



Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: Εισαγωγή

Ενότητα 6: Ασκήσεις, 3^η γενική εργασία.

Θεόδωρος Χατζηπαντελής
Τμήμα Πολιτικών Επιστημών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





Ασκήσεις

Μέρος II, 3^η γενική εργασία



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Η μέθοδος των ορίων 1

- Στις εκλογές του Μαΐου 2012 στην Κεντρική Μακεδονία ψήφισαν συνολικά 1.130.876 άτομα εκ των οποίων 236.637 ψήφισαν ΝΔ. Στις εκλογές του Ιουνίου ψήφισαν 1.082.768 και η ΝΔ έλαβε 348.733 ψήφους.
- Αν υποθέσουμε ότι δεν υπήρχαν καινούριοι ψηφοφόροι και άρα ασχολούμαστε με αυτούς που ψήφισαν το Μάιο μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την P (Ψηφίζω ΝΔ Ιούνιο / Ψήφισα ΝΔ Μάιο).



Η μέθοδος των ορίων 2

Σημείωση : ο πληθυσμός αναφοράς μας είναι όσοι ψήφισαν τον Μάιο (δηλαδή τις χρονικά πρώτες εκλογές).

Βασιζόμαστε στις παρακάτω παραδοχές: δεν υπήρχαν νέοι ψηφοφόροι [δηλαδή κάποιιοι που απέκτησαν το δικαίωμα να ψηφίσουν μεταξύ Μαΐου και Ιουνίου] και ότι δεν διαγράφηκαν ψηφοφόροι μεταξύ Μαΐου και Ιουνίου. Έτσι οι 48,108 που δεν ψήφισαν στις εκλογές του Ιουνίου μπορεί να θεωρηθεί ότι απείχαν.



Πίνακας διπλής εισόδου

Πίνακας 1.

Μάιος	Ιούνιος	ΝΔ	Όχι ΝΔ	Σύνολο
ΝΔ				236.637
Όχι ΝΔ				
Σύνολο		348.733		1.130.876



X και T

- Το X είναι το ποσοστό ΝΔ τον Μάιο και το T το ποσοστό ΝΔ τον Ιούνιο. Έτσι το $X=236637/1130876$ και το $T=348733/1130876$
Σημείωση: μπορούμε φυσικά να υπολογίσουμε το X και το T από τα αρχικά δεδομένα. Τότε $X=236637/1130876$ και $T_a=348733/1082768$.



Όρια

- Αν συμβολίσουμε με X το ποσοστό ΝΔ τον Μάιο και T το ποσοστό ΝΔ τον Ιούνιο τότε ο πίνακας μας γράφεται.

Πίνακας 2.

Μάιος	Ιούνιος	ΝΔ	ΌΧΙ ΝΔ	Σύνολο
ΝΔ		A	B	$X = 0.21$
ΌΧΙ ΝΔ		Γ	Δ	0.79
Σύνολο		$T = 0.32$	0.68	



Η ευθεία 1

- Αν σκεφτούμε ότι:
- $P(\text{ΝΔ Ιούνιο} / \text{ΝΔ Μάιο}) * 0.21 + P(\text{ΝΔ Ιούνιο} / \text{ΟΧΙ Μάιο}) * 0.79 = 0.32$ τότε $A * 0.21 + \Gamma * 0.79 = 0.32$ μπορούμε να εκφράσουμε τη σχέση των δύο πιθανοτήτων με μία γραμμή υπολογίζοντας δύο σημεία της.



Η ευθεία 2

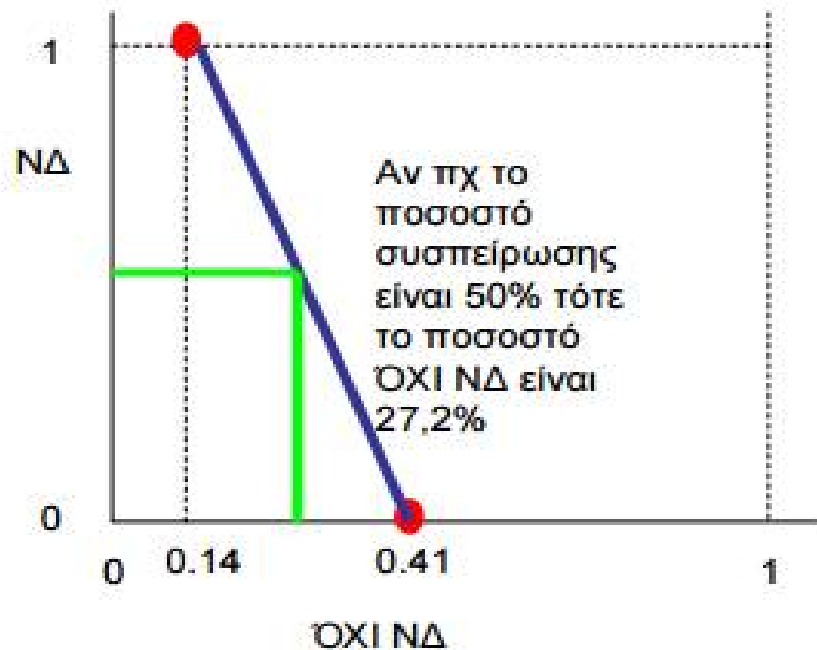
- Αν $A=1$ τότε $\Gamma=(0.32-0.21)/0.79=0.14$ και αν $A=0$ τότε $\Gamma=0.32/0.79=0.41$.

Στον οριζόντιο άξονα είναι το % όσων ψήφισαν τον Ιούνιο ΝΔ και δεν είχαν ψηφίσει το Μάιο, ενώ στον κάθετο το ποσοστό όσων ψήφισαν και στις δύο εκλογές ΝΔ. Η ευθεία συνδέει αριθμητικά τα δύο ποσοστά.



Η ευθεία 3

Διάγραμμα 1.



Η ευθεία 4

- β) επιλέγουμε για 4 θέσεις από 2 σύμβολα άρα υπάρχουν $2+4-1$ ανά 4 τρόποι δηλαδή 5.



Η ευθεία 5

- Δηλαδή αν όλοι που ψήφισαν ΝΔ το Μάιο ψήφισαν ΝΔ τον Ιούνιο ($A=1$, 100% συσπείρωση) 14% ($\Gamma=0,14$) από τους υπόλοιπους (που είχαν επιλέξει κάτι άλλο) ψήφισαν ΝΔ τον Ιούνιο. Με την γραμμή μπορούμε να βρούμε κάθε δυάδα τιμών. Αν πχ το ποσοστό συσπείρωσης ΝΔ είναι 50% το ποσοστό όσων ψήφισαν ΝΔ ενώ είχαν ψηφίσει κάτι άλλο είναι 27,2%.



Η ευθεία 6

- Με τους αντίστοιχους υπολογισμούς για το ΣΥΡΙΖΑ η ευθεία είναι $A*0.13+\Gamma*0.87=0.22$ και δύο σημεία της είναι τα:
 $(A,\Gamma)=\{(0,0.25),(1,0.10)\}$.



Δεσμευμένη πιθανότητα 1

- Σε μία έρευνα αγοράς το 55% των καταναλωτών που συμμετείχαν σε αυτήν ήταν γυναίκες. Το 60% των γυναικών δήλωσαν ότι προτιμούν κάποιο συγκεκριμένο προϊόν ενώ μόνο το 38% των ανδρών δήλωσαν ότι προτιμούν αυτό το προϊόν. Επιλέγεται στην τύχη ένα άτομο από αυτά που συμμετείχαν στην έρευνα.



Δεσμευμένη πιθανότητα 2

- Να υπολογισθούν: i. Η πιθανότητα το άτομο που επιλέχθηκε να προτιμά το συγκεκριμένο προϊόν. $P(\Gamma)=0.55$, $P(\Pi/\Gamma)=0.6$, $P(\Pi/A)=0.38$
Κατά συνέπεια:
- $P(\Pi) = P(\Gamma) * P(\Pi/\Gamma) + P(A) * P(\Pi/A) = 0.55 * 0.6 + 0.45 * 0.38 = 0.50$.



Δεσμευμένη πιθανότητα 3

- i. Η πιθανότητα το άτομο που επιλέχθηκε να είναι γυναίκα δεδομένου ότι δήλωσε ότι προτιμά το συγκεκριμένο προϊόν.
 $P(\Gamma) * P(\Pi/\Gamma) = P(\Gamma\Pi) = P(\Pi) * P(\Gamma/\Pi)$. Κατά συνέπεια: $0.55 * 0.6 = 0.5 * P(\Gamma/\Pi)$ και άρα:
 $P(\Gamma/\Pi) = 0.55 * 0.6 / 0.5 = 0.66$.



Πιθανότητα

- Έστω X ο αριθμός παιδιών των οικογενειών μιας κωμόπολης. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνεται η κατανομή πιθανοτήτων της μεταβλητής αυτής.

Πίνακας 3.

x_i	0	1	2	≥ 3
$P(x_i)$	0,16	0,32	0,38	0,14



Δεσμευμένη πιθανότητα 4

- Αν είναι γνωστό ότι μία οικογένεια έχει το πολύ 2 παιδιά (δηλαδή 0, 1 ή 2), να υπολογιστεί η πιθανότητα η οικογένεια να έχει τουλάχιστον 1 παιδί (δηλαδή 1 ή 2).
- $P(X \geq 1 | X \leq 2) * P(X \leq 2) = P(X \leq 2 \cap X \geq 1)$ κατά συνέπεια,
- $P(X \geq 1 | X \leq 2) = (0.32 + 0.38) / (0.16 + 0.32 + 0.38) = 0.81$.



Δεσμευμένη πιθανότητα 5

- Αν είναι γνωστό ότι μία οικογένεια έχει παιδιά (δηλαδή 1, 2, 3 ή περισσότερα) να υπολογιστεί η πιθανότητα να έχει το πολύ δύο παιδιά (δηλαδή 1 ή 2).
- $P(X \leq 2 / X \geq 0) * P(X \geq 0) = P(X \leq 2 \cap X \geq 0)$
κατά συνέπεια,
- $P(X \leq 2 / X \geq 0) = (0.32 + 0.38) / (0.32 + 0.38 + 0.14) = 0.83$.



Πιθανότητα 1

- Γίνεται μια έρευνα για τις προτιμήσεις των καταναλωτών αναφορικά με ένα προϊόν. Αν η πιθανότητα προτίμησης του προϊόντος από έναν καταναλωτή είναι 0,28 και ερωτηθούν 12 καταναλωτές στην τύχη, τότε να υπολογισθούν:



Πιθανότητα 2

- Η πιθανότητα να προτιμούν το προϊόν 4 καταναλωτές Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η πιθανότητα $P(X=4/N=12)$ [δηλαδή 4 από τους 12 να προτιμούν το προϊόν]. Ο αριθμός των τετράδων που μπορεί να σχηματιστούν είναι ίσος με τον αριθμό των συνδυασμών 4 ανά 12 δηλαδή $C(12,4)=495$.



Πιθανότητα 3

- Για κάθε μία από αυτές η πιθανότητα να έχουμε 4 που προτιμούν το προϊόν είναι $P(\Pi)^4 * P(\Pi')^8$ και κατά συνέπεια $P(\Pi=4) = C(12,4) * P(\Pi)^4 * P(\Pi')^8 = 495 * (0.28)^4 * (0.72)^8 = 0.219$.



Πιθανότητα 4

- Η πιθανότητα να μην προτιμά κανείς το προϊόν.

$$P(\Pi=0)=P(\Pi'=12)=C(12,0)*P(\Pi)^0*P(\Pi')^{12}$$
$$=(0.72)^{12}=0.019. \text{ Η πιθανότητα να το προτιμούν 2 καταναλωτές.}$$

- $P(\Pi=2)=C(12,2)*P(\Pi)^2*P(\Pi')^{10}=0.194.$



Πιθανότητα 5

- Η πιθανότητα να το προτιμούν τουλάχιστον 3 καταναλωτές. Ζητούμε την $P(\Pi \geq 3)$. Επειδή $P(\Pi \geq 3) = 1 - P(\Pi \leq 2)$ και έχουμε υπολογίσει τις $P(\Pi=0)$ και $P(\Pi=2)$, υπολογίζουμε την:
- $P(\Pi=1) = C(12,1) * P(\Pi)^1 * P(\Pi')^{11} = 0.091$. Κατά συνέπεια: $P(\Pi \geq 3) = 1 - (P(\Pi=0) + P(\Pi=1) + P(\Pi=2)) = 1 - (0.019 + 0.091 + 0.194) = 0.696$.



Πιθανότητα 6

- Μεταξύ 7 αντικειμένων τα τρία είναι ελαττωματικά. Επιλέγονται στην τύχη τρία από τα 7 από κάποιον που δεν γνωρίζει αυτό το γεγονός, τότε : Ποια η πιθανότητα να επιλέξει 2 ελαττωματικά;



Πιθανότητα 7

- Όλοι οι τρόποι να επιλέξουμε 3 από τα 7 είναι το πλήθος των $C(7,3)=35$. Αν επιλέξουμε 3 από τα οποία τα δύο είναι ελαττωματικά τότε από τα 3 ελαττωματικά έχουμε επιλέξει 2 και από τα 4 μη ελαττωματικά έχουμε επιλέξει ένα. Με βάση την αρχή του πολλαπλασιασμού έχουμε $C(4,1)*C(3,2)=4*3=12$, και η ζητούμενη πιθανότητα είναι $12/35$.



Πιθανότητα 8

- Η πιθανότητα ενός νεογέννητου να γεννηθεί αγόρι είναι $\frac{1}{2}$. Αν ένα αντρόγυνο κάνει δύο παιδιά, ποια η πιθανότητα να κάνει (α) πρώτα ένα αγόρι και μετά ένα κορίτσι, (β) ένα αγόρι και ένα κορίτσι ανεξαρτήτως σειράς, (γ) δύο αγόρια ή δύο κορίτσια. Όλα τα ενδεχόμενα είναι ΑΑ, ΚΚ, ΑΚ, ΚΑ. Το ενδεχόμενο ΑΚ έχει πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Το ενδεχόμενο {ΑΚ, ΚΑ} έχει πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και το ενδεχόμενο {ΑΑ, ΚΚ} έχει πιθανότητα $\frac{1}{2}$.



Παράδειγμα 1

Ένα κουτί περιέχει 10 άσπρες, 4 μαύρες και 2 κόκκινες μπάλες. Εάν πάρουμε δύο μπάλες χωρίς επανάθεση από το κουτί να υπολογιστεί η πιθανότητα α) και οι δύο να είναι άσπρες. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $(10/16) * (9/15) = 3/8 = 0.375$.



Παράδειγμα 2

- β) και οι δύο να είναι κόκκινες. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $(2/16)*(1/15)=0.008$.
- γ) τουλάχιστον μια να είναι άσπρη. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $1-P(\text{καμία άσπρη})$ και άρα είναι ίση με $1-(6/16)*(5/15)=7/8$.



Παράδειγμα 3

- δ) το πολύ μια να είναι άσπρη. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(\text{καμία άσπρη}) + P(\text{μία άσπρη})$. Έχουμε υπολογίσει $P(\text{δύο άσπρες}) = 3/8$, $P(\text{καμία άσπρη}) = 1/8$ [στο γ)], κατά συνέπεια $P(\text{μία άσπρη}) = 4/8$. Άρα $P(\text{καμία}) + P(\text{μία}) = 5/8$.
- ε) ακριβώς μια να είναι άσπρη Στο δ) παραπάνω υπολογίσαμε $P(\text{μία άσπρη}) = 4/8$.



Παράδειγμα 4

- στ) καμία κόκκινη. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $(14/16) * (13/15)$.
- ζ) καμία άσπρη Στο γ) παραπάνω υπολογίσαμε $P(\text{καμία άσπρη}) = 1/8$.



Ξένα και ανεξάρτητα

- α) Δείξτε ότι δύο γεγονότα A, B ξένα μεταξύ τους με $P(A) > 0, P(B) > 0$ δε μπορεί να είναι ανεξάρτητα. Όταν είναι ξένα τότε $P(AB) = 0$. Αλλά αν είναι ανεξάρτητα τότε $P(A) * P(B) = P(AB)$.
- β) Αν A, B ανεξάρτητα γεγονότα και $P(A) > 0, P(B) > 0$, τότε δε μπορεί να είναι ξένα. Όταν είναι ανεξάρτητα τότε:
 - $P(AB) = P(A) * P(B) \neq 0$, οπότε δεν μπορεί να είναι ξένα.



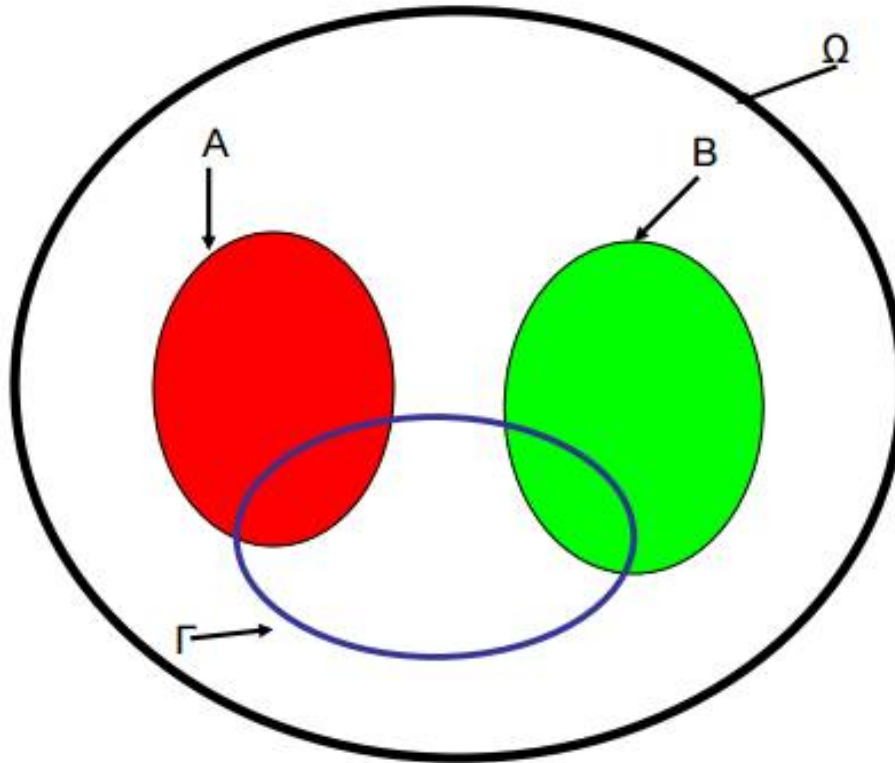
Πράξεις 1

- Θεωρείστε τα γεγονότα A , B , και Γ με $P(A)=0,5$, $P(B)=0,4$, $P(\Gamma)=0,3$, και $P(A \cap \Gamma) = P(B \cap \Gamma) = 0,1$. Αν A και B είναι ξένα μεταξύ τους (σημ. δηλαδή $P(A \cap B) = 0$), υπολογίστε τις πιθανότητες.



Πράξεις 2

Σχήμα 1.



Πράξεις 3

- i) A αλλά όχι Γ Δηλαδή $P(A \cap \Gamma') = P(A) - P(A \cap \Gamma)$
- ii) A ή B Δηλαδή $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- iii) Γ αλλά όχι A και B.

Δηλαδή $P(\Gamma \cap A' \cap B') = P(\Gamma) - P(\Gamma \cap A) - P(\Gamma \cap B)$

- iv) όχι A ούτε B ούτε Γ Δηλαδή $P(A' \cap B' \cap \Gamma') = 1 - P(A \cup B \cup \Gamma)$.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

- Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:
- Πίνακες/Διαγράμματα/Σχήματα.
- Πίνακας 1-3 : Παράδειγμα.
- Διάγραμμα 1: Παράδειγμα.
- Σχήμα 1: Παράδειγμα.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεόδωρος Χατζηπαντελής. «Μαθηματικά στην Πολιτική Επιστήμη: Εισαγωγή. Ασκήσεις (II)». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://eclass.auth.gr/courses/OCRS376/>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Σωτήρογλου Μαρίνα
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
πρόγραμμα για την ανάπτυξη



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

