ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αυτοματοποιημένη χαρτογραφία

Ενότητα # 11: Μέθοδοι παρεμβολής 3D-Αναλυτικές μέθοδοι

Ιωάννης Γ. Παρασχάκης
Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Μέθοδοι παρεμβολής 3D-Αναλυτικές μέθοδοι

Περιεχόμενα ενότητας

1. Δισδιάστατες μέθοδοι παρεμβολής
2. Αναλυτικές παρεμβολές
3. Απλή πιστή αναλυτική παρεμβολή
4. Επιλογή συναρτήσεων βάσης
5. Πιστή αναλυτική παρεμβολή και πιστή αναλυτική του ελαχίστου μέτρου με τη ΜΕΤ

Σκοποί ενότητας

- Κατανόηση των αναλυτικών μεθόδων παρεμβολής στις τρεις διαστάσεις στα ψηφιακά χαρτογραφικά δεδομένα

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Μέθοδοι παρεμβολής 3D-Αναλυτικές μέθοδοι

Δισδιάστατες μέθοδοι παρεμβολής

- Ανάλογα με τον τρόπο προσέγγισης των αρχικών δεδομένων
  - Πιστές
  - Προσεγγιστικές ή εξομαλυντικές
- Ανάλογα με τη μέθοδο παρεμβολής
  - Αναλυτικές
  - Αλγοριθμικές

Αναλυτικές παρεμβολές (1/3)

Έστω οι τιμές z_i, i=1,2,3, ..., n ενός φαινομένου που περιγράφεται από τη συνάρτηση $f(x,y)$. Προφανώς ισχύει $f(x_i,y_i) = z_i$. Θεωρώντας ότι $f(x,y) \approx f(x,y)$ γνωστή συνάρτηση της μορφής:

$$f(x,y) = a_1\,\phi_1(x,y) + a_2\,\phi_2(x,y) + \dots + a_m\,\phi_m(x,y),$$

Όπου a_i, i=1,2,3,...,m πραγματικοί αριθμοί και

$\phi_i(x,y)$, i=1,2,3,...,m γνωστές πραγματικές συναρτήσεις

Αναλυτικές παρεμβολές (2/3)

Για κάθε ένα από τα σημεία i=1,2,3, …, n μπορούμε να γράψουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$z_1 = a_1\, \phi_1(x_1,y_1) + a_2\, \phi_2(x_1,y_1) + \ldots + a_m\, \phi_m(x_1,y_1)$$

$$z_2 = a_1\, \phi_1(x_2,y_2) + a_2\, \phi_2(x_2,y_2) + \ldots + a_m\, \phi_m(x_2,y_2)$$

…

$$z_n = a_1\, \phi_1(x_n,y_n) + a_2\, \phi_2(x_n,y_n) + \ldots + a_m\, \phi_m(x_n,y_n)$$

Αναλυτικές παρεμβολές (3/3)

Σε μορφή πινάκων έχουμε:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1, y_1) & \varphi_2(x_1, y_1) & . & . & \varphi_m(x_1, y_1) \\ \varphi_1(x_2, y_2) & \varphi_2(x_2, y_2) & . & . & \varphi_m(x_2, y_2) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \varphi_1(x_n, y_n) & \varphi_1(x_n, y_n) & . & . & \varphi_1(x_n, y_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_m \end{bmatrix}$$

ή $\mathbf{z} = \mathbf{\Phi}\,\mathbf{a}$

Απλή πιστή αναλυτική παρεμβολή (1/3)

Όταν ισχύει **m=n** η λύση του **z = Φ a** δίνεται από τη σχέση :

$$\mathbf{a} = \mathbf{\Phi}^{-1}\,\mathbf{z}$$

Με την προϋπόθεση ότι $\det\{\Phi\} \neq 0$

$$\hat{z}_k = \hat{a}_1\,\varphi_1(x_k, y_k) + \hat{a}_2\,\varphi_2(x_k, y_k) + \ldots + \hat{a}_m\,\varphi_m(x_k, y_k)$$

Απλή πιστή αναλυτική παρεμβολή (2/3)

- Πλεονεκτήματα
  - Απλή διαδικασία επίλυσης
- Μειονεκτήματα
  - Αντιστροφή πίνακα μεγάλων διαστάσεων. Για να ξεπεράσουμε το πρόβλημα ορίζουμε ως συνάρτηση βάσης την παρακάτω:

$$S_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 \; \gamma\iota\alpha \; i = j \\ 0 \; \gamma\iota\alpha \; i \neq j \end{cases}$$

  - και συνεπάγεται **Φ = I** και $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{z}$

Απλή πιστή αναλυτική παρεμβολή (3/3)

- Μειονεκτήματα (συνέχεια …)
  - Ως μέθοδος παρεμβολής έχει πολλές παραμέτρους, με αποτέλεσμα μια πολύπλοκη επιφάνεια παρεμβολής

Επιλογή συναρτήσεων βάσης

Συνήθως επιλέγονται ως συναρτήσεις βάσεις με καλά αποτελέσματα μονώνυμα της μορφής

$\phi_i (x,y) = x^k y^l$

Με συνέπεια τη δημιουργία πολυωνύμων πλήρους βαθμού (για λόγους ομοιογένειας)

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} a_{kl}\, x^k y^l$$

Πιστή αναλυτική παρεμβολή και πιστή αναλυτική του ελαχίστου μέτρου με τη ΜΕΤ (1/2)

Όταν **m > n** τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις για το **z = Φ a**. Για την άρση της απειρίας των λύσεων ορίζουμε μια συνθήκη ελαχίστων τετραγώνων μεταξύ των αγνώστων :

$\mathbf{a}^T \mathbf{R}\, \mathbf{a} = \min$,

όπου **R** πίνακας βάρους των συντελεστών των αγνώστων a_i. Η λύση εφαρμόζοντας την ΜΕΤ είναι :

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{\Phi}^T (\mathbf{\Phi} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{\Phi}^T)^{-1} \mathbf{z}$$

Πιστή αναλυτική παρεμβολή και πιστή αναλυτική του ελαχίστου μέτρου με τη ΜΕΤ (2/2)

Ορισμός του πίνακα R

Ο πίνακας βάρους **R** των συντελεστών των αγνώστων a_i, επιλέγεται είτε αυθαίρετα είτε είναι το αποτέλεσμα της ελαχιστοποίησης κάποιας παραμέτρου που συνδέεται άμεσα με τις συναρτήσεις βάσης και κατά συνέπεια με την προσεγγιστική συνάρτηση f(x,y). Ο πίνακας **R** θα πρέπει να έχει όλες τις ιδιότητες ενός πίνακα βάρους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Δημήτριος Σαραφίδης
Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2012-13