



Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: Εισαγωγή

Ενότητα 4.1: Πιθανότητα – Δεσμευμένη Πιθανότητα- Όρια (I).

Θεόδωρος Χατζηπαντελής
Τμήμα Πολιτικών Επιστημών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





Πιθανότητα

Δεσμευμένη Πιθανότητα – Όρια, Μέρος Ι



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Πλάτων

Σχήμα 1: η θεωρία του Πλάτωνα.



Θωρία του Πλάτωνα

- Ο κόσμος του **Γίνεσθαι** είναι στο κάτω μέρος και ο κόσμος του **Είναι** στο επάνω (με τη μορφή του Αγαθού πάνω από όλα). Κάθε μέρος της γραμμής διαιρείται ξανά. Ο κόσμος του Γίνεσθαι διαιρείται στον κόσμο των **φυσικών αντικειμένων** στη κορυφή και στις αντανakλάσεις αυτών (π.χ. στο νερό) στο κάτω μέρος. Ο κόσμος του Είναι διαιρείται στις **Μορφές** στη κορυφή και στα **αντικείμενα των μαθηματικών** στο κάτω μέρος. Αυτό δείχνει ότι τα φυσικά αντικείμενα είναι 'αντανakλάσεις' των μαθηματικών αντικειμένων τα οποία με τη σειρά τους είναι 'αντανakλάσεις' των Μορφών.



Ο Πλάτωνας και τα μαθηματικά θέματα

- Υπάρχουν, ωστόσο, αποδείξεις, συμπεριλαμβανομένων κάποιων αναφορών του Αριστοτέλη, ότι ο Πλάτωνας θεώρησε τουλάχιστον κάποια μαθηματικά αντικείμενα ως Μορφές. Υπάρχουν ενδείξεις ότι κατά τη περίοδο της νεο- πυθαγόρειας περιόδου ο Πλάτωνας θεώρησε όλες τις Μορφές μαθηματικές. Υπάρχουν περιγραφές μιας δημόσιας διάλεξης περί του Αγαθού όπου, προς απογοήτευση μερικών από τους ακροατές του, ο Πλάτωνας μίλησε σχεδόν αποκλειστικά για μαθηματικά θέματα.



Θωρία του Αριστοτέλη

- Φαινόμενα που το αποτέλεσμα τους είναι βέβαιο [**σταθερές**].
- Φαινόμενα που ακολουθούν μια κανονικότητα τύχης. Γνωρίζουμε εκ των προτέρων σε πόσες περιπτώσεις έχουν κάθε έκβαση [**θεωρία πιθανοτήτων**].
- Φαινόμενα που δεν γνωρίζουμε για τις εκβάσεις τους. Μαθαίνουμε εκ των υστέρων παρατηρώντας [**στατιστική**].



Η θεωρία των Πιθανότητων

- Έτσι κάθε φαινόμενο φυσικό ή κοινωνικό μπορεί να περιγραφεί όσον αφορά τις εκβάσεις του [**τα πιθανά αποτελέσματα του**] είτε με μια **εκ των προτέρων** μελέτη είτε με την **εκ των υστέρων** γνώση μέσω της παρατήρησης.
- Η θεωρία Πιθανοτήτων αναφέρεται στην **εκ των προτέρων** μελέτη.



Πιθανότητα

- Καταγράφοντας **όλες** τις εκβάσεις ενός φαινομένου [**τα πιθανά αποτελέσματα του**] σχηματίζουμε ένα **σύνολο** ενδεχομένων [εκβάσεων δηλ. αποτελεσμάτων].
- Αφού το αποτέλεσμα **κάθε** επανάληψης οφείλεται στην **τύχη** [δηλαδή **δεν γνωρίζουμε** **κάθε φορά το αποτέλεσμα**], αυτό μεταβάλλεται.
- Η διαδικασία αυτή [**οι εκβάσεις του φαινομένου**] είναι τελικά μια **τυχαία μεταβλητή** [ποσότητα].



Ορίζοντας το φαινόμενο

- Έτσι ορίζοντας το φαινόμενο [την ιδιότητα ή το χαρακτηριστικό] που παρατηρούμε σχηματίζουμε το σύνολο που έχει σαν στοιχεία όλα τα [πιθανά] αποτελέσματα του.
- Ας θυμηθούμε ότι ένα σύνολο ορίζεται από το κοινό χαρακτηριστικό των στοιχείων του.



Ορισμός

- Έτσι προκύπτει το σύνολο όλων των αποτελεσμάτων που ονομάζεται **δειγματοχώρος**.
- Στοιχεία του δειγματοχώρου είναι τα **γεγονότα** που μπορούν να συμβούν [εκβάσεις ή αποτελέσματα].



Διαμέριση του συνόλου

- Στην αξιωματική μορφή της θεωρίας πιθανοτήτων όλα τα γεγονότα του δειγματοχώρου ορίζουν μια διαμέριση του συνόλου.
- Αυτό θα πει ότι πραγματοποιείται μόνο ένα από αυτά κάθε φορά και δεν υπάρχει γεγονός που μπορεί να πραγματοποιηθεί εκτός από αυτά.



Δηλαδή

- η **τομή** τους ανά δύο είναι το κενό σύνολο $\{ \}$
 - η **ένωση** τους είναι ο δειγματοχώρος
- Με τις ενώσεις τους –προφανώς- μπορούμε να περιγράψουμε αποτελέσματα του φαινομένου.



Παράδειγμα: Το ζάρι

- το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού περιγράφεται από το σύνολο Ω ,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- Πράγματι δεν μπορεί να έρθει κάτι άλλο, δεν είναι δυνατόν να φέρουμε ταυτόχρονα δύο αποτελέσματα. Παράδειγμα 3 και 5. Όμως μπορούμε να φέρουμε άρτιο αριθμό δηλαδή το αποτέλεσμα να είναι το $\{2, 4, 6\}$.



Παράδειγμα: Εκλογές

- Στις εκλογές συμμετέχει ένας αριθμός κομμάτων. Ας περιγράψουμε το σύνολο που περιγράφει τη στάση ενός εκλογέα:
- {ΝΔ, ΣΥΡΙΖΑ-ΕΚΜ, ΕΛΙΑ-Δημοκρατική Παράταξη, ΛΣ-ΧΑ, ΑΝΕΛ, ΔΗΜΑΡ-Προοδευτική Συμμαχία, ΚΚΕ, Το Ποτάμι, ΑΝΤΑΡΣΥΑ, Οικολόγοι-Πράσινοι, Δράση, ΛΑΟΣ, Δημιουργία Ξανά, ΆΛΛΟ, Άκυρο-Λευκό, Αποχή}.



Παράδειγμα: Αναλυτικά Εκλογές

- Γράψαμε ένα σύνολο με 16 στοιχεία. Τα 13 πρώτα είναι κόμματα, το 14^ο είναι ένα σύνθετο γεγονός [αντιστοιχεί σε περισσότερα κόμματα], το 15^ο αντιστοιχεί σε δύο αποτελέσματα και το 16^ο σε μια ενέργεια.
- Γεγονότα που δεν μπορεί να αναλυθούν σε άλλα [όπως τα πρώτα 13 και το 16^ο] ονομάζονται **απλά** σε αντιδιαστολή με γεγονότα που μπορεί να αναλυθούν [όπως το 14^ο και το 15^ο] που ονομάζονται **σύνθετα**.



Δειγματοχώρος

- Υπάρχουν δύο εναλλακτικοί ορισμοί για τον δειγματοχώρο. Κατά τον ένα **είναι το σύνολο των απλών γεγονότων**. Δηλαδή τα 16 που ορίσαμε στο παράδειγμα μας. Κατά τον άλλο **είναι το δυναμοσύνολο του**, δηλαδή όλα τα υποσύνολα του συνόλου αυτού. Όποιον και από τους 2 και να ακολουθήσουμε δεν αλλάζει το αποτέλεσμα.



Τι είναι η πιθανότητα

- Η [συνάρτηση] **πιθανότητα** είναι μια συνάρτηση από το σύνολο Ω (δειγματοχώρος: σύνολο ορισμού της τυχαίας μεταβλητής) στο σύνολο $[0,1]$ (σύνολο τιμών).
- Το ερώτημα είναι πόση είναι η πιθανότητα κάθε γεγονότος. Φυσικά, αν υπολογίσουμε τις πιθανότητες των απλών γεγονότων [ή των γεγονότων μιας διαμέρισης] μπορούμε να περιγράψουμε το φαινόμενο. Έτσι θα μπορούμε να περιγράψουμε και την **κατανομή** της τυχαίας μεταβλητής.



Προσοχή

- Όλες οι τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή (π.χ. οι 16 που ορίσαμε στο παράδειγμα) αποτελούν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης πιθανότητας. Αυτό δεν πρέπει να το συγχέουμε με το σύνολο των υποκειμένων στα οποία έχει νόημα να μετρηθεί η μεταβλητή ποσότητα.



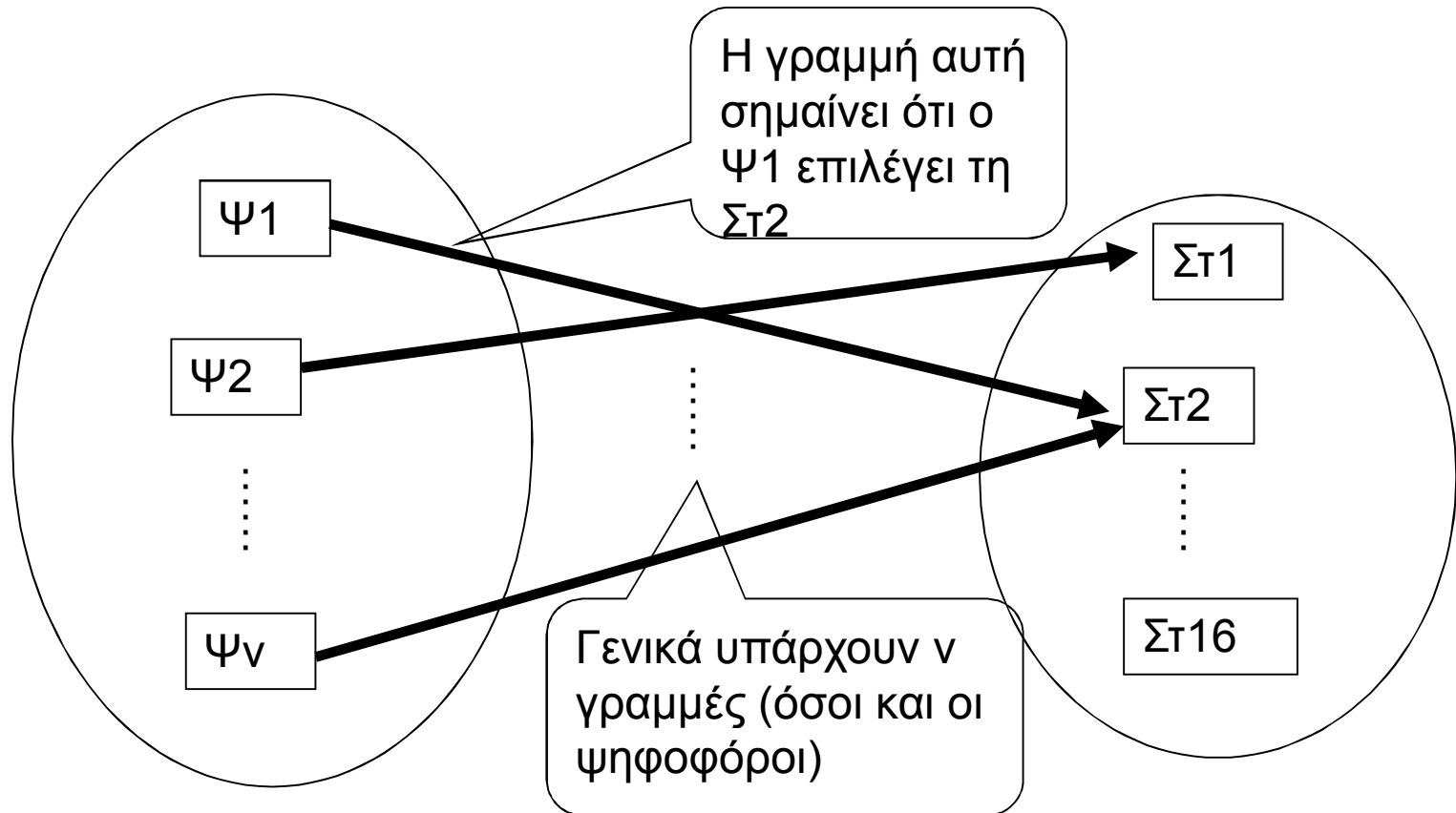
Παράδειγμα: Εκλογές Δικαίωμα Ψήφου

- Στο παράδειγμα μας η στάση στις εκλογές έχει νόημα να μετρηθεί σε όλους όσοι έχουν δικαίωμα ψήφου. Έτσι μπορεί να οριστεί μια συνάρτηση από αυτό το σύνολο (το σύνολο των υποκειμένων) στο σύνολο των τιμών που μπορεί να πάρει η μεταβλητή.



Σύνολο συνάρτησης – Σύνολο τιμών

Σχήμα 2: Σύνολο συνάρτησης – Σύνολο Τιμών.



Μελετώντας την Συνάρτηση

- Μελετώντας την παραπάνω συνάρτηση μπορούμε **τελικά να αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό από το 0 μέχρι τα 1 σε κάθε ένα στοιχείο του συνόλου τιμών** (της μεταβλητής). Έτσι, μπορούμε με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της μεταβλητής και πεδίο τιμών το διάστημα $[0,1]$ να ορίσουμε μια συνάρτηση πιθανότητας.



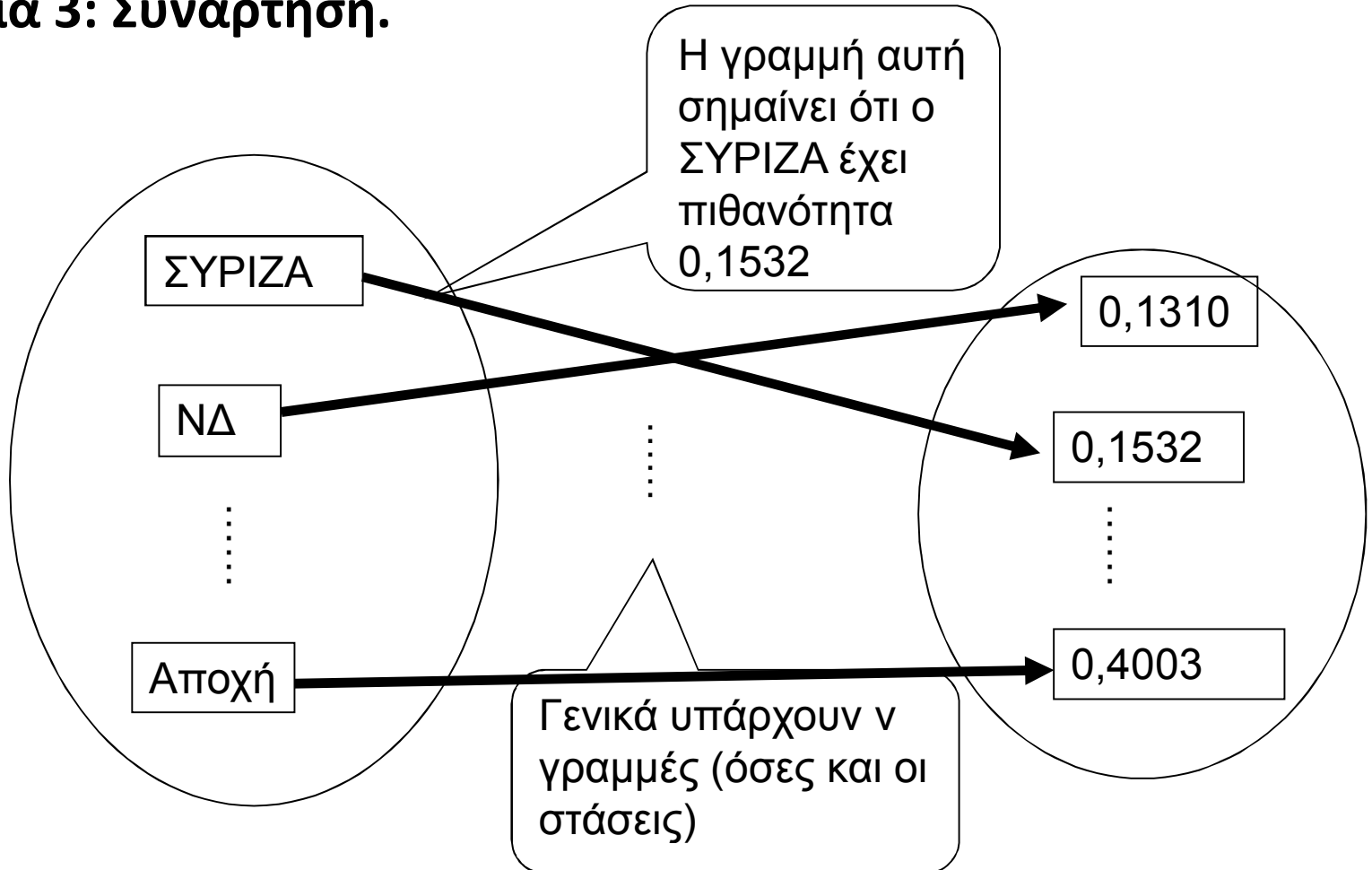
Παράδειγμα

- Δηλαδή, αν ξέρουμε το ποσοστό πολιτών που επέλεξε κάθε στάση στις εκλογές γνωρίζουμε τελικά πόσοι από τους ψηφοφόρους επέλεξαν κάθε στάση και τελικά την πιθανότητα να επιλεγεί η στάση αυτή.
- Πχ στις ευρωεκλογές ψήφισαν 5.942.196 από τους 9.907.995, δηλαδή ποσοστό 40,03% δεν ψήφισε. Άρα η πιθανότητα αποχής είναι 0,4003.



Συνάρτηση

Σχήμα 3: Συνάρτηση.



Πιθανότητα - Η πλάνη του ισοπίθανου

- Επειδή η απλούστερη μορφή είναι η **συμμετρία** πολλές φορές νομίζουμε ότι κάθε γεγονός έχει την **ίδια** πιθανότητα.
- Ενώ αν ρίξουμε ένα ζάρι η πιθανότητα κάθε αποτελέσματος είναι ίση με $1/6$, η πιθανότητα κάθε αποτελέσματος (από τα 16) στις εκλογές **δεν** είναι $1/16$. Αύριο θα βρέξει ή δεν θα βρέξει. Αυτό **δεν** σημαίνει ότι η πιθανότητα να βρέξει είναι $1/2$.



Πιθανότητα- Ξένα (ασυμβίβαστα) και Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

- Ξένα είναι δύο (ή περισσότερα) γεγονότα που η πραγματοποίηση ενός αποκλείει την πραγματοποίηση των άλλων. Αν φέρουμε 2 δεν μπορεί να φέρουμε κάτι άλλο ταυτόχρονα. Ακολουθούμε μόνο μία από τις 16 στάσεις στις εκλογές.
- Ανεξάρτητα είναι δύο (ή περισσότερα) γεγονότα όταν η πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση των άλλων.



Δεσμευμένη πιθανότητα 1

- Η δεσμευμένη πιθανότητα (πιθανότητα υπό συνθήκη) αντιστοιχεί σε ένα **διαφορετικό** δειγματοχώρο. Γράφουμε $P(A/B)$ και λέμε πιθανότητα να συμβεί το A όταν έχει συμβεί το B και εννοούμε ότι γνωρίζουμε ότι έχει πραγματοποιηθεί το γεγονός B και προσπαθούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα τότε (υπό αυτή την συνθήκη) να συμβεί το A .



Δεσμευμένη πιθανότητα 2

- $P(X=4/X \text{ είναι ζυγός αριθμός})$ όταν το X είναι το αποτέλεσμα ενός ζαριού, σημαίνει ότι γνωρίζουμε ότι φέραμε ζυγό αριθμό [δηλ. ο δειγματοχώρος μας περιορίζεται στο $\{2, 4, 6\}$] και αναζητούμε την πιθανότητα να έχουμε φέρει 4. Προφανώς $P(X=4/X \text{ είναι ζυγός})=1/3$.



Δεσμευμένη πιθανότητα 3

- Για να υπολογίσουμε την $P(A/B)$ σκεφτόμαστε ότι αν γνωρίζουμε την πιθανότητα του B [$P(B)$] αρκεί να υπολογίσουμε την πιθανότητα της τομής [δηλαδή πόσο πιθανό είναι να συμβούν και τα δύο $P(A \cap B)$]. Είναι τότε:

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = (1/6) / (1/2) = 1/3.$$



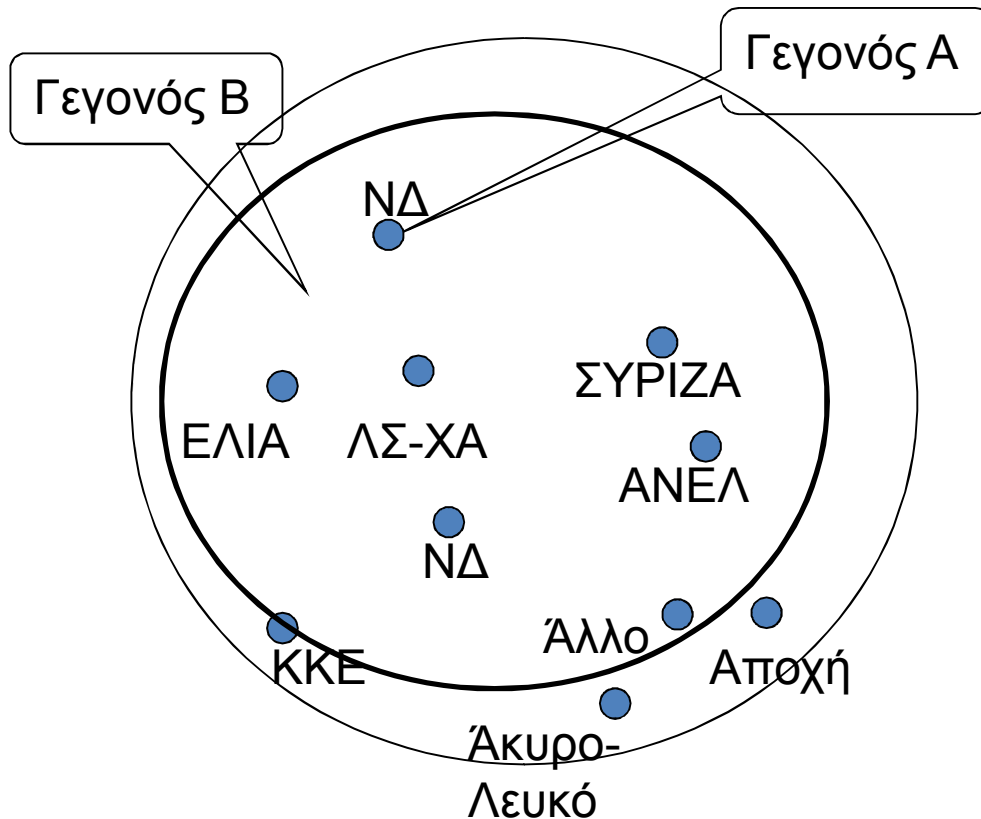
Δεσμευμένη πιθανότητα 4

- Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το ποσοστό της ΝΔ επί των εγκύρων ψήφων υπολογίζουμε την δεσμευμένη πιθανότητα $P(\text{ΝΔ}/\text{έγκυρα ψηφοδέλτια})=0,2272$. Δηλαδή, υπολογίζουμε πρώτα την πιθανότητα να έχει ψηφίσει έγκυρο (που είναι 0,5769) και μετά υπολογίζουμε:
 $P(\text{ΝΔ})/P(\text{έγκυρο})=0,1310/0,5769=0,2272$.



Δεσμευμένη πιθανότητα 5

Σχήμα 4: Παράδειγμα



- Γεγονός Α: ψηφίζω ΝΔ, Γεγονός Β: ψηφίζω έγκυρο. $P(A/B)$ σημαίνει: πόσο πιθανό είναι να ψηφίσω ΝΔ δεδομένου ότι ψήφισα έγκυρο. $P(B/A)$ σημαίνει: πόσο πιθανό είναι να ψήφισα έγκυρο δεδομένου ότι ψήφισα ΝΔ. Αυτή η πιθανότητα είναι ίση με 1.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες
- Σχήμα 1: Πλάτωνας.
- Σχήμα 2-4: Σχήματα για διδακτικούς σκοπούς του Μαθήματος.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεόδωρος Χατζηπαντελής. «Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: Εισαγωγή. Πιθανότητα – Δεσμευμένη Πιθανότητα- Όρια (I)». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://eclass.auth.gr/courses/OCRS376/>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Σωτήρογλου Μαρίνα
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

