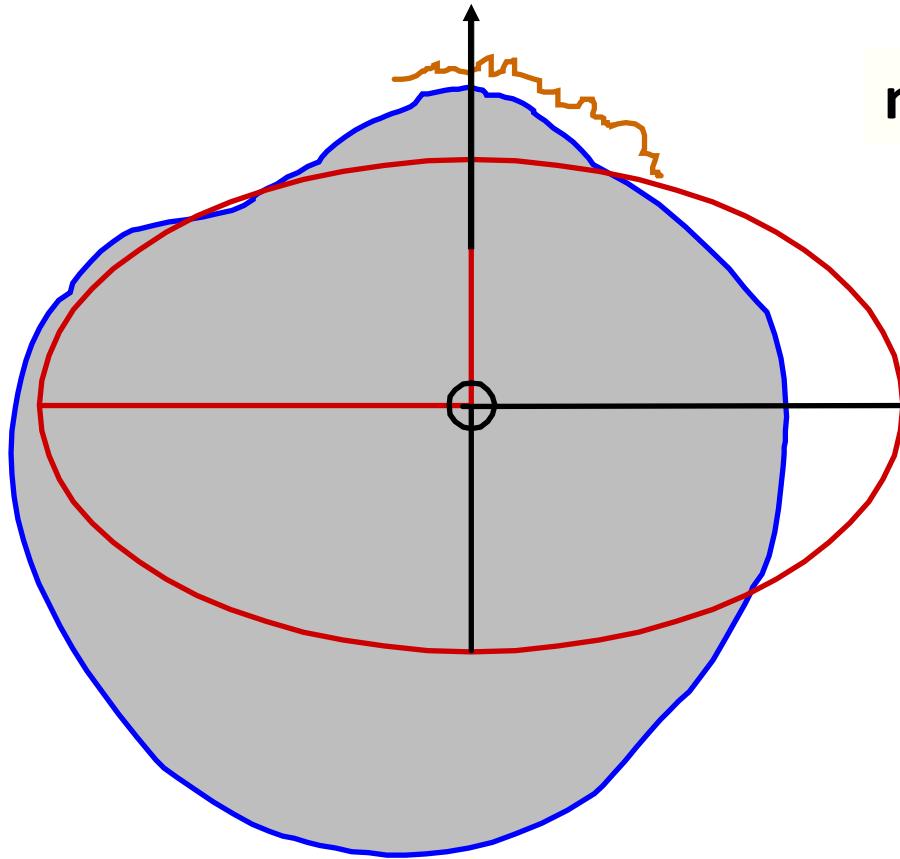
$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n a_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)$$

$$\Delta f = 0$$



## 1η προσέγγιση

η γη προσεγγίζεται με ελλειψοειδές



Εικόνα 11

$\bar{V}$  δυναμικό έλξης του ΕΕΠ

$\Phi$  φυγοκεντρικό δυναμικό

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

δυναμικό κανονικής γης (κανονικής βαρύτητας)  
κανονικό δυναμικό

$$U = \bar{V} + \Phi$$

# ΓΗΙΝΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ - ΣΦΑΙΡΑ

## 2η προσέγγιση

η γη προσεγγίζεται με σφαίρα

$V$  δυναμικό έλξης του ΕΕΠ

$\Phi$  φυγοκεντρικό δυναμικό

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

$$W = V + \Phi$$

δυναμικό βαρύτητας

Εικόνα 12

# ΔΙΑΤΑΡΑΚΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

- Η πραγματική (θεωρητική) ποσότητα μείον ένα κανονικό μέρος (που αποτελεί το μεγαλύτερο τμήμα) και υπολογίζεται από κάποιο μοντέλο

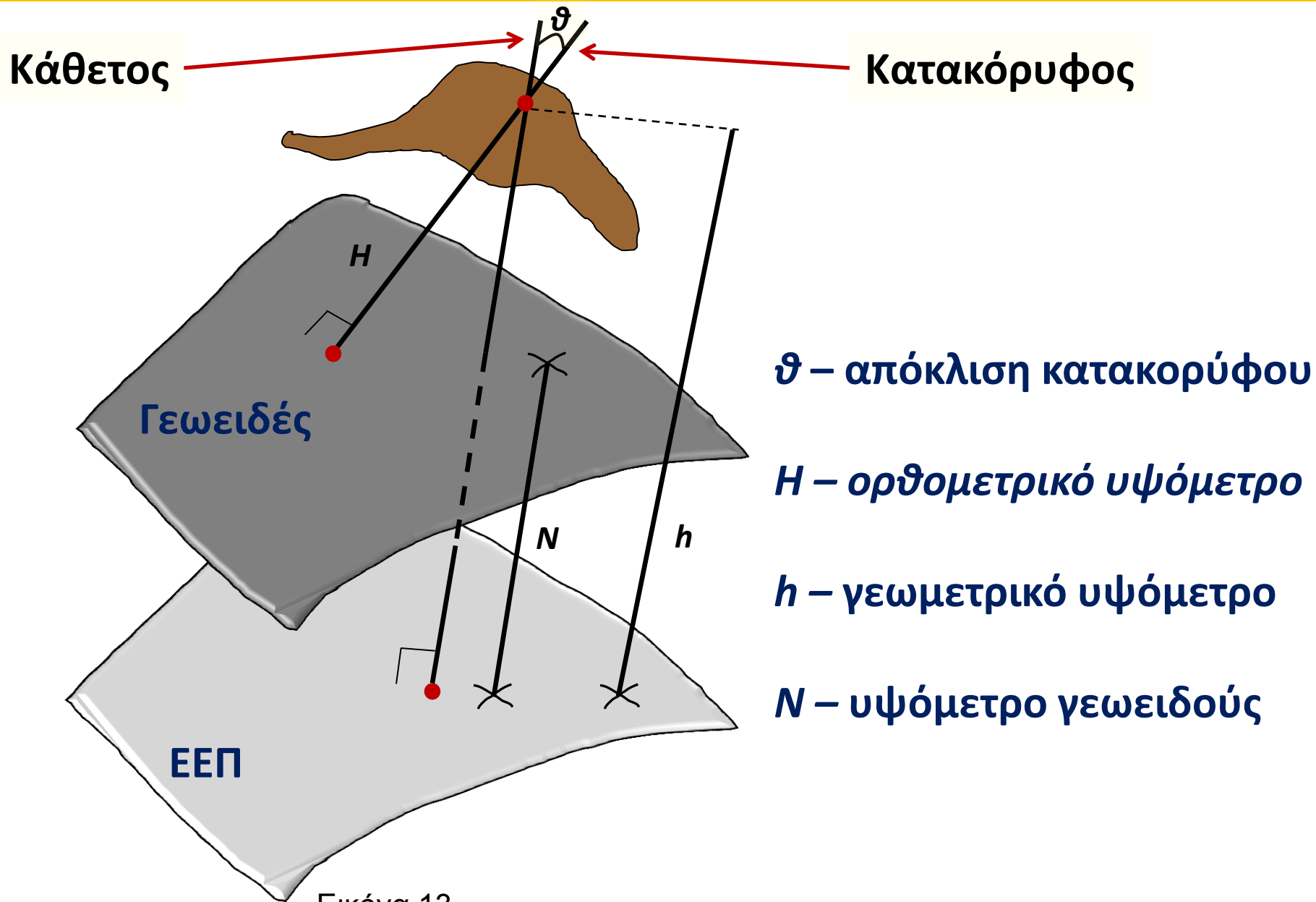


$$\text{Διαταρακτικό δυναμικό } T$$
$$T = W - U$$



- Το πραγματικό (θεωρητικό) γήινο δυναμικό βαρύτητας μείον ένα κανονικό μέρος (που αποτελεί το μεγαλύτερο τμήμα) και υπολογίζεται από κάποιο μοντέλο (ΕΕΠ)

# ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ – ΚΑΘΕΤΟΣ & ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟΣ



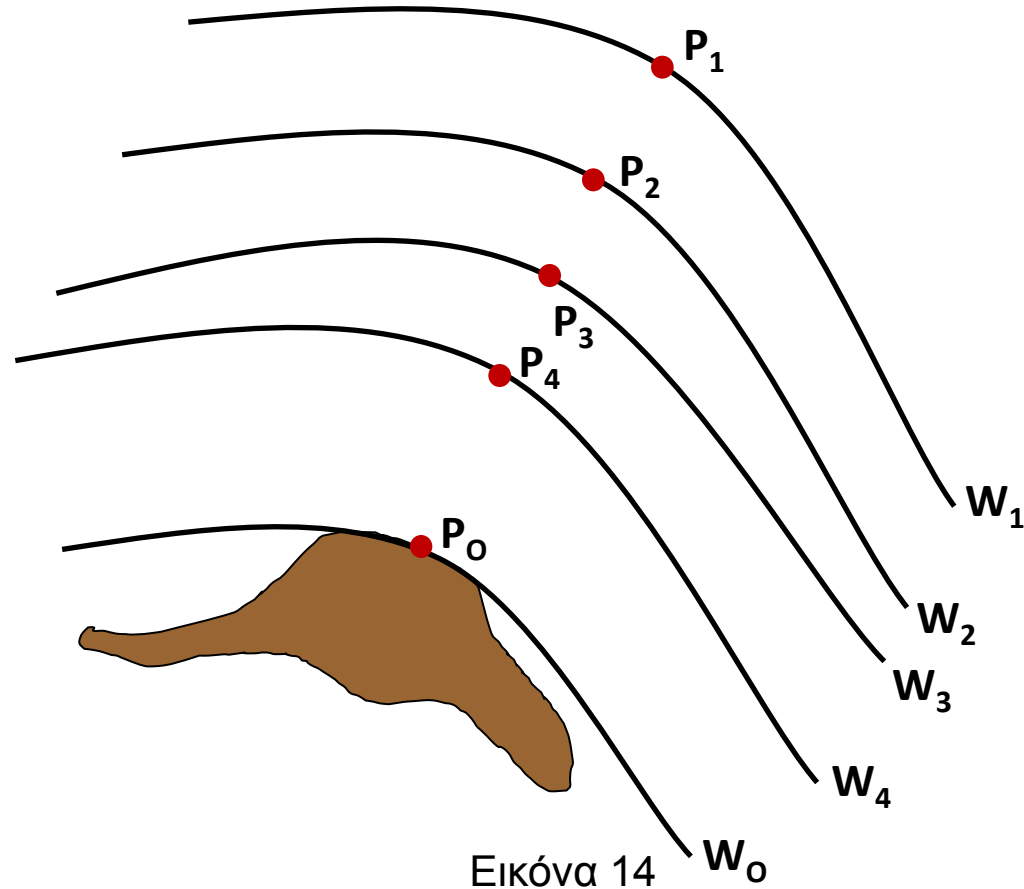
Εικόνα 13

# ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΠΕΔΙΟΥ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

$$W(x, y, z) = \text{σταθερό}$$

$$W_1 \neq W_2 \neq W_3 \neq W_4$$

Οι ισοδυναμικές επιφάνειες δεν είναι παράλληλες αλλά τέμνονται!!!!

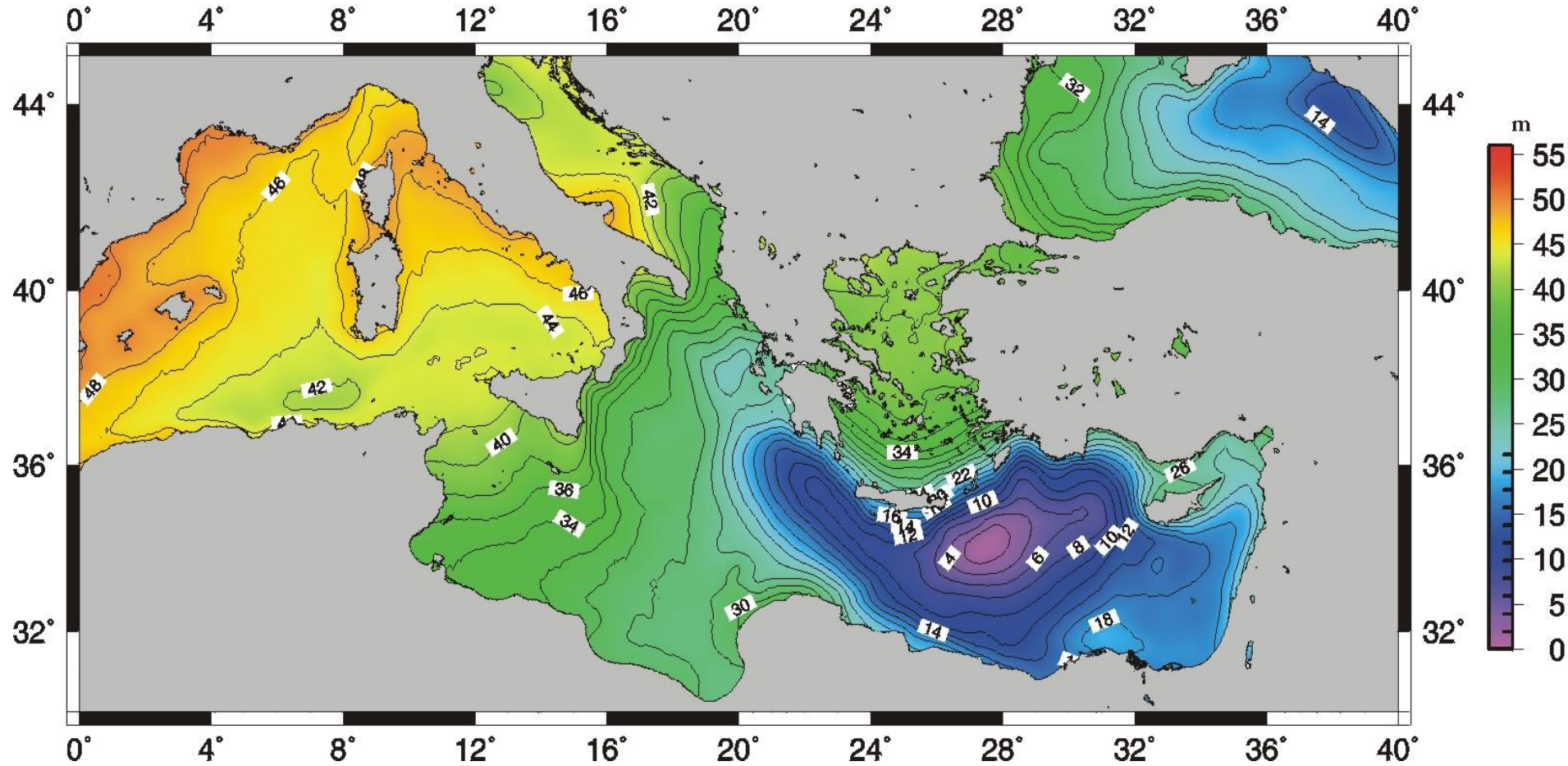


Η ισοδυναμική επιφάνεια του γήινου πεδίου βαρύτητας που προσεγγιστικά ταυτίζεται με τη μέση στάθμη των θαλασσών σε παγκόσμια κλίμακα αποτελεί το μαθηματικό μοντέλο της Γης και ονομάζεται **ΓΕΩΕΙΔΕΣ**  $\rightarrow (W=W_0)$

# ΤΟ ΓΕΩΕΙΔΕΣ ΣΤΗ ΜΕΣΟΓΕΙΟ

Geoid heights in the Mediterranean Sea from ERS1-GM altimetry mission  
(Contour interval 2m)

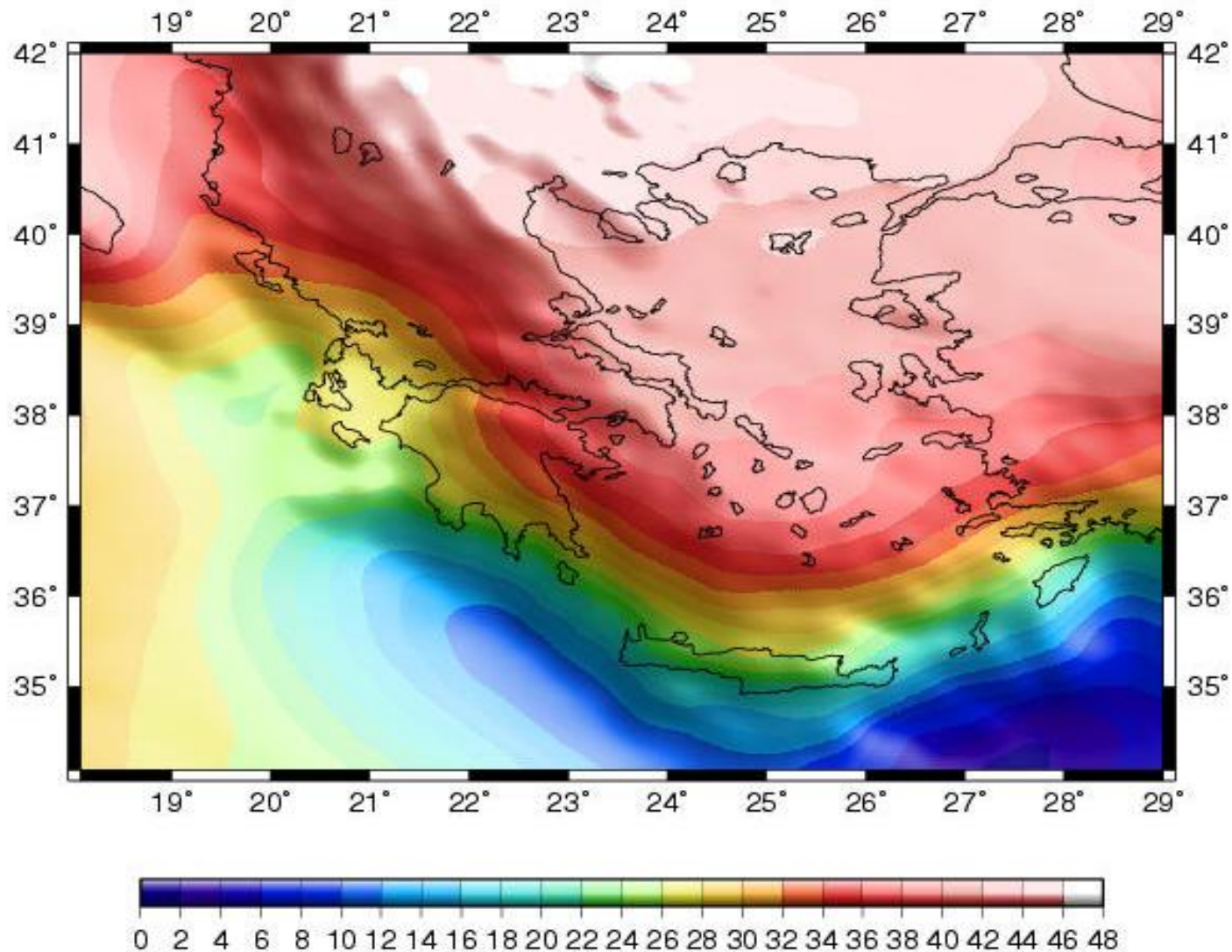
min=0.727 max=57.754 mean=33.348 std=11.360 rms=35.230



Εικόνα 15

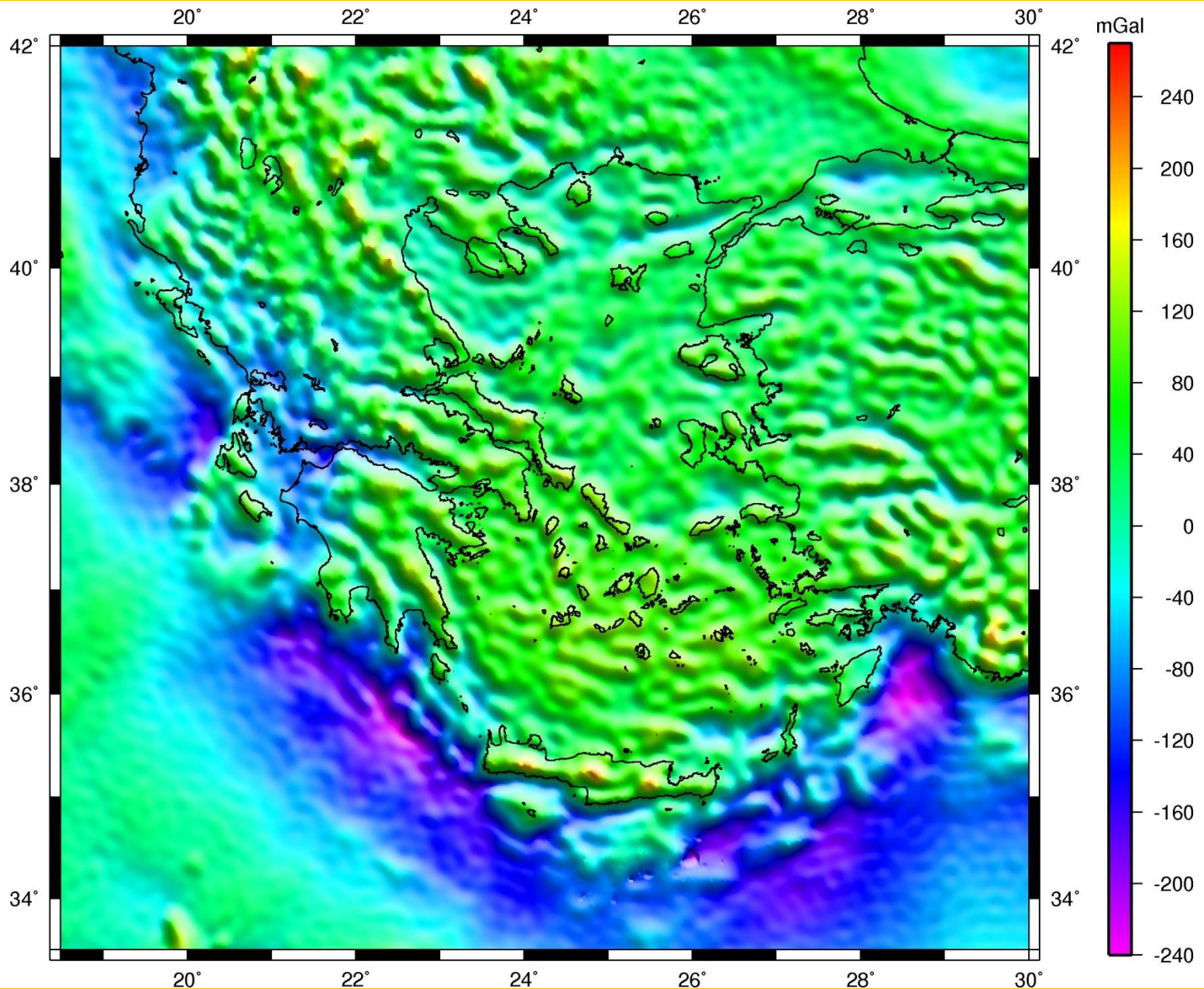


# ΤΟ ΓΕΩΕΙΔΕΣ ΣΤΟΝ ΕΛΛΑΔΙΚΟ ΧΩΡΟ



Εικόνα 16

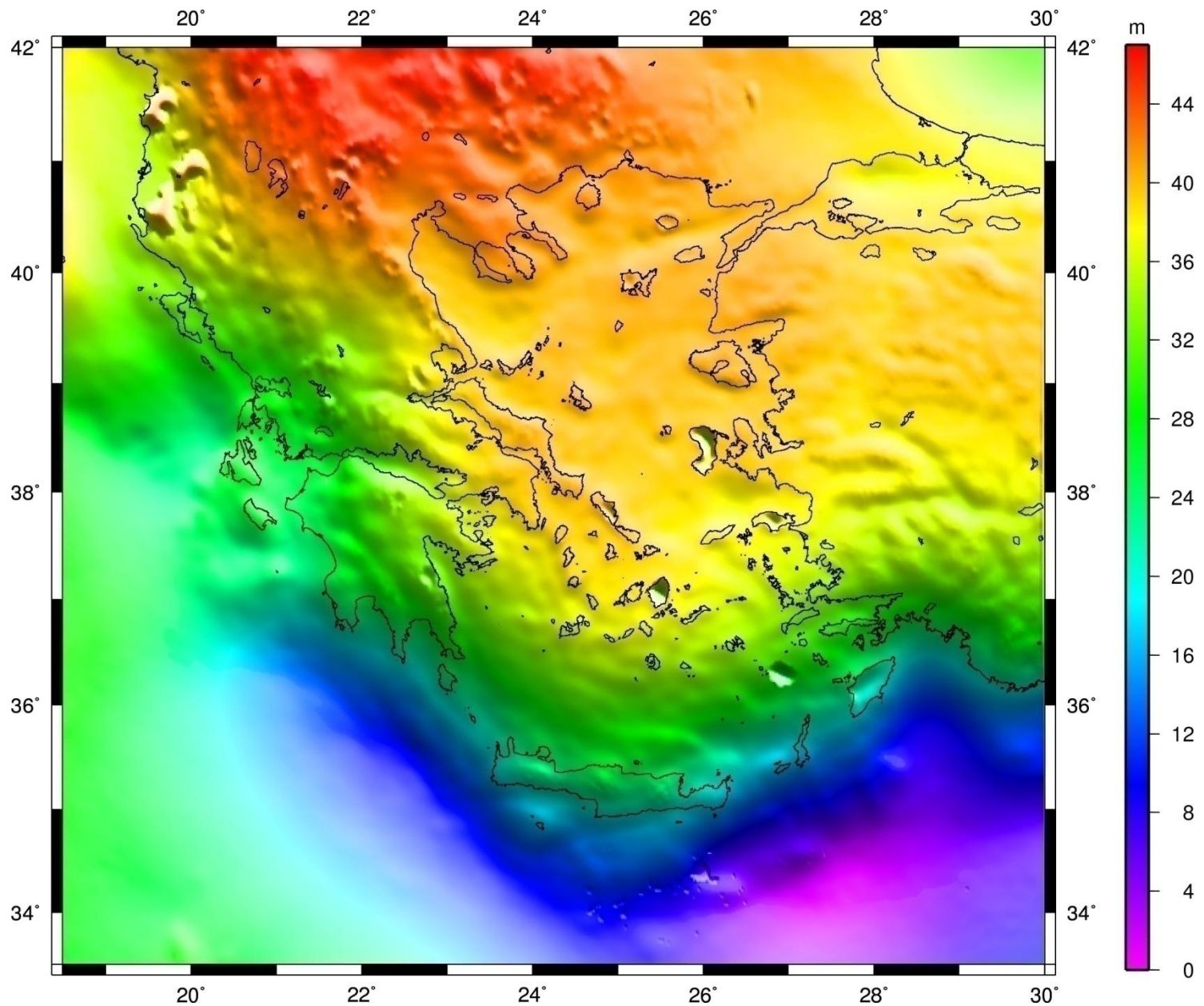
# ΑΝΩΜΑΛΙΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΣΤΟΝ ΕΛΛΑΔΙΚΟ ΧΩΡΟ



Εικόνα 17

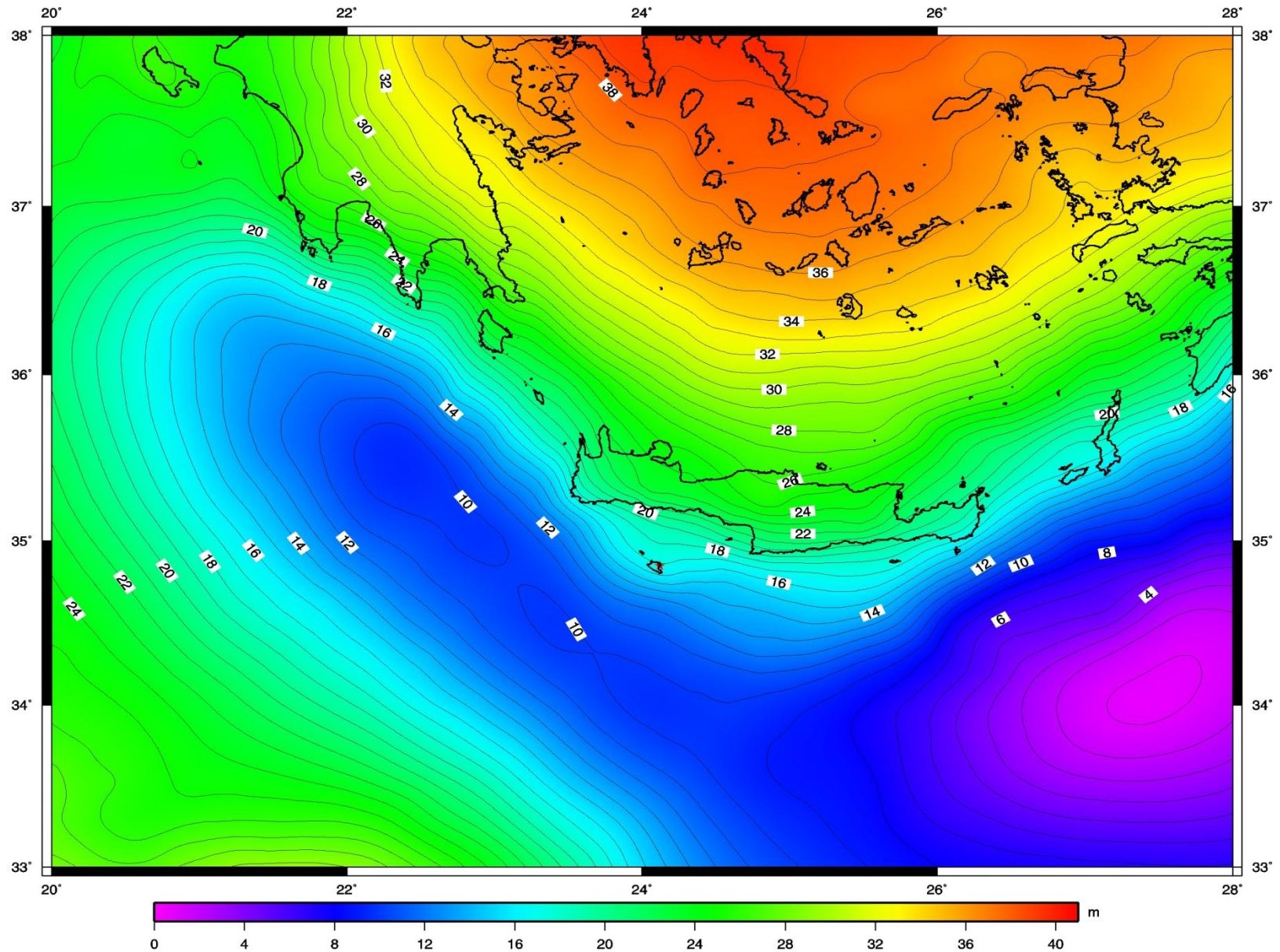


# ΤΟ ΓΕΩΕΙΔΕΣ ΣΤΟΝ ΕΛΛΑΔΙΚΟ ΧΩΡΟ



Εικόνα 18

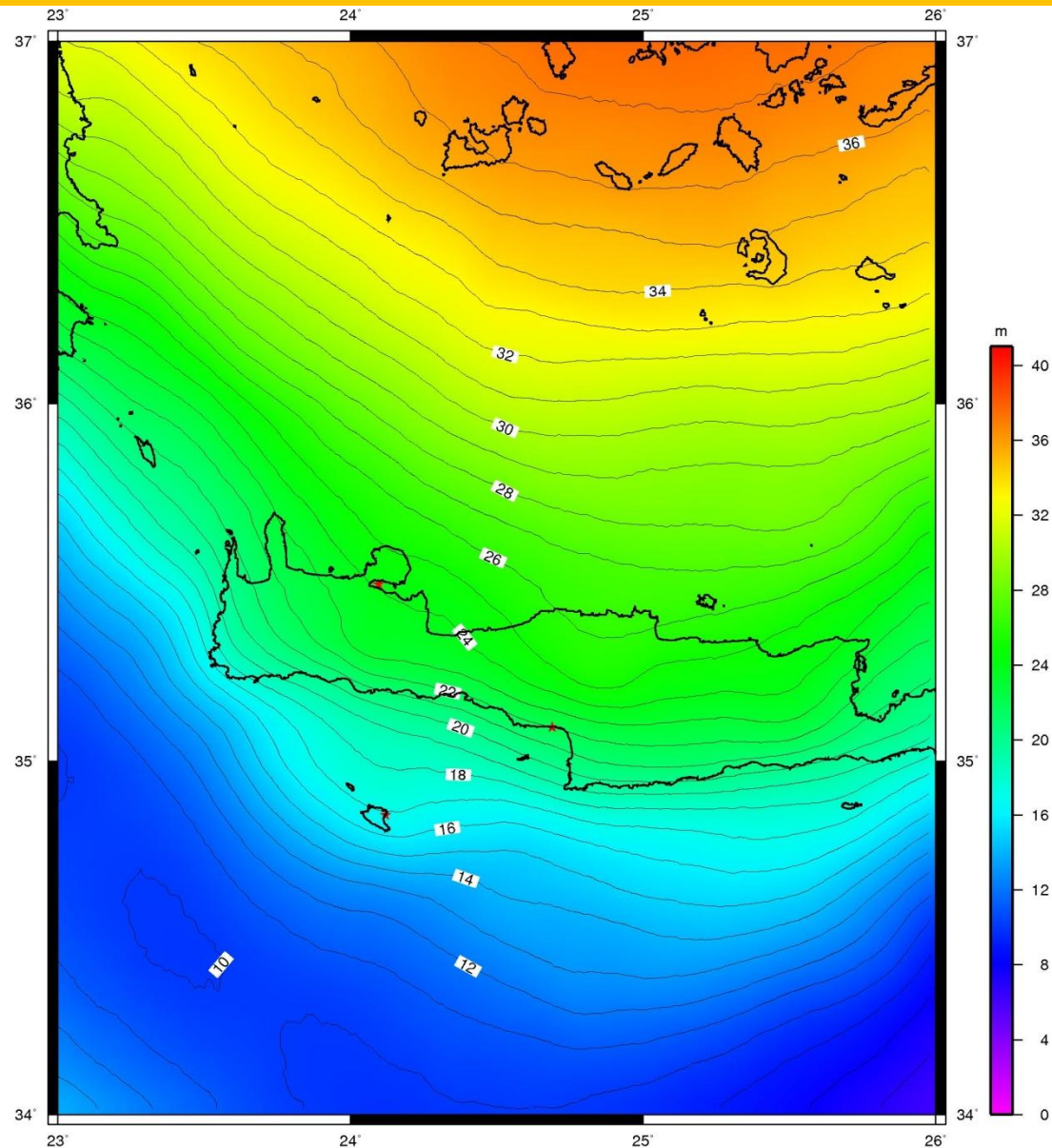
# ΤΟ ΓΕΩΕΙΔΕΣ ΣΤΟΝ ΕΛΛΑΔΙΚΟ ΧΩΡΟ



Εικόνα 19

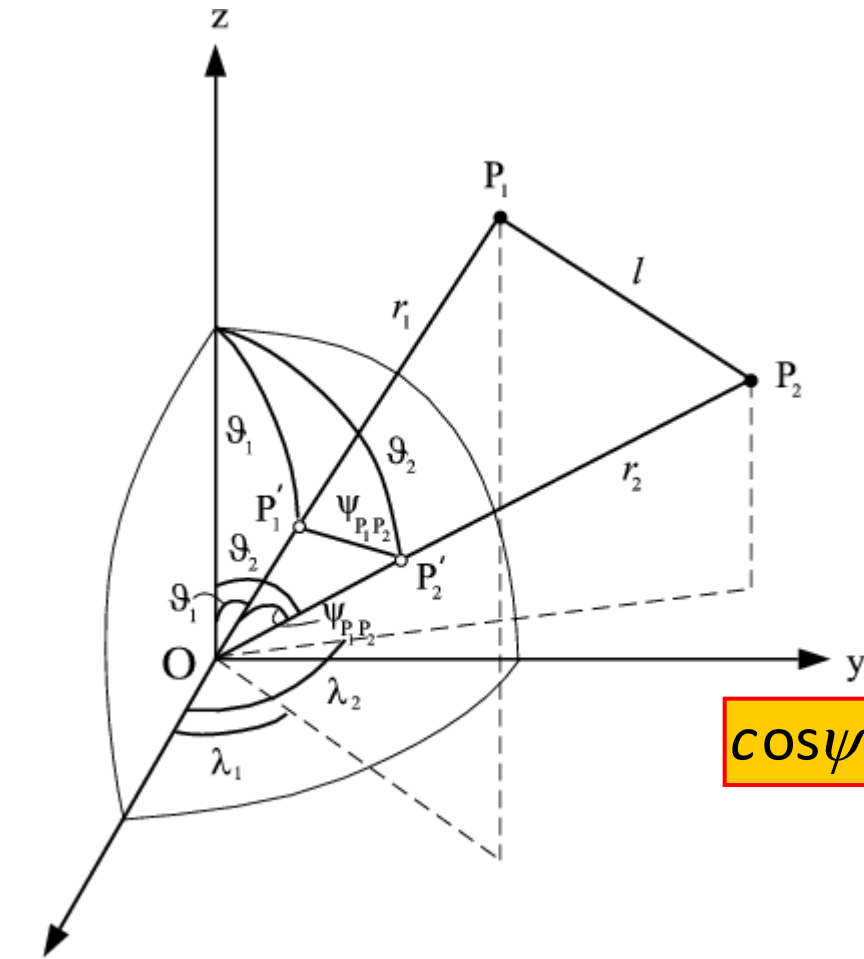


# ΓΕΩΕΙΔΕΣ ΤΟΠΙΚΗΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ



Εικόνα 20

# ΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΤΟΥ LEGENDRE



$$P_1 \quad r_1, \theta_1, \lambda_1$$

$$P_2 \quad r_2, \theta_2, \lambda_2$$

$$\theta = 90^\circ - \phi$$

Πολική γωνία

$$l^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \psi$$

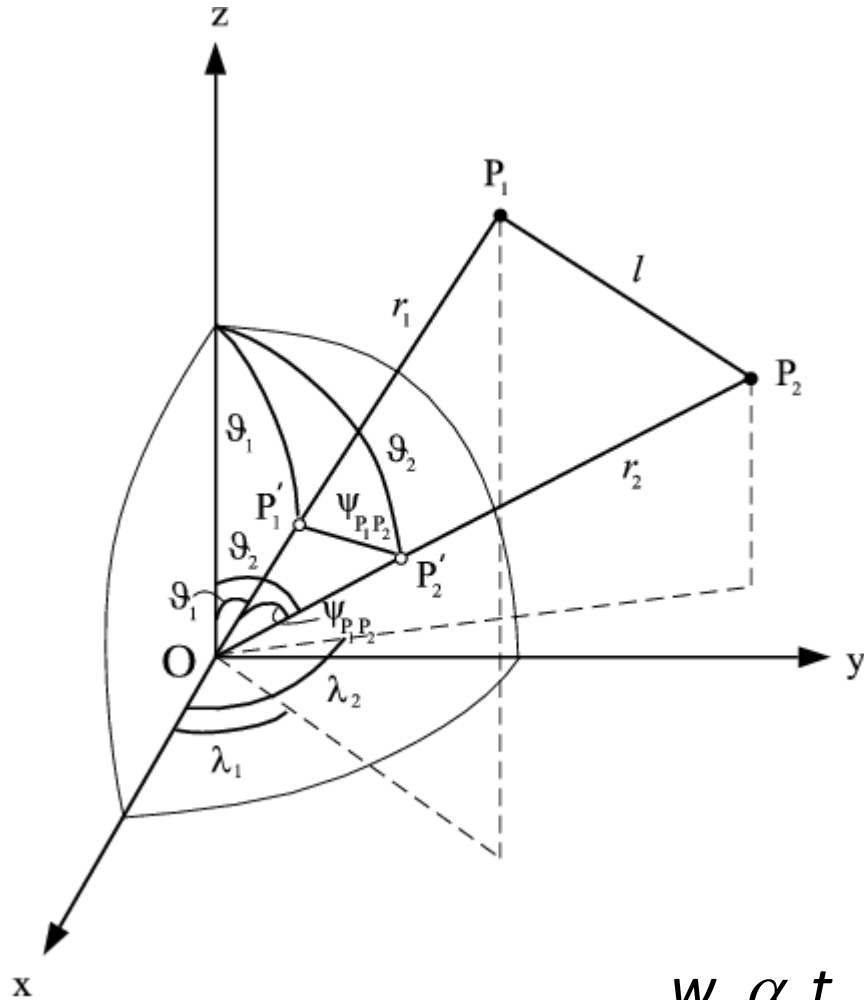
$$\cos \psi = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \lambda_1 - \lambda_2$$

Εικόνα 21

$$t = \cos \psi$$

$$a = \frac{r_2}{r_1} < 1$$

# ΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΤΟΥ LEGENDRE



$$l^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \psi$$

$$l = r_1 \sqrt{1 - \frac{2r_2 \cos \psi}{r_1} + \frac{r_2^2}{r_1^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r_1} \left( 1 - 2t \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_2^2}{r_1^2} \right)$$

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r_1 \sqrt{1 - 2at + a^2}} = \frac{1}{r_1} w_{\alpha, t}$$

$$w_{\alpha, t} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha t + \alpha^2}}$$

$w_{\alpha, t}$



παράγουσα ή γεννήτρια συνάρτηση

Ανάπτυξη σε σειρά κατά Taylor

$$w(\alpha, t) = w(0, t) + \alpha \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)_0 + \frac{1}{2!} \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right)_0 + \dots$$

$$\left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)_0 = t \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right)_0 = 3t^2 - 1$$

$$w(\alpha, t) = 1 + \alpha t + \alpha^2 \left( \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(t)$$

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial^n w}{\partial \alpha^n} \right)$$

$P_n(t)$   $\longrightarrow$  πολυώνυμα Legendre

# ΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΤΟΥ LEGENDRE

Το αντίστροφο της απόστασης  $1/l$  σε σειρά πολυωνύμων του Legendre

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^n P_n \cos \psi$$



$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_2^n}{r_1^{n+1}} P_n \cos \psi$$

$$P_0 \quad t = 1$$

$$P_1 \quad t = t$$

$$P_2 \quad t = \frac{1}{2} 3t^2 - 1$$

Αναδρομικές σχέσεις για τα πολυώνυμα του Legendre

$$(n+1) P_{n+1} = 2n+1 t P_n - n P_{n-1}$$

$$P_3 \quad t = \frac{1}{2} 5t^3 - 3t \quad P_4 \quad t = \frac{1}{8} 35t^4 - 30t^2 + 3 \quad P_5 \quad t = \frac{1}{8} 63t^5 - 70t^3 + 15t$$

Κλειστή σχέση (closed formula) για τα πολυώνυμα του Legendre

$$P_n(t) = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j 2^n (n-1)! j! (n-2j)!}{2^n (n-1)! j! (n-2j)!} t^{n-2j}$$

$$k = \frac{n}{2} \quad \text{για } n - \text{άρτιο}$$

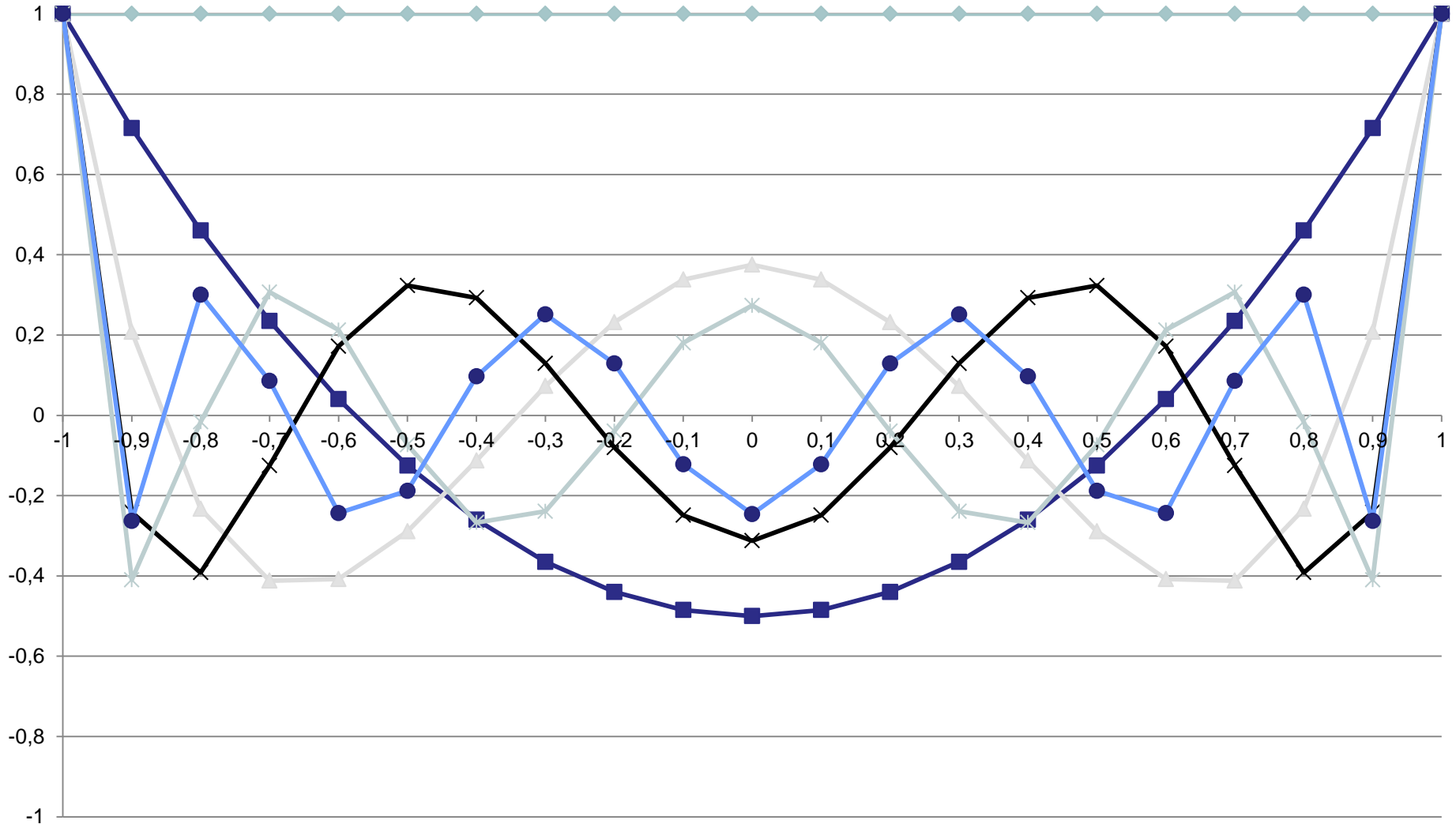
$$k = \frac{n-1}{2} \quad \text{για } n - \text{περιττό}$$



# ΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΤΟΥ LEGENDRE

## Άρτια πολυώνυμα Legendre

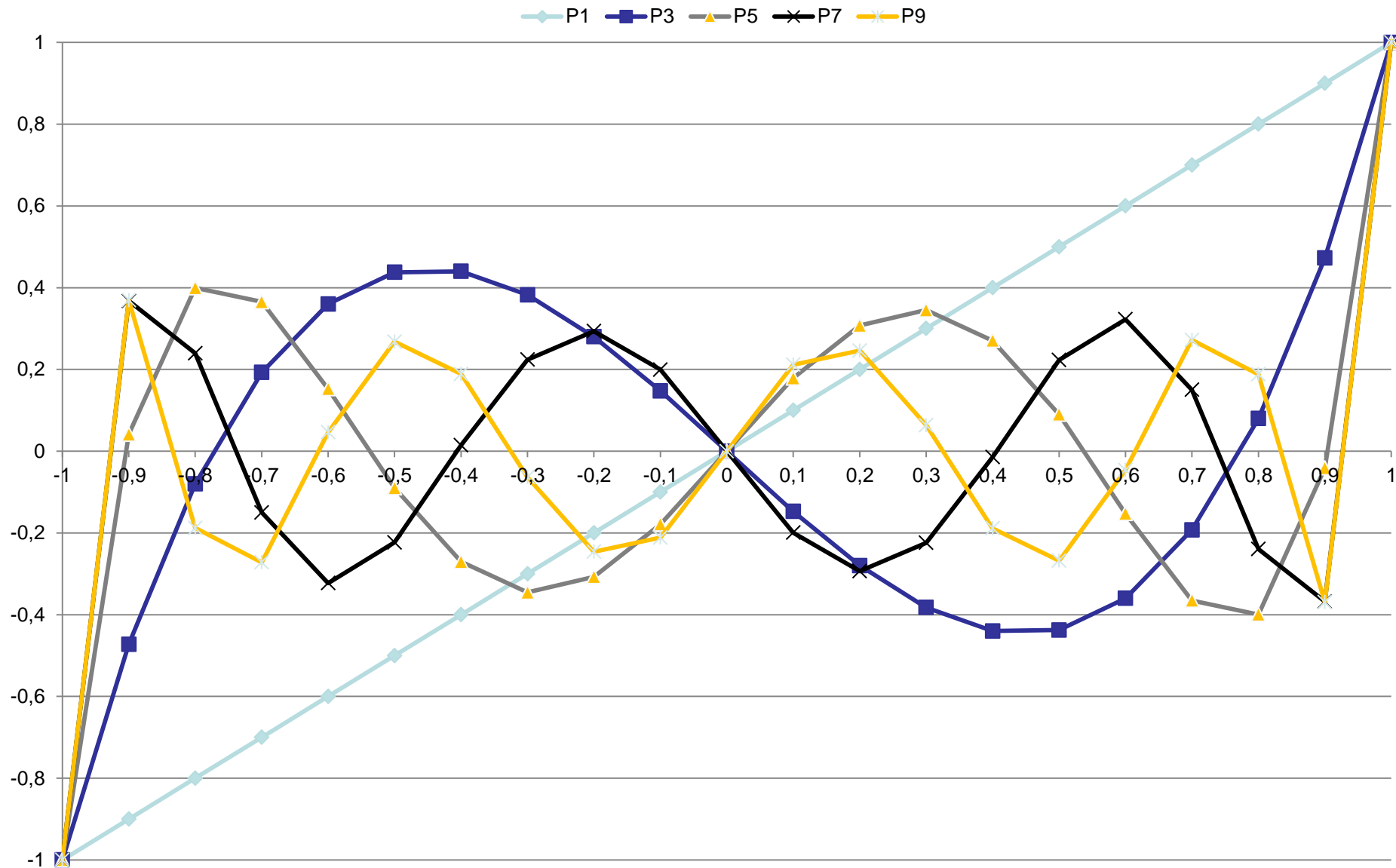
P0 P2 P4 P6 P8 P10



Εικόνα 22

# ΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΤΟΥ LEGENDRE

## Περίττα πολυώνυμα Legendre



Εικόνα 23

# ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ LEGENDRE

- Τα πολυώνυμα του Legendre είναι ειδικές περιπτώσεις των γενικευμένων συναρτήσεων του Legendre  $P_{nm}(t)$  όπου

$n \rightarrow$  βαθμός ανάπτυξης &  $m \rightarrow$  τάξη ανάπτυξης

- Για τις γενικευμένες συναρτήσεις του Legendre  $P_{nm}(t)$  ισχύει πάντοτε ότι

$$0 \leq m \leq n$$

δηλαδή η τάξη ανάπτυξης της συνάρτησης δεν μπορεί να υπερβαίνει τον βαθμό ανάπτυξης

$$P_{nm} \equiv P_{nm} t$$

$$t = \cos \psi$$

# ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ LEGENDRE

$$P_{nm} \equiv P_{nm} t$$

## Αναδρομικές σχέσεις των συναρτήσεων Legendre

$$P_{n,m+2} = 2m+1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} P_{n,m+1} - \frac{n-m}{n+m+1} P_{n,m}$$

$$\sqrt{1-t^2} P_{n,m} = \frac{1}{2n+1} P_{n+1,m+1} - P_{n-1,m+1}$$

$$2n+1 t P_{n,m} = n+m P_{n-1,m} + n-m+1 P_{n+1,m}$$

$$n+m+1 \sqrt{1-t^2} P_{n,m} = P_{n+1,m+1} - t P_{n,m+1}$$

$$n-m \sqrt{1-t^2} P_{n,m} = t P_{n,m+1} - P_{n-1,m+1}$$

$$P_{00} = 1$$

$$P_{10} = t$$

$$P_{11} = \sqrt{1-t^2}$$

•  
•  
•

# ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ LEGENDRE

	m=0	1	2	3	4
n					
0	1				
1	t	$\sqrt{1-t^2}$			
2	$\frac{3t^2 - 1}{2}$	$3t\sqrt{1-t^2}$	$3(1-t^2)$		
3	$\frac{5t^3 - 3t}{2}$	$\frac{3\sqrt{1-t^2}(5t^2 - 1)}{2}$	$15(1-t^2)$	$15(1-t^2)^{3/2}$	
4	$\frac{35t^4 - 30t^2 + 3}{8}$	$\frac{5t\sqrt{1-t^2}(7t^2 - 3)}{2}$	$\frac{-15(7t^4 - 8t^2 + 1)}{2}$	$105(1-t^2)^{3/2}$	$105(1-t^2)^2$

Εικόνα 24

# ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ LEGENDRE

Κλειστή σχέση για τις γενικευμένες συναρτήσεις του Legendre

$$P_{nm}(t) = \frac{1-t^2}{2^n} \sum_{j=0}^{n-m/2} \frac{(-1)^j 2n-2j!}{j! (n-j)! (n-m-2j)!} t^{n-m-2j}$$

$$P_{nm}(t) = \frac{2n-1}{n-m} t P_{n-1,m}(t) - \frac{n+m-1}{n-m} P_{n-2,m}(t) \quad n-2 \geq m$$

$$P_{nm}(t) = 2m-1 \frac{t}{1-t^2} P_{n,m-1}(t) - \frac{n-m+2}{n+m+1} P_{n,m-2}(t) \quad m \geq 2$$

# ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

Η εξίσωση του Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

*Λύση αυτής της εξίσωσης αποτελούν οι ομάδες συναρτήσεων*

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta, \lambda)$$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \lambda)$$

$Y_n(\theta, \lambda)$

Επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές

$r^n Y_n(\theta, \lambda)$  &  $\frac{1}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \lambda)$

Στερεές σφαιρικές αρμονικές



# ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

Συναρτήσεις Legendre  $\chi \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases} \Rightarrow$  Επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές

$$R_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos\theta) \cos m\lambda$$

$$S_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos\theta) \sin m\lambda$$

**Για  $n=0$**

$$P_{00}(\cos\theta) \equiv P_0(\cos\theta)$$

**Για  $n=1$**

$$P_{10}(\cos\theta) \equiv P_1(\cos\theta)$$

$$P_{11}(\cos\theta) \cos\lambda$$

$$P_{11}(\cos\theta) \sin\lambda$$

**Για  $n=2$**

$$P_{20}(\cos\theta) \equiv P_2(\cos\theta)$$

$$P_{21}(\cos\theta) \cos\lambda$$

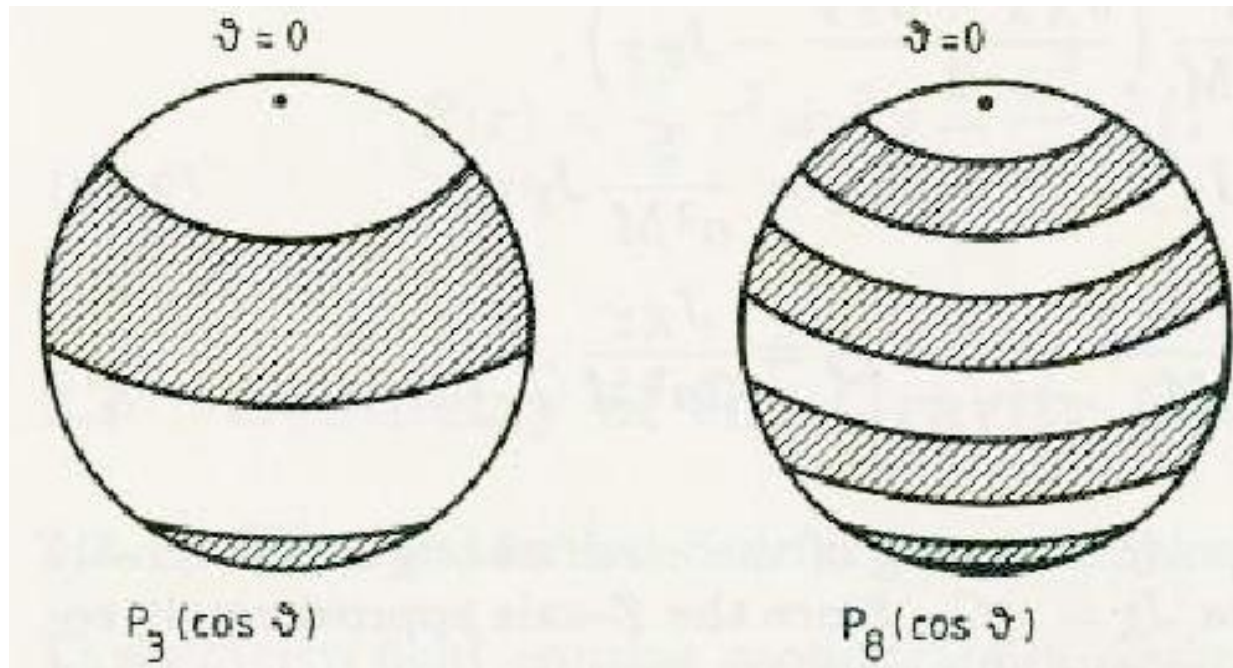
$$P_{21}(\cos\theta) \sin\lambda$$

$$P_{22}(\cos\theta) \cos 2\lambda$$

$$P_{22}(\cos\theta) \sin 2\lambda$$

# ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

- οι αρμονικές μηδενικής τάξης ( $m=0$ ) ταυτίζονται με τα πολυώνυμα Legendre, αλλάζουν  $n$  φορές πρόσημο στο πεδίο ορισμού τους, είναι ανεξάρτητες από το  $\lambda$  και η γραφική τους παράσταση διαιρεί τη σφαίρα σε ζώνες (αρμονικές ζωνών)



Εικόνα 25

$$\theta = 90^\circ - \phi$$

$$\cos \theta = \sin \phi$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

# ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

οι αρμονικές για  $m \neq 0$  και  $n \neq m$  αλλάζουν πρόσημο  $(n-m)$  φορές στο  $0 \leq \theta \leq \pi$  και οι συναρτήσεις  $\cos m\lambda$ ,  $\sin m\lambda$  έχουν  $2m$  ρίζες στο  $0 < \lambda < 2\pi$ , διαιρούν την επιφάνεια της σφαίρας σε τραπέζια, όπου τα πρόσημα των αρμονικών εναλλάσσονται (*τραπεζοειδείς αρμονικές*)



Εικόνα 26

$$\theta = 90^\circ - \phi$$

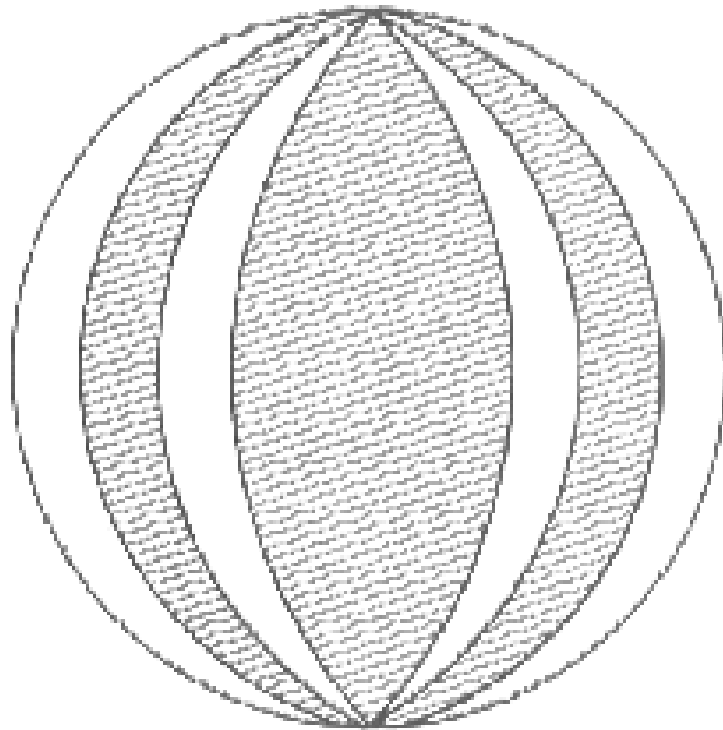
$$\cos \theta = \sin \phi$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

# ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

○ για  $m=n$  η σφαίρα διαιρείται σε θετικούς και αρμονικούς τομείς και οι αρμονικές ονομάζονται *τομοειδείς αρμονικές*



$$P_{7,7}(\cos \theta) \begin{cases} \cos 7\lambda \\ \sin 7\lambda \end{cases}$$

Εικόνα 27

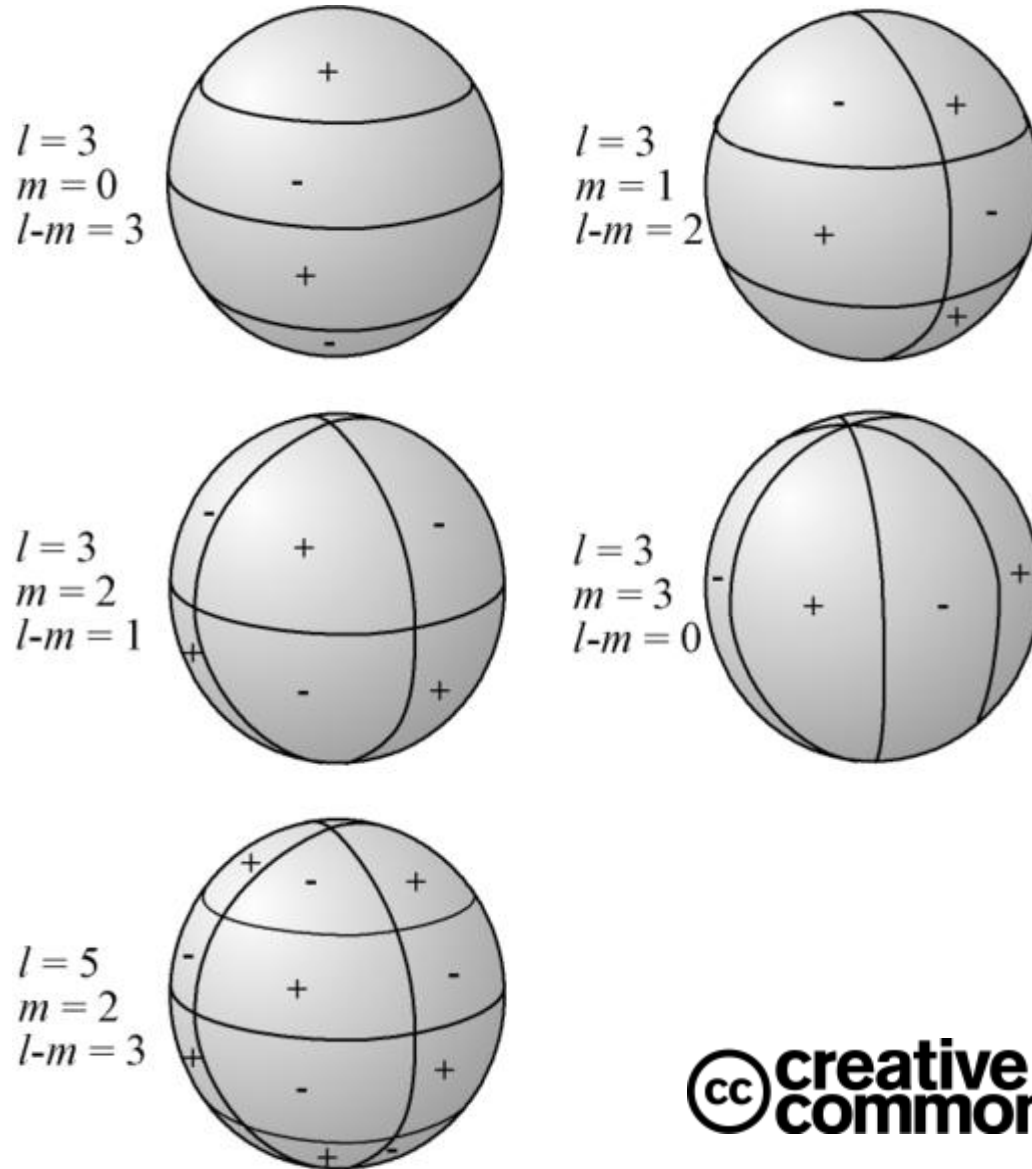
$$\theta = 90^\circ - \phi$$

$$\cos \theta = \sin \phi$$

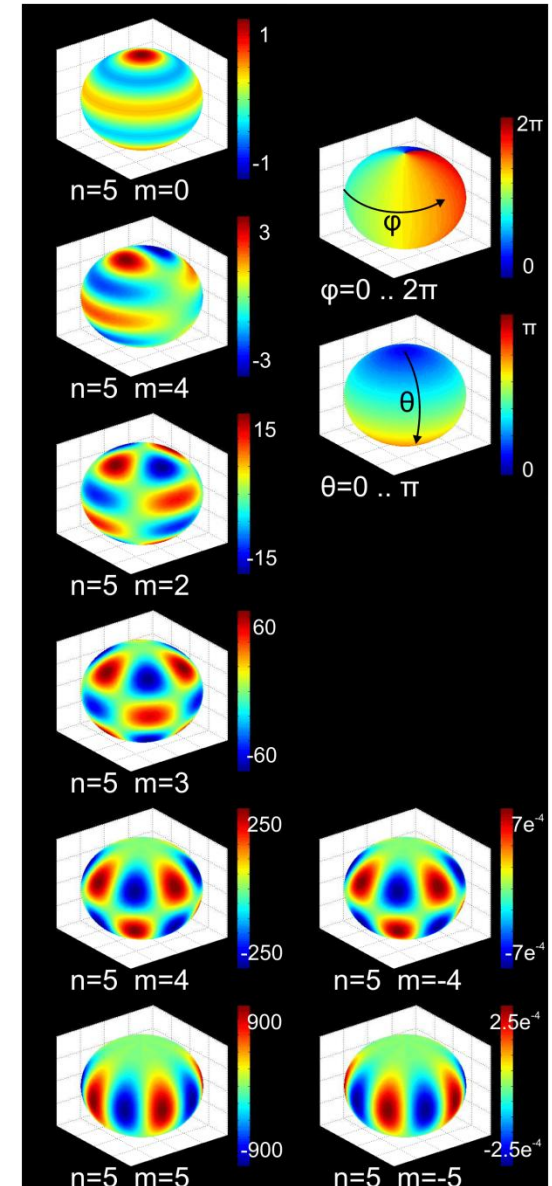
$$-1 \leq t \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

# ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ



Εικόνα 28



Εικόνα 29





# ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

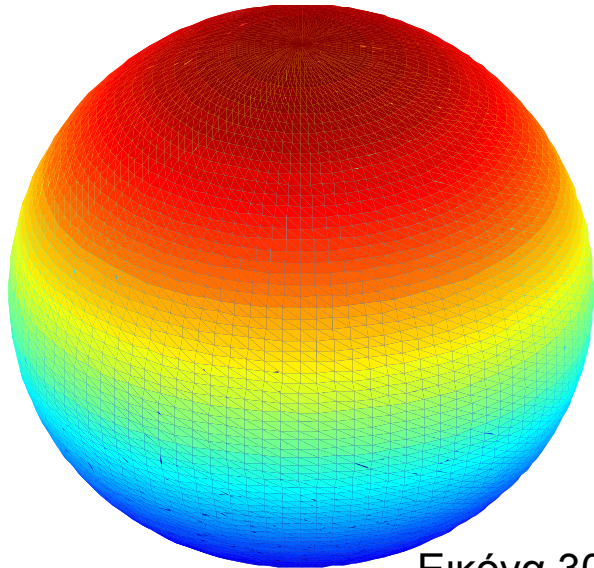
$m$   
 $n$

$0$

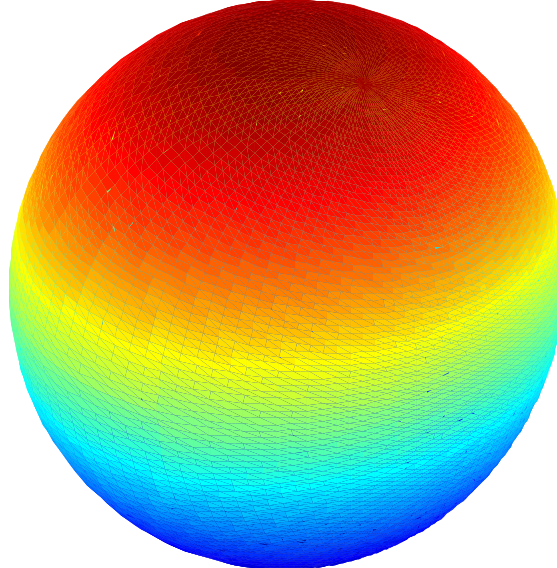
$1$

$2$

$1$

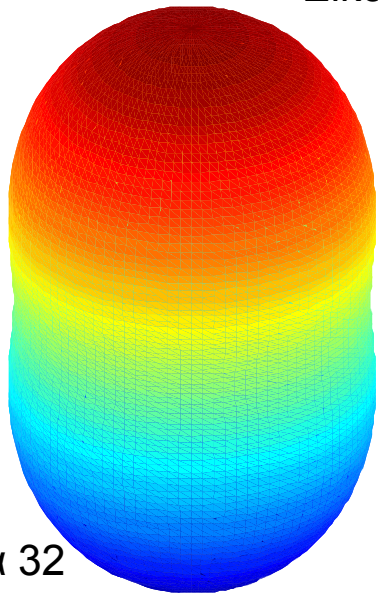


Εικόνα 30

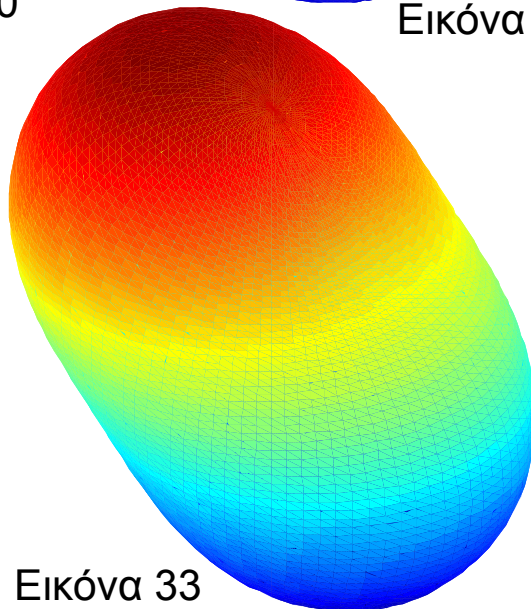


Εικόνα 31

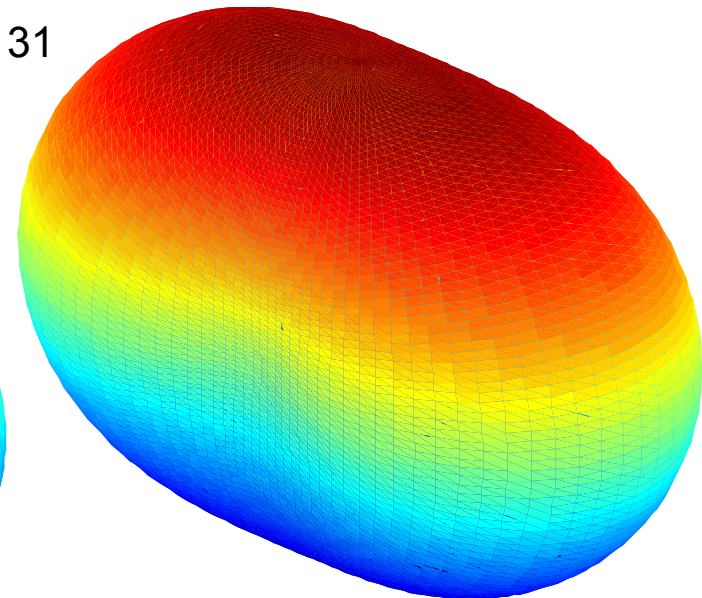
$2$



Εικόνα 32



Εικόνα 33



Εικόνα 34

# ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

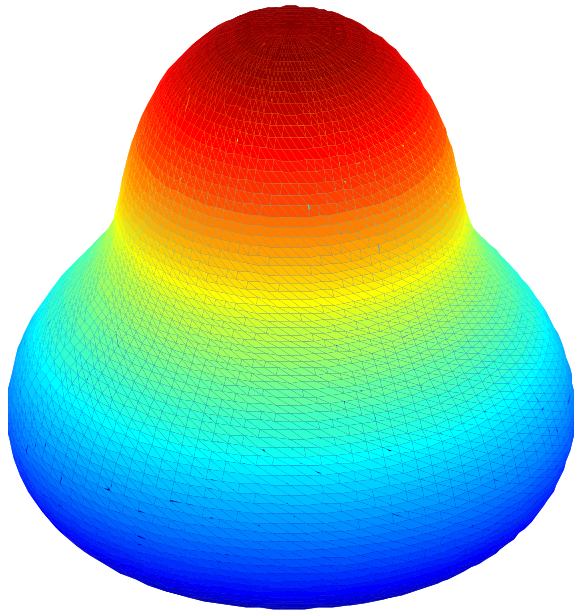
$m$   
 $n$

0

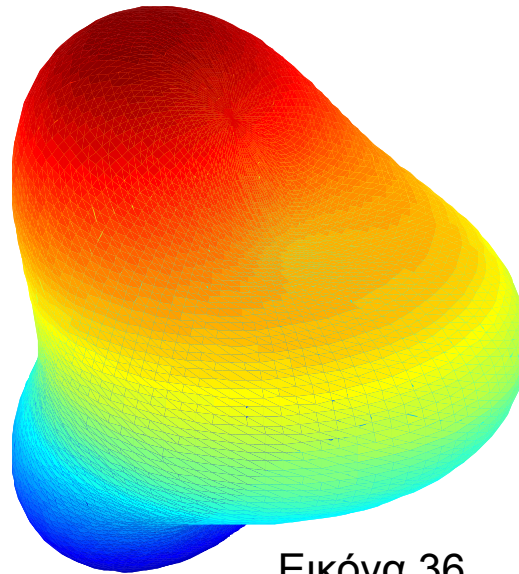
1

2

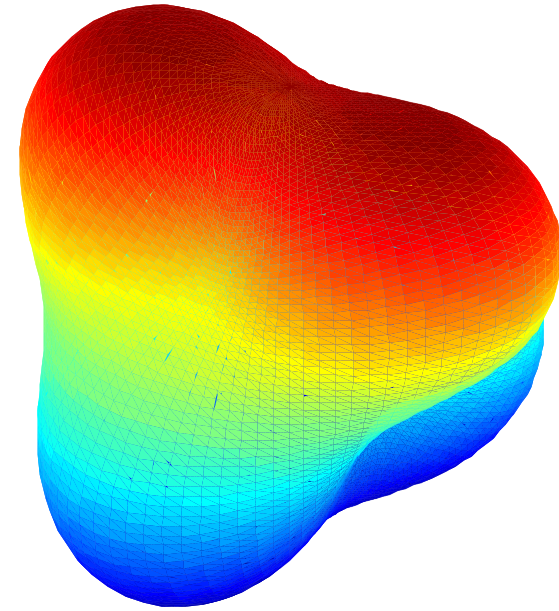
3



Εικόνα 35

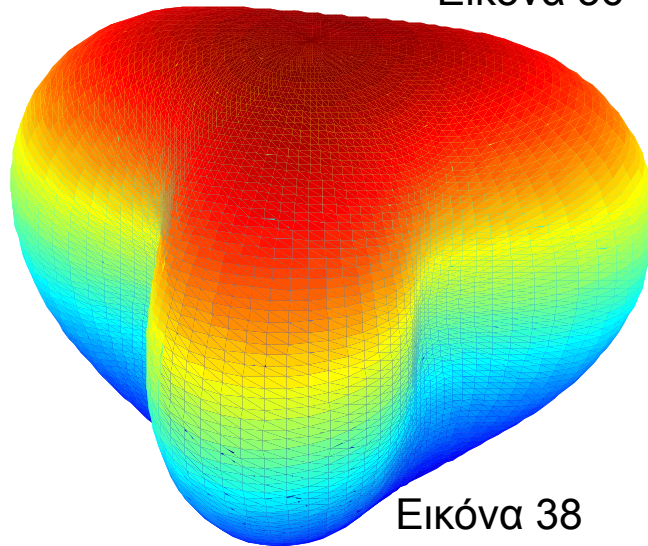


Εικόνα 36



Εικόνα 37

3,3



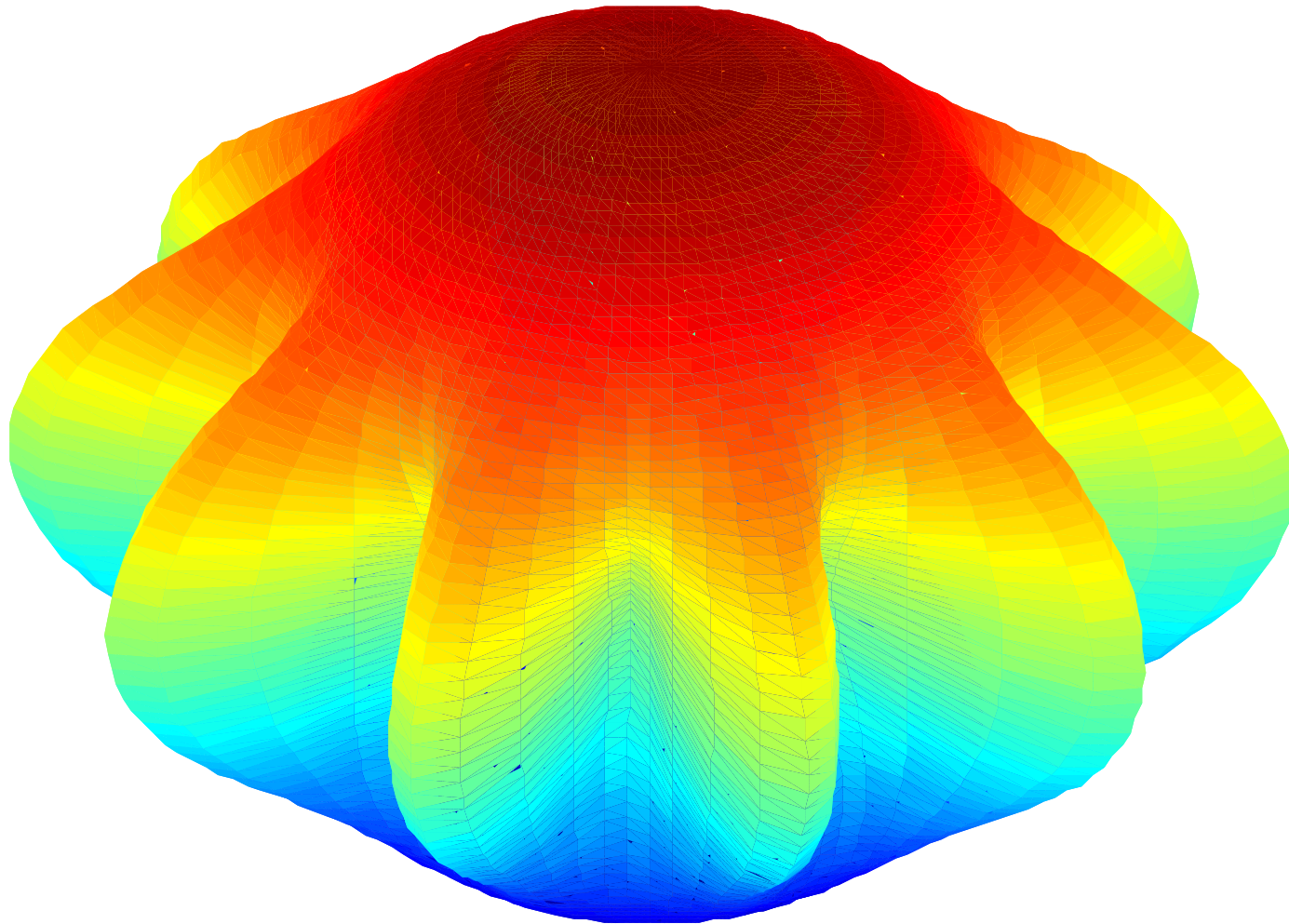
Εικόνα 38



○ για  $m=n=10$  τι αρμονικές θα έχω;

# ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

ο για  $m=n=10$  τι αρμονικές θα έχω;



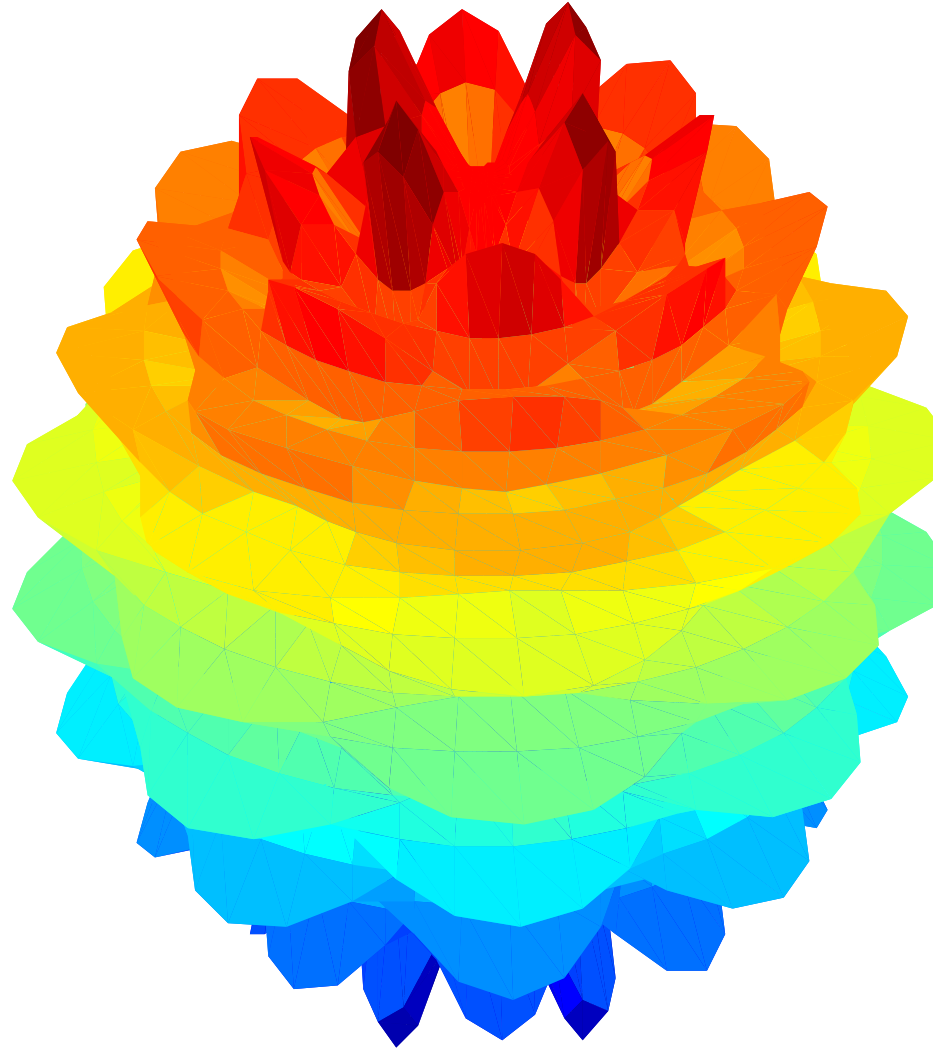
Εικόνα 39

$n=m=10 \rightarrow$  τομειοειδείς αρμονικές (10 τομείς)

○ για  $n=20$  &  $m=4$  τι αρμονικές θα έχω;

# ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

ο για  $n=20$  &  $m=4$  τι αρμονικές θα έχω;



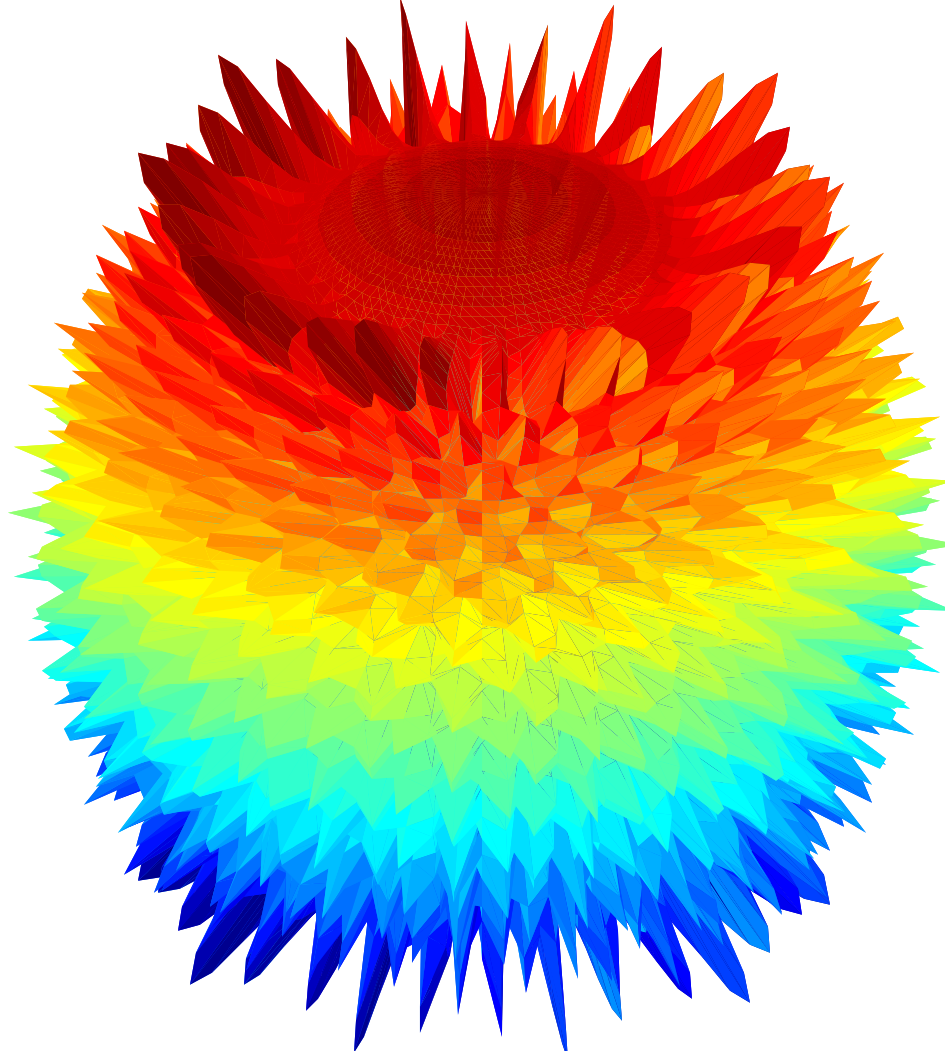
Εικόνα 40

$n=20$  &  $m=4 \rightarrow$  τραπεζοειδείς αρμονικές

○ για  $n=50$  &  $m=30$  τι αρμονικές θα έχω;

# ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΕΣ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

ο για  $n=50$  &  $m=30$  τι αρμονικές θα έχω;



Εικόνα 41

$N=50$  &  $m=30$   $\rightarrow$  τραπεζοειδείς αρμονικές

- Όσο αυξάνεται ο βαθμός και η τάξη τόσο αυξάνεται και η διακριτική ικανότητα
- Υπολογίζονται συνεχώς υψηλότερες σε τάξη αρμονικές

**δηλαδή**

**✓ μικρότερα μήκη κύματος**

**✓ υψηλότερες συχνότητες**



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες
- Εικόνες 1, 2, 8, 9, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41: Αραμπέλος Δ και Τζιαβός ΗΝ (2007) Εισαγωγή στο πεδίο βαρύτητας της Γης. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Εικόνες 11, 12, 13, 14: Leica (2000) Leica GPS Basics. Leica Geosystems AG, v1.0.
- Εικόνα 28: [http://www.uni-stuttgart.de/gi/education/BSC/19840\\_12\\_Physikalische\\_Geodaesie/LNErdm.pdf](http://www.uni-stuttgart.de/gi/education/BSC/19840_12_Physikalische_Geodaesie/LNErdm.pdf) <Τελευταία επίσκεψη: 22.05.2015 >
- Εικόνα 3: Φωτογραφική λήψη εξοπλισμού του Τομέα ΓΤΟ, ΤΑΤΜ, ΑΠΘ
- Εικόνες 4, 5, 6, 7: [http://scintrexltd.com/internal.php?storeCategoryID=1&subcatID=9&s\\_page=Gravity](http://scintrexltd.com/internal.php?storeCategoryID=1&subcatID=9&s_page=Gravity) <Τελευταία επίσκεψη: 22.05.2015>



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Ηλίας Τζιαβός – Γεώργιος Βέργος. «Εισαγωγή στο Πεδίο Βαρύτητας. Σφαιρικές Αρμονικές Συναρτήσεις & Αναπτύγματα Συνιστωσών του Πεδίου Βαρύτητας». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://eclass.auth.gr/courses/OCRS374/>.



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Αριστοτέλειο  
Πανεπιστήμιο  
Θεσσαλονίκης



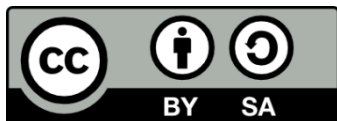
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ  
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



# Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Δαλάκης Νικόλαος  
Θεσσαλονίκη, 16/9/2014



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
*επένδυση στην κοινωνία της γνώσης*  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

