



Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: Εισαγωγή

Ενότητα 6 : Ασκήσεις (I).

Θεόδωρος Χατζηπαντελής
Τμήμα Πολιτικών Επιστημών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





Ασκήσεις

Μέρος Ι



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άσκηση 1

- 1. Από ένα σύνολο 15 φοιτητών που αποτελείται από 6 φοιτητές Πολιτικών Επιστημών, 5 φοιτητές Οικονομικών Επιστημών και 4 φοιτητές ΜΜΕ πρέπει να σχηματιστεί μια πενταμελής επιτροπή. Με δεδομένο ότι ακριβώς δύο φοιτητές Πολιτικών Επιστημών πρέπει να βρίσκονται στην επιτροπή, να υπολογιστεί:



15 διαφορετικά πρόσωπα

1.1) με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η επιτροπή (πόσες διαφορετικές επιτροπές μπορεί να σχηματιστούν):

α) όταν μας ενδιαφέρει ποιοι θα είναι οι φοιτητές που συμμετέχουν στην επιτροπή. β) όταν μας ενδιαφέρει μόνο πόσοι από κάθε τμήμα θα συμμετέχουν στην επιτροπή.



Συνθήκες: διαφορετικοί, 2 ακριβώς ΠΕ

- α) Από τους 5 φοιτητές της επιτροπής 2 πρέπει να είναι φοιτητές Πολιτικών Επιστημών. Αυτό μπορεί να συμβεί με 6 ανά 2 τρόπους. Δηλαδή με $6!/(2!*4!)=15$ τρόπους. Για κάθε έναν από τους παραπάνω 15 τρόπους, στην επιτροπή από τους υπόλοιπους 9 οι 3 μπορεί να επιλεγούν με 9 ανά 3 τρόπους. Δηλαδή με $9!/(3!*6!)=84$ τρόπους. Σύμφωνα με την αρχή του γινομένου υπάρχουν συνολικά $15*84=1260$ τρόποι για το σχηματισμό της επιτροπής.



3 διαφορετικά σύμβολα

- β) όταν μας ενδιαφέρει μόνο πόσοι από κάθε τμήμα θα συμμετέχουν στην επιτροπή.



Απαρίθμηση

- β) αφού θα συμμετέχουν ακριβώς 2 από τους 6 φοιτητές αυτό μπορεί να επιτευχθεί μόνο με ένα τρόπο. Για τους υπόλοιπους έχουμε τις εξής δυνατότητες: 3 από τους φοιτητές ΜΜΕ και 0 από τους φοιτητές του Οικονομικού (1 τρόπος), είτε 2 και ένας από τους φοιτητές του Οικονομικού (2ος τρόπος), είτε 1 από τα ΜΜΕ και 2 από το Οικονομικό (3ος τρόπος), είτε 0 από τα ΜΜΕ και 3 από το Οικονομικό (4ος τρόπος). Άρα συνολικά υπάρχουν 4 τρόποι.



Επαναληπτικοί συνδυασμοί

- Το ίδιο μπορούμε να βρούμε αν σκεφτούμε ότι υπάρχουν 2 σύμβολα από τα οποία διαλέγουμε για 3 θέσεις και άρα υπάρχουν $2 + 3 - 1$ ανά 3 τρόποι, δηλαδή 4 ανά 3 άρα $4!/3!=4$.



Συνέχεια

- 1.2) αν πρέπει να υπάρχει μόνο ένας φοιτητής ΜΜΕ στην επιτροπή με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η επιτροπή. α) όταν μας ενδιαφέρει ποιοι θα είναι οι φοιτητές που συμμετέχουν στην επιτροπή β) όταν μας ενδιαφέρει μόνο πόσοι από κάθε τμήμα θα συμμετέχουν στην επιτροπή.



Ακριβώς 1 από ΜΜΕ, α

- α) Σκεπτόμενοι όπως παραπάνω αρκεί να υπολογίσουμε με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγούν οι υπόλοιποι 4 (εκτός από τον φοιτητή των ΜΜΕ για τον οποίο υπάρχουν 4 ανά 1: 4 τρόποι). Τότε από τους υπόλοιπους 11 οι 4 μπορεί να επιλεγούν με 11 ανά 4 τρόπους δηλαδή με $11!/(4!*7!)=330$. Αυτό είναι και το ζητούμενο. [$4*330=1320$].



Ακριβώς 1 από ΜΜΕ, β

- β) επιλέγουμε για 4 θέσεις από 2 σύμβολα άρα υπάρχουν $2+4-1$ ανά 4 τρόποι δηλαδή 5.



2 από ΠΕ και 1 από ΜΜΕ

- α) αν υποθέσετε ότι 2 από τους 5 προέρχονται από το τμήμα ΠΕ τότε έχουμε $(4 \text{ ανά } 1) * (5 \text{ ανά } 2) * (6 \text{ ανά } 2) = 600$ β) αν υποθέσετε ότι οι 2 προέρχονται από το τμήμα ΠΕ και ο ένας από το τμήμα ΜΜΕ υπάρχει μόνο ένας τρόπος.



Άσκηση 2

- Σε ένα διαγώνισμα κάποιος φοιτητής πρέπει να επιλέξει να απαντήσει σε 6 από 10 ερωτήσεις. α) Να βρεθεί με πόσους δυνατούς τρόπους μπορεί να επιλέξει τις 6 ερωτήσεις (σημείωση: δηλαδή δεν υπάρχει κάποια συνθήκη). 10 ανά 6 δηλαδή $10!/(6!*4!)=210$ τρόποι β) Να βρεθεί με πόσους δυνατούς τρόπους μπορεί να επιλέξει τις 6 ερωτήσεις, αν πρέπει να απαντήσει οπωσδήποτε τις 2 πρώτες ερωτήσεις. 8 ανά 4 δηλαδή $8!/(4!*4!)=70$ τρόποι.



Άσκηση 2.γ

- γ) Θεωρείστε ότι οι 4 πρώτες ερωτήσεις αποτελούν μια θεματική ενότητα A και οι υπόλοιπες 6 ερωτήσεις αποτελούν μια άλλη θεματική ενότητα B. Να βρεθεί με πόσους δυνατούς τρόπους μπορεί να επιλέξει τις 6 ερωτήσεις, αν πρέπει να απαντήσει σε 2 ερωτήσεις της ενότητας A και σε 4 ερωτήσεις της ενότητας B. $(4 \text{ ανά } 2) \times (6 \text{ ανά } 4) = 6 * 15 = 90$ τρόποι.



Άσκηση 2.δ

- δ) Να βρεθεί με πόσους δυνατούς τρόπους μπορεί να επιλέξει τις 6 ερωτήσεις, αν πρέπει να απαντήσει σε 2 τουλάχιστον ερωτήσεις της ενότητας Α. Θα διαλέξει 2, 3 ή 4 από την Α και τις υπόλοιπες 4, 3 ή 2 αντίστοιχα.

Υπολογίζουμε τις περιπτώσεις και έχουμε 4 ανά 2 (6 τρόποι) \times 6 ανά 4 (15 τρόποι) = 90
4 ανά 3 (4 τρόποι) \times 6 ανά 3 (20 τρόποι) = 80
4 ανά 4 (1 τρόπος) \times 6 ανά 2 (15 τρόπος) = 15
Σύνολο $(90+80+15)=185$ τρόποι.



Άσκηση 3

- Περιγράψτε τη σύνθεση της ελληνικής αντιπροσωπείας στο ευρωπαϊκό κοινοβούλιο (κατά πολιτική ομάδα). α) Με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε μια τριμελή αντιπροσωπεία όταν μας ενδιαφέρει μόνο πόσοι από κάθε ομάδα συμμετέχουν σε αυτή;



Πολιτικές ομάδες

- Η σύνθεση της αντιπροσωπείας των 21 ευρωβουλευτών είναι η εξής: EPP 5, S&D 4, ECR 1, GUE/NGL 6 και NI 5. Οι 5 τελευταίοι ανήκουν στην ομάδα αυτών που δεν ανήκουν σε καμία ομάδα.



Επειδή στην ομάδα των ECR υπάρχει μόνο 1 διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

- Η αντιπροσωπεία σχηματίζεται από τους 20 υπόλοιπους (δεν συμμετέχει ο βουλευτής του ECR). Τότε από τις 4 άλλες ομάδες θέλουμε να επιλέξουμε 3. Αυτό μπορεί να γίνει με $4+3-1$ ανά 3 τρόπους, δηλαδή με 20 τρόπους.
- Η αντιπροσωπεία σχηματίζεται από τον 1 του ECR και 2 από τους υπόλοιπους 20. Τότε για τους 2 έχουμε $4+2-1$ ανά 2 επιλογές, δηλαδή 10 δυνατότητες.
- Συνολικά λοιπόν υπάρχουν $20+10=30$ δυνατότητες.



Στο ίδιο συμπέρασμα

- Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε και ως εξής: η αντιπροσωπεία θα σχηματιστεί είτε α) από 3 του ίδιου κόμματος. Υπάρχουν 4 κόμματα [το ECR έχει μόνο έναν] που έχουν τουλάχιστον τρεις και επειδή δεν μας ενδιαφέρει ποιοι θα είναι αυτό μπορεί να γίνει με 4 ανά 1 [δηλαδή με 4 τρόπους], β) από 2 ενός κόμματος και 1 από κάποιο άλλο. Υπάρχουν 4 κόμματα που έχουν τουλάχιστον 2 άρα οι 2 μπορεί να επιλεγούν με 4 ανά 1 [δηλαδή με 4 τρόπους]. Για κάθε έναν από αυτούς επιλέγουμε τον 1 που λείπει από την επιτροπή από τα υπόλοιπα 4. Άρα τελικά, 4 επί 4 δηλαδή με 16 τρόπους, γ) από 1 από τρία διαφορετικά κόμματα. Με 5 ανά 3 δηλαδή με 10 τρόπους. Συνολικά $4+16+10=30$.



β

- β) αν κάθε αντιπροσωπεία όριζε μια τριμελή επιτροπή (με κλήρωση από το σύνολο των βουλευτών που έχουν εκλεγεί) στην οποία ο πρώτος ήταν πρόεδρος, ο δεύτερος αντιπρόεδρος, ο τρίτος γραμματέας με πόσους τρόπους θα ήταν δυνατό να προκύψει η επιτροπή αυτή όταν μας ενδιαφέρει μόνο από ποια ομάδα προέρχονται;

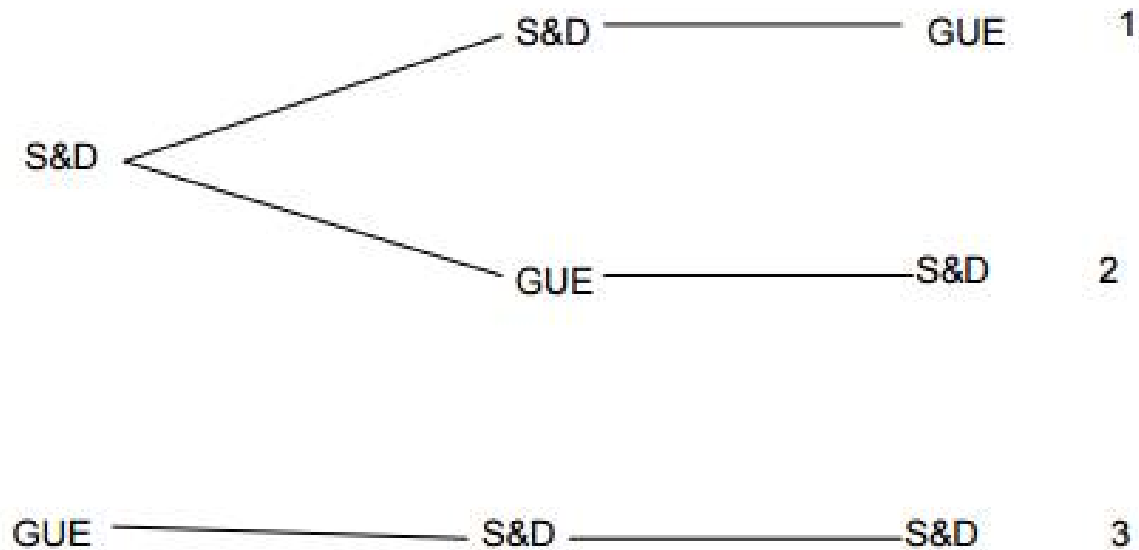


Η Απαρίθμηση

- Εδώ μας ενδιαφέρει από ποια πολιτική ομάδα προέρχονται και επίσης ποια θέση έχουν στην επιτροπή. • Δηλαδή αν έχουμε την περίπτωση 2 από S&D, 1 από GUE/NLG, τότε ο Πρόεδρος μπορεί να είναι είτε από S&D, είτε από την GUE/NLG. Αν είναι από S&D υπάρχουν 2 περιπτώσεις [αντιπρόεδρος S&D, γραμματέας GUE/NLG ή γραμματέας S&D, αντιπρόεδρος GUE/NLG] ενώ αν είναι από την GUE/NLG υπάρχει μόνο μία.



Η Απαρίθμηση 2



Η Απαρίθμηση 3

- Για να υπολογίσουμε το παραπάνω πρέπει να απαριθμήσουμε τις 30 περιπτώσεις που μετρήσαμε στο α και για κάθε μία να υπολογίσουμε πόσες διαφορετικές διατάξεις υπάρχουν. Συνολικά προσθέτοντας τους αριθμούς αυτούς προκύπτουν 112 περιπτώσεις.



Από τη διαφάνεια 18

- Αν επίσης σκεφτούμε ότι κάθε ένας από τους 4 τρόπους του α) δίνει 1 διάταξη [και οι τρεις είναι στο ίδιο κόμμα], κάθε ένας από τους 16 του β) δίνει 3 διατάξεις [2 είναι σε ένα κόμμα και 1 στο δεύτερο] και κάθε ένας από τους 10 του γ) δίνει 6 διατάξεις [1 από τρία διαφορετικά κόμματα] έχουμε συνολικά:
 $4*1+16*3+10*6=112$.



Εναλλακτική λύση 1

- Αν λανθασμένα ασχοληθούμε με την σύνθεση της αντιπροσωπείας με βάση τα ελληνικά κόμματα τότε έχουμε 6 από ΣΥΡΙΖΑ, 5 από ΝΔ, 3 από ΛΣ -ΧΑ, 2 από ΕΛΙΑ, 2 από ΠΟΤΑΜΙ, 2 από ΚΚΕ και 1 από ΑΝΕΞΕΛ. Τότε πρέπει να διακρίνουμε περισσότερες περιπτώσεις. Τελικά με την αρχή της απαρίθμησης προκύπτουν 74 διαφορετικές περιπτώσεις.



Εναλλακτική λύση 2

- Στον υπολογισμό αυτό μπορούμε να οδηγηθούμε επίσης ως εξής: υπάρχουν 7 ανά 3 περιπτώσεις όταν έχουμε τρία διαφορετικά κόμματα, $6 \cdot (6 \text{ ανά } 1)$ όταν υπάρχουν δύο από κάποιο και 1 από κάποιο άλλο [προσέξτε ότι υπάρχει ένα που έχει μόνο ένα βουλευτή και κατά συνέπεια μόνο για τα έξη από τα επτά είναι δυνατόν να υπάρχουν 2 στην επιτροπή] και 3 περιπτώσεις να είναι 3 από το ίδιο κόμμα. Συνολικά λοιπόν υπάρχουν $35+36+3=74$ περιπτώσεις.



Εναλλακτική λύση 3

- Αν πάρουμε τις 74 περιπτώσεις του 1 (διαφάνεια 24) τότε υπάρχουν 321 περιπτώσεις αν σκεφτούμε όπως παραπάνω [για τα ευρωπαϊκά κόμματα]. Είτε δηλαδή απαριθμώντας τους συνδυασμούς για κάθε μία από τις 74 περιπτώσεις, είτε υπολογίζοντας τους συνδυασμούς για κάθε μία από τις 3 περιπτώσεις που αναφέρθηκαν στην διαφάνεια 24.



Άσκηση 3

- Για τις εκλογές στη μαθητική κοινότητα (15μελές) ενός σχολείου υπάρχουν 42 υποψήφιοι. Από αυτούς 15 προέρχονται από την Α Λυκείου (6 από το Α1 και 9 από το Α2), 13 από τη Β Λυκείου (7 από το Β1 και 6 από το Β2) και 14 από την Γ Λυκείου (7 από το Γ1 και 7 από το Γ2).

A1	A2	B1	B2	Γ1	Γ2
6	9	7	6	7	7



Συνδυασμοί 1

- α) αν δεν υπάρχει περιορισμός πόσα διαφορετικά συμβούλια μπορεί να σχηματιστούν όταν μας ενδιαφέρει ποιιοι μαθητές θα εκλεγούν; • 42 ανά 15 τρόποι. Δηλαδή $42!/(15!*27!)= 98,672,427,616$.



Συνδυασμοί 2

- β) αν πρέπει οπωσδήποτε να συμμετέχουν στο 15μελές 2 από κάθε τμήμα πόσες είναι οι διαφορετικές συνθέσεις αν μας ενδιαφέρει μόνο πόσοι από κάθε τμήμα θα εκλεγούν Από τους 15 οι 12 προέρχονται από τα τμήματα (2 από το καθένα). Για τις υπόλοιπες 3 θέσεις έχουμε 6 σύμβολα και κατά συνέπεια υπάρχουν $6+3-1$ ανά 3 θέσεις –προσέξτε ότι για κάθε τμήμα υπάρχουν 3 τουλάχιστον μετά την αφαίρεση των 2- και άρα 56 τρόποι.



Άσκηση 4

- Ποσοστό αυτοδυναμίας.
- Η "αυτοδυναμία", δηλαδή να πάρεις 151 έδρες με ένα ποσοστό κάτω από το 50% εξαρτάται μόνο από δύο παράγοντες: πόσο θα πάρει το πρώτο κόμμα (που παίρνει 50 έδρες δώρο) και πόσο θα είναι άθροισμα των ποσοστών των κομμάτων που δεν θα περάσουν το καθένα τους το 3%.

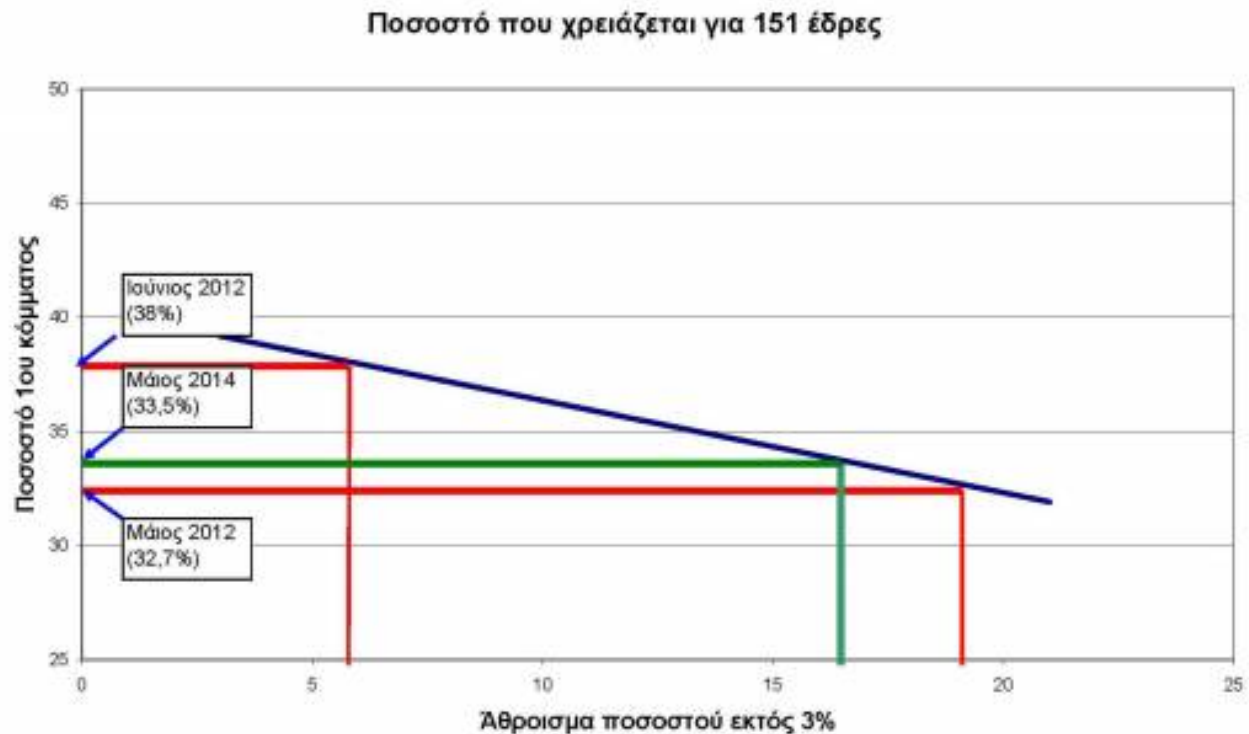


Ποσοστό αυτοδυναμίας

- Αν ονομάσουμε X το ποσοστό που συγκεντρώνουν τα κόμματα που δεν ξεπερνούν το καθένα 3% τότε Y είναι το ποσοστό που χρειάζεται το πρώτο κόμμα για να πάρει 101 από τις 250 έδρες.
- Τότε $Y = [(100 - X)/250] * 101$. Η εξίσωση της ευθείας είναι $Y = (100 * 101/250) - (101 * X)/250$.



Αναλυτικότερα



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεόδωρος Χατζηπαντελής. «Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: Εισαγωγή. Ασκήσεις (I)». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://eclass.auth.gr/courses/OCRS376/>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Σωτήρογλου Μαρίνα
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

