



Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: Εισαγωγή

Ενότητα 4.4 : Πιθανότητα – Δεσμευμένη Πιθανότητα- Όρια (IV).

Θεόδωρος Χατζηπαντελής
Τμήμα Πολιτικών Επιστημών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





Πιθανότητα

Δεσμευμένη Πιθανότητα – Όρια, Μέρος IV



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Δεσμευμένη Πιθανότητα, Μέρος IV

Ασκήσεις (Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής, Βιβλίο Γ' Λυκείου, Κεφάλαιο 3^ο).



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άσκηση 1

1. Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μια άσπρη, μια μαύρη και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε επίσης το χρώμα της. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση).
 - i) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;
 - ii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη ;
 - iii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “να εξαχθεί και τις δυο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα” ;



Λύση Άσκησης 1

1. i) Έστω α, μ, κ τα αποτελέσματα η μπάλα να είναι άσπρη, μαύρη και κόκκινη αντιστοίχως. Έχουμε:

$$\Omega = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \mu), (\alpha, \kappa), (\mu, \alpha), (\mu, \mu), (\mu, \kappa), (\kappa, \alpha), (\kappa, \mu), (\kappa, \kappa)\}.$$

ii) $\{(\kappa, \alpha), (\kappa, \mu), (\kappa, \kappa)\}.$

iii) $\{(\alpha, \alpha), (\mu, \mu), (\kappa, \kappa)\}.$



Άσκηση 2

2) Μια οικογένεια από την Αθήνα αποφασίζει να κάνει τις επόμενες διακοπές της στην Κύπρο ή στη Μακεδονία. Στην Κύπρο μπορεί να πάει με αεροπλάνο ή με πλοίο. Στη Μακεδονία μπορεί να πάει με το αυτοκίνητό της, με τρένο ή με αεροπλάνο. Αν ως αποτέλεσμα του πειράματος θεωρήσουμε τον τόπο διακοπών και το ταξιδιωτικό μέσο, τότε:

- i) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος
- ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο A : “Η οικογένεια θα πάει με αεροπλάνο στον τόπο των διακοπών της” .



Λύση Άσκησης 2

2. i) $\Omega = \{(\text{Κύπρος, αεροπλάνο}), (\text{Κύπρος, πλοίο}), (\text{Μακεδονία, αυτοκίνητο}), (\text{Μακεδονία, τρένο}), (\text{Μακεδονία, αεροπλάνο})\}$
- ii) $A = \{(\text{Κύπρος, αεροπλάνο}), (\text{Μακεδονία, αεροπλάνο})\}.$



Άσκηση 3

3). Ένα ξενοδοχείο προσφέρει γεύμα που αποτελείται από τρία πιάτα. Το κύριο πιάτο, το συνοδευτικό και το γλυκό. Οι δυνατές επιλογές δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| Γεύμα | Επιλογές |
|-------------|--------------------------|
| Κύριο Πιάτο | Κοτόπουλο ή φιλέτο |
| Συνοδευτικό | Μακαρόνια ή ρύζι ή χόρτα |
| Γλυκό | Παγωτό ή τούρτα ή ζελέ |

Ένα άτομο πρόκειται να διαλέξει ένα είδος από κάθε πιάτο. i) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο A: “το άτομο επιλέγει παγωτό ” iii) Να βρείτε το ενδεχόμενο B: “το άτομο επιλέγει κοτόπουλο” iv) Να βρείτε το ενδεχόμενο $A \cap B$ v) Αν Γ το ενδεχόμενο: “το άτομο επιλέγει ρύζι ”, να βρείτε το ενδεχόμενο $(A \cap B) \cap \Gamma$.



Λύση Άσκησης 3

3). i) Αν συμβολίσουμε καθεμία από τις επιλογές με το αρχικό της γράμμα, έχουμε :

(κ,μ,π) (κ,μ,τ) (κ,μ,ζ) (κ,ρ,π) (κ,ρ,τ) {κ,ρ, ζ} (κ,χ,π) {κ,χ,τ} (κ,χ,ζ) (φ,μ,π)
(φ,μ,τ) (φ,μ,ζ) {φ,ρ,π} (φ,ρ, τ) (φ,ρ,ζ) (φ, χ, π) (φ,χ,τ) (φ,χ,ζ).

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία τις 18 τριάδες της στήλης "αποτέλεσμα" αποτελεί το δειγματικό χώρο του πειράματος.

ii) $A = \{(κ,μ,π), (κ,ρ,π), (κ,χ,π), \{φ,μ,π\}, \{φ,ρ,π\}, (φ,χ,π)\}$.

iii) $B = \{(κ, μ, π), (κ,μ, τ), (κ,μ, ζ), (κ, ρ,π), \{κ, ρ, τ\}, (κ, ρ, ζ), (κ, χ,π), (κ, χ,τ), (κ, χ,ζ)\}$.

iv) $A \cap B = \{(κ, μ, π), (κ, ρ, π), (κ, χ, π)\}$.

v) $\Gamma = \{(κ, ρ, π), (κ, ρ, τ), (κ, ρ, ζ), \{φ, ρ, π\}, (φ, ρ, τ), (φ, ρ, ζ)\}$

$(A \cap B) \cap \Gamma = \{(κ,ρ,π)\}$.



Άσκηση 4.1

4) i. Ρίχνουμε ένα ζάρι. A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και B είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.

Λύση: i) $A = \{3\}$, $B = \{2,4,6\}$, $A \cap B = \emptyset$, άρα τα A και B είναι ασυμβίβαστα.

ii) Επιλέγουμε ένα άτομο. A είναι το ενδεχόμενο να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα και B το ενδεχόμενο να είναι καθολικός.

Λύση: Επειδή υπάρχουν και Έλληνες καθολικοί, αυτό σημαίνει ότι $A \cap B \neq \emptyset$, δηλαδή τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.



Άσκηση 4.2

4) iii.) Επιλέγουμε μια γυναίκα. A είναι το ενδεχόμενο να έχει ηλικία άνω των 30 και B το ενδεχόμενο να είναι παντρεμένη πάνω από 30 χρόνια.

Λύση: Επειδή υπάρχουν γυναίκες άνω των 30, που να είναι 30 χρόνια παντρεμένες, αυτό σημαίνει ότι $A \cap B \neq \emptyset$.

iv) Επιλέγουμε κάποιον με ένα αυτοκίνητο. A είναι το ενδεχόμενο το αυτοκίνητό του να είναι ευρωπαϊκό και B το ενδεχόμενο να είναι ασιατικό.

Λύση: $A \cap B \neq \emptyset$, άρα τα A και B είναι ασυμβίβαστα.



Άσκηση 5

5) Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους. Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Λύση: $\Omega = \{ααα, αακ, ακα, ακκ, καα, κακ, κκα, κκκ\}$.



Άσκηση 6

6) Δύο παίκτες θα παίξουν σκάκι και συμφωνούν νικητής να είναι εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παιχνίδια. Αν α είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης ένα παιχνίδι και β είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης ένα παιχνίδι, να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Λύση: $\Omega = \{\alpha\alpha, \alpha\beta, \beta\alpha, \beta\beta\}$.



Άσκηση 7

7) Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε τα ενδεχόμενα:

A: “Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης”.

B: “Το άθροισμα των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι άρτιος αριθμός”

Γ: “Το γινόμενο των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι μικρότερο του 5” Στη συνέχεια να βρείτε τα ενδεχόμενα:

$A \cap B, A \cap \Gamma, B \cap \Gamma, (A \cap B) \cap \Gamma.$



Λύση Άσκησης 7

$$7) A = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}.$$

$$B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)\}.$$

$$\Gamma = \{(1,1), (0,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (3,1), (4,1)\}.$$

$$A \cap B = \{(3,1), (4,2), (5,1), (5,3), (6,2), (6,4)\}.$$

$$(A \cap B) \cap \Gamma = \{(2,1), (3,1), (4,1)\} \quad (\wedge \eta \beta) \quad \eta \Gamma = \{(3,1)\}.$$



Άσκηση 8

8) Ρίχνει κάποιος ένα ζάρι και αναγγέλλει ότι έφερε ζυγό αριθμό. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει φέρει 6;

Λύση: Στη ρίψη ενός ζαριού ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Το ενδεχόμενο να φέρουμε ζυγό αριθμό είναι $A = \{2,4,6\}$. Επομένως η πιθανότητα να φέρουμε 6 είναι ίση με $1/3$.



Άσκηση 9

9) Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνει κάποιος τυχαία ένα φύλλο και λέει ότι είναι "σπαθί". Ποια είναι η πιθανότητα το φύλλο να είναι φιγούρα;

Λύση: Τα "σπαθιά" σε μια τράπουλα είναι συνολικά 13 εκ των οποίων τα 3 είναι 3 φιγούρες. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $3/13$.



Άσκηση 10

10) Για δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου ισχύουν $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/4$ και $P(A/B) = 4/5$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A \cap B)$, $P(B/A)$ και $P(A' \cup B)$.

Λύση:

$$P(B/A) = P(A \cap B) / P(A) = 2/5.$$

$$P(A \setminus B) = 4/5$$

$$P(A \cap B) / P(B) = 4/5$$

$$P(A \cap B) = 4/5 * P(B)$$

$$P(A \cap B) = 4/5 * 1/4 = 1/5.$$

$$\begin{aligned} P(A' \cup B) &= P(A') + P(B) - P(A' \cap B) \\ &= 1 - P(A) + P(B) - (P(B) - P(A \cap B)) = \\ &= 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) = \\ &= 1 - P(A) + P(A \cap B) = 1 - 1/2 + 1/5 \\ &= 7/10 . \end{aligned}$$



Άσκηση 11

11) Αν $P(A \cup B) = 5/6$, $P(B/A) = 1/4$
και $P(A) = 2/3$, να βρείτε την $P(B)$.

$$\text{Λύση: } P(B \setminus A) = 1/4$$

$$P(A \cap B) / P(A) = 1/4$$

$$P(A \cap B) = 1/4 * P(A)$$

$$P(A \cap B) = 1/4 * 2/3 = 1/6$$

$$P(A \cup B) = 5/6.$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 5/6$$

$$2/3 + P(B) - 1/6 = 5/6$$

$$P(B) = 5/6 + 1/6 - 2/3 =$$

$$P(B) = 1/3.$$



Άσκηση 12

12) Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να φέρουμε 6 στην πρώτη ρίψη και περιττό αριθμό στη δεύτερη ρίψη.

Λύση: Έστω A το ενδεχόμενο να φέρουμε 6 στην 1η ρίψη και B το ενδεχόμενο να φέρουμε περιττό αριθμό στη 2η ρίψη. Επομένως επειδή τα A και B είναι ανεξάρτητα έχουμε:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 1/6 * 3/6 = 1/12.$$



Άσκηση 13

13) Ένα κουτί περιέχει 6 κόκκινες και 8 μαύρες μπάλες. Παίρνουμε από το κουτί τυχαίως μια μπάλα, σημειώνουμε το χρώμα της και την επανατοποθετούμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου η πρώτη μπάλα να είναι μαύρη και η δεύτερη κόκκινη.

Λύση: Έστω A το ενδεχόμενο η 1 η μπάλα να είναι μαύρη και B το ενδεχόμενο η 2η μπάλα να είναι κόκκινη. Επειδή επανατοποθετήσαμε την 1η μπάλα στο κουτί, τα A και B είναι ανεξάρτητα και επομένως:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 8/14 * 6/14 = 12/49.$$



Άσκηση 14

14) Τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα και ισχύουν $P(A) = 1/4$ και $P(A \cap B) = 1/5$. Να βρείτε τις $P(B)$ και $P(A \cup B)$.

Λύση: Επειδή τα A και B είναι ανεξάρτητα έχουμε διαδοχικά
 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 1/5 = 1/4 * P(B)$ άρα $P(B) = 4/5$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/4 + 4/5 - 1/5 = 17/20.$$



Άσκηση 15

15) Σε ένα Γυμνάσιο στις εξετάσεις του Ιουνίου το 25% έγραψε στα Μαθηματικά κάτω από τη βάση, το 15% έγραψε στη Φυσική κάτω από τη βάση και το 10% των μαθητών έγραψε και στα δύο μαθήματα κάτω από τη βάση. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή του Γυμνασίου αυτού. i) Αν έχει αποτύχει στη Φυσική, ποια είναι η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στα Μαθηματικά; ii) Αν έχει αποτύχει στα Μαθηματικά ποια είναι η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στη Φυσική;

Λύση: Έστω A το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει αποτύχει στα Μαθηματικά και B το 25 15 ενδεχόμενο να έχει αποτύχει στη Φυσική. Έχουμε $P(A) = 25/100$, $P(B) = 15/100$ και $P(A \cap B) = 10/100$.

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = 10/15 = 2/3 = 67\%.$$

$$P(B/A) = P(A \cap B) / P(A) = 10/25 = 2/5 = 40\%.$$



Άσκηση 16

16) Σε ένα εργοστάσιο το 60% των εργαζομένων είναι άνδρες και το 40% είναι γυναίκες. Από τους άνδρες καπνίζει το 50% και από τις γυναίκες το 30%. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο που καπνίζει, ποια η πιθανότητα να είναι γυναίκα;

Λύση: Έστω A και Γ τα ενδεχόμενα το άτομο να είναι άνδρας ή γυναίκα αντιστοίχως, και K το ενδεχόμενο να καπνίζει.

$$P(A/K) * P(K) = P(A \cap K)$$

$$P(K) = 0.5 * 0.6 + 0.3 * 0.4$$

$$P(K/\Gamma) = P(\Gamma \cap K) / P(K) = P(\Gamma) P(K/\Gamma) / P(K) = 40 * 30 / 60 * 50 + 40 * 30 = 2/7.$$



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεόδωρος Χατζηπαντελής. «Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: Εισαγωγή. Πιθανότητα – Δεσμευμένη Πιθανότητα- Όρια (IV)». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://eclass.auth.gr/courses/OCRS376/>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Σωτήρογλου Μαρίνα
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

