ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

Ενότητα 10: Επαναληπτική Βελτίωση

Ιωάννης Μανωλόπουλος, Καθηγητής
Αναστάσιος Γούναρης, Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Πληροφορικής ΑΠΘ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Επαναληπτική Βελτίωση

Μέθοδος Simplex, Ευσταθής γάμος

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Επαναληπτική Βελτίωση

Η επαναληπτική βελτίωση είναι τεχνική σχεδίασης αλγορίθμων για προβλήματα βελτιστοποίησης.

- Αρχίζει με μία εφικτή λύση.
- Επαναλαμβάνει το ακόλουθα βήμα μέχρις ότου δεν μπορεί να επέλθει περαιτέρω βελτίωση:
  - Άλλαξε την τρέχουσα εφικτή λύση σε μία άλλη εφικτή λύση με καλύτερη τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος.
- Η τελευταία εφικτή λύση επιστρέφεται ως βέλτιστη.

Σημείωση: Τυπικά, η κάθε αλλαγή στην τρέχουσα λύση είναι μικρή ελέγχοντας μόνο την κοντινή περιοχή (τοπική αναζήτηση)

Βασική δυσκολία:

Κίνδυνος για εντοπισμό τοπικού βέλτιστου αντί για ολικού.

Κάποια Παραδείγματα

- Μέθοδος simplex
- Αλγόριθμος Ford-Fulkerson για μέγιστη ροή
- Μέγιστο ταίριασμα σε γράφους
- Ευσταθής γάμος

Γραμμικός Προγραμματισμός

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear programming) στοχεύει στην βελτιστοποίηση μίας γραμμικής συνάρτησης από μεταβλητές που υπόκειντα σε γραμμικούς περιορισμούς:

μεγιαστοποίησε (ή ελαχιστοποίησε) $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$

υπό την προϋπόθεση ότι: $a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n \leq$ (ή $\geq$ *ή* $=$) b_i, $i = 1,\ldots,m$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

Η συνάρτηση $z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$ ονομάζεται *αντικειμενική συνάρτηση.*

Οι περιορισμοί $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ καλούνται περιορισμοί μη αρνητικότητας

Παράδειγμα

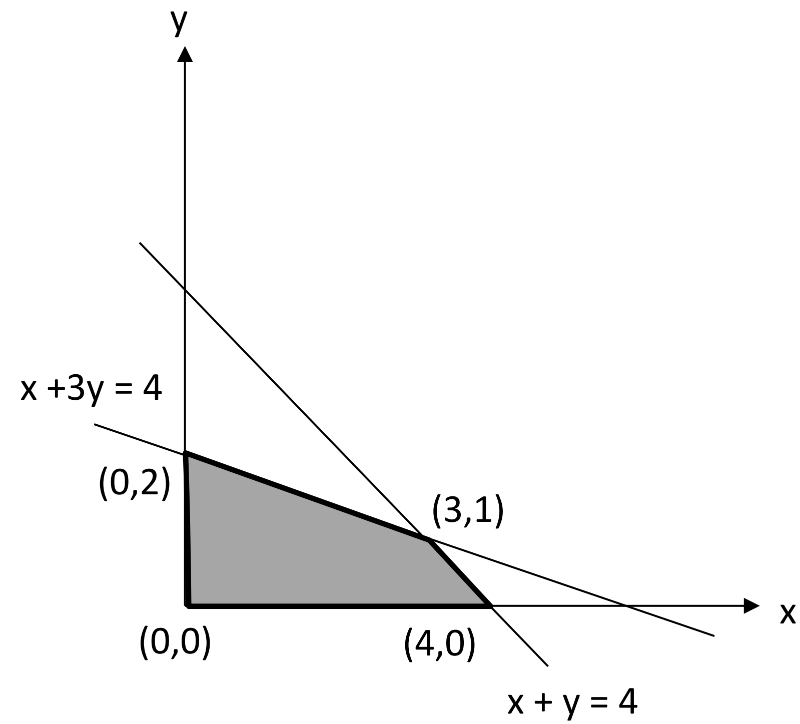
Μεγιστοποίησε το

$3x + 5y$

Όταν $x + y \leq 4$

$x + 3y \leq 6$

$x \geq 0, \; y \geq 0$



Η εφικτή περιοχή αποτελείται από τα σημεία που ορίζονται από τους περιορισμούς

Γεωμετρική προσέγγιση

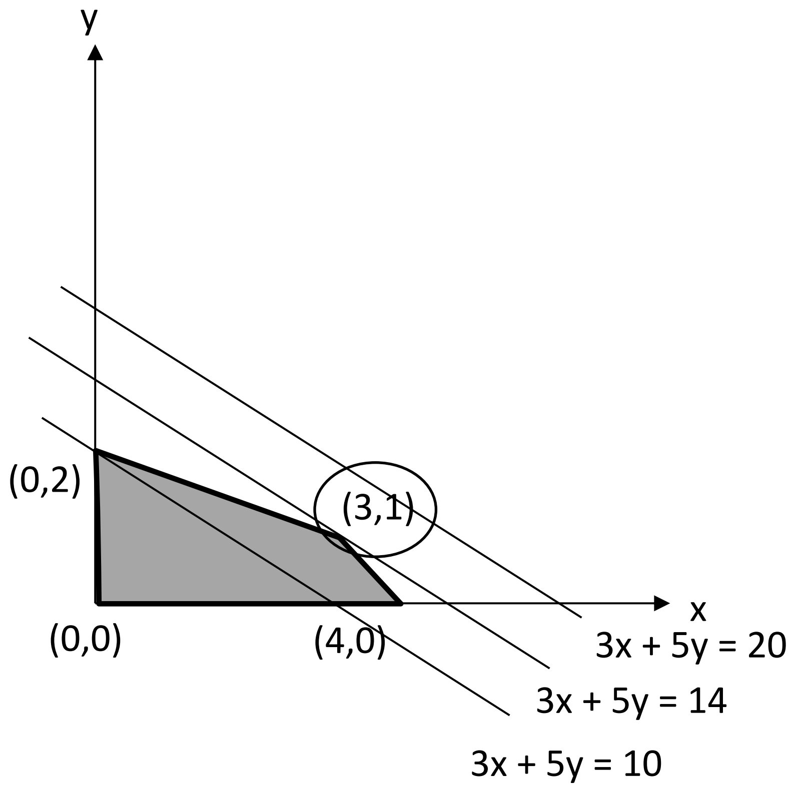
Μεγιστοποίησε το

$3x + 5y$

Όταν $x + y \leq 4$

$x + 3y \leq 6$

$x \geq 0, \; y \geq 0$



<u>Θεώρημα ακρότατου (extreme) σημείου</u> Κάθε πρόβλημα ΓΠ με μία μη κενή εφικτή περιοχή έχει βέλτιστη λύση, η οποία μπορεί πάντοτε να βρεθεί σε κάποιο από τα *ακρότατα σημεία* της εφικτής περιοχής.

Πιθανές περιπτώσεις

- Το πρόβλημα του ΓΠ μπορεί να έχει πεπερασμένη βέλτιστη λύση, που ενδεχομένως να μην είναι μοναδική.

- Η εφικτή περιοχή για την αντικειμενική συνάρτηση να μην είναι φραγμένη (bounded).

- Να είναι αδύνατη, δηλ. να μην υπάρχουν σημεία που να ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς.

Η μέθοδος Simplex

- Είναι η κλασική μεθοδος επίλυσης προβλημάτων ΓΠ
- και ένας από τους πιο σημαντικούς αλγορίθμους που εφευρέθηκαν ποτέ (από τον George Dantzig το 1947)

- Βασίζεται στην ιδέα της επαναληπτικής βελτίωσης:
  - Δημιουργεί μία ακολουθία από γειτονικά σημεία στην εφικτή περιοχή που βελτιώνουν την αντικειμενική συνάρτηση μέχρις ότου δεν υπάρχει περαιτέρω βελτίωση.

Τυπική μορφή ενός προβλήματος ΓΠ

- Είναι διατυπωμένο ως πρόβλημα βελτιστοποίησης.
- Όλοι οι περιορισμοί (εκτός από αυτούς της μη αρνητικότητας) είναι γραμμικές εξισώσεις.
- Καμία από τις μεταβλητές δεν πρέπει να είναι αρνητική.

Τυποποιημένη μορφή (standard form) όταν υπάρχουν m περιορισμοί και n άγνωστοι ($n \geq m$) :

$$
\begin{array}{ll}
\max & c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\
\text{όταν} & a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n = b_i, \quad i = 1,\ldots,m, \\
 & x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

Κάθε πρόβλημα ΓΠ μπορεί να αναπαρασταθεί με αυτόν τον τρόπο.

Παράδειγμα

Max $3x + 5y$

Όταν $x + y \leq 4$

$x + 3y \leq 6$

$x \geq 0, \quad y \geq 0$

$\Rightarrow$

max $3x + 5y + 0u + 0v$

όταν $x + y + u = 4$

$x + 3y + v = 6$

$x \geq 0, \; y \geq 0, \; u \geq 0, \; v \geq 0$

Οι μεταβλητές *u* και *v* χρησιμοποιούνται για να μετατραπούν οι περιορισμοί ανισότητας, σε περιορισμούς ισότητας

- ονομάζονται *χαλαρές ή βοηθητικές μεταβλητές* - *slack variables*

Βασικές Εφικτές Λύσεις

Μία *βασική λύση* του συστήματος m γραμμικών εξισώσεων με n *αγνώστους* ($n \geq m$) μπορεί να βρεθεί αν θέσουμε $n - m$ μεταβλητές ίσες με 0 και λύσουμε το σύστημα για τις υπόλοιπες m μεταβλητές. Οι μεταβλητές που θέσαμε στο 0 είναι οι *μη βασικές,* ενώ αυτές για τις οποίες επιλύσαμε το σύστημα είναι οι *βασικές.*

Μία βασική λύση είναι εφικτή αν όλες οι βασικές μεταβλητές είναι μη αρνητικές.

Παράδειγμα $x + y + u = 4$

$x + 3y + v = 6$

Το (0, 0, 4, 6) είναι μία βασική εφικτή λύση (x, y είναι μη βασικές - u, v είναι βασικές μεταβλητές)

<u>Υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των ακροτάτων σημείων μίας εφικτής περιοχής του προβλήματος ΓΠ και των βασικών εφικτών του λύσεων.</u>

Πινάκιο (Tableau) Simplex

Max $z = 3x + 5y + 0u + 0v$

Αν $x + y + u = 4$

$x + 3y + v = 6$

$x\geq 0,\ y\geq 0,\ u\geq 0,\ v\geq 0$

Βασικές Μεταβλητές

	x	y	u	v	
u	1	1	1	0	4
v	1	3	0	1	6
αντικειμενική γραμμή	-3	-5	0	0	0

Βασκή εφικτή λύση

(0, 0, 4, 6)

Τιμής της z στο (0, 0, 4, 6)

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Περιγραφή της μεθόδου Simplex - I

- Βήμα 0 [Αρχικοποίηση] :
  - Μετέτρεψε το πρόβλημα στην κανονική μορφή και δημιούργησε το αρχικό πινάκιο.
- Βήμα 1 [Έλεγχος Βελτιστότητας]:
  - Αν όλες οι τιμές στην αντικειμενική γραμμή είναι μη αρνητικές, σταμάτησε καθώς ο πίνακας περιέχει μία βέλτιστη λύση.
- Βήμα 2 [Εύρεση εισερχόμενης μεταβλητής]:
  - Επέλεξε την πιο αρνητική τιμή στην αντικειμενική γραμμή.
  - Η στήλη που ανήκει, αντιστοιχεί στην εισερχόμενη μεταβλητη και τη στήλη pivot (στήλη περιστροφής).

Περιγραφή της μεθόδου Simplex - ΙΙ

- Βήμα 3 [Εύρεση απερχόμενης μεταβλητής] :
  - Για κάθε θετική τιμή στην στήλη pivot, υπολόγισε το λόγο θ διαιρώντας την δεξιότερη τιμή της γραμμής με την τιμή στην στήλη pivot.
  - Αν δεν υπάρχουν θετικές τιμές, η αντικειμενική συνάρτηση δεν είναι φραγμένη. Βρες την γραμμή με το μικρότερο λόγο θ.
  - Αυτή η γραμμή δείχνει την απερχόμενη μεταβλητή και τη γραμμή pivot.
- Βήμα 4 [Δημιούργησε το νέο πινάκιο]:
  - Διαίρεσε όλες τις τιμές στην γραμμή pivot με την αντίστοιχη τιμή της γραμμής αυτής για τη στήλη pivot.
  - Αφαίρεσε την νέα γραμμή από όλες τις υπόλοιπες γραμμές (συμπεριλαμβανομένης και της αντικειμενικής), αφού την πολλαπλασιάσεις με την τιμή στη στήλη pivot της γραμμής από την οποία θα γίνει η αφαίρεση.
  - Ενημέρωσε την ετικέτα της βασικής μεταβλητής με το όνομα της μεταβλητής της στήλης pivot.
  - Πήγαινε πίσω στο Βήμα 1.

Παράδειγμα Εφαρμογής

max $z = 3x + 5y + 0u + 0v$

Όταν $x + y + u = 4$

$x + 3y + v = 6$

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ u \geq 0,\ v \geq 0$

	x	y	u	v	
u	1	1	1	0	4
v	1	3	0	1	6
	-3	-5	0	0	0

Βασική εφικτή λύση: (0, 0, 4, 6)

$z = 0$

	x	y	u	v	
u	2/3	0	1	0	4
v	1/3	1	0	1	6
	-4/3	-5	0	0	0

Βασική εφικτή λύση: (0, 2, 2, 0)

$z = 10$

	x	y	u	v	
u	1	1	1	0	4
v	1	3	0	1	6
	-3	-5	0	0	0

Βασική εφικτή λύση: (3, 1, 0, 0)

$z = 14$

Σχόλια πάνω στη μέθοδο Simplex

- Η εύρεση της αρχικής βασικής εφικτής λύσης μπορεί να είναι πρόβλημα.

- Θεωρητικά μπορεί να υπάρχει η περίπτωση κύκλωσης (επανάληψης των ίδιων βημάτων).

- Στην πράξη απαιτούνται *m* με 3*m* επαναλήψεις.

- Στη χειρότερη περίπτωση η αποδοτικότητα είναι εκθετική.

- Υπάρχουν πιο σύγχρονοι αλγόριθμοι (π.χ., ο *interior-point* αλγόριθμος του *Karmarkar* (1984) που είναι πολυωνυμικός στην χειρότερη περίπτωση και έχει παρόμοια-συγκρίσιμη απόδοση στην πράξη)

Ευσταθής γάμος

Υπάρχει ένα σύνολο Y = $\{m_1,\ldots,m_n\}$ από *n* άνδρες και ένα σύνολο X = $\{w_1,\ldots,w_n\}$ με *n* γυναίκες. Κάθε άνδρας έχει μία λίστα προτίμησης με γυναίκες, και κάθε γυναίκα μία λίστα προτίμησης από άνδρες (χωρίς ισοπαλίες).

Ένα γαμήλιο ταίριασμα *M* είναι ένα σύνολο από *n* ζεύγη (m_i, w_j).

Ένα ζεύγος (*m, w*) είναι *blocking* για το M αν ο *m* και η *w* δεν έχουν ταιριαστεί μεταξύ τους αλλά και οι 2 προτιμούν ο ένας τον άλλο από τους συντρόφους τους στο M.

Το M είναι *ευσταθές* όταν δεν υπάρχει blocking ζευγάρι.

Το πρόβλημα του ευσταθούς γάμου είναι η δημιουργία ευσταθους M.

Παράδειγμα

Ένα παράδειγμα του προβλήματος μπορεί να οριστεί είτε με δύο σύνολα από λίστες προτίμησης, είτε με ένα πίνακα προτίμησης:

<u>προτιμήσεις ανδρών</u>

	1^{st}	2^{nd}	3^{rd}
Bob:	Lea	Ann	Sue
Jim:	Lea	Sue	Ann
Tom:	Sue	Lea	Ann

<u>προτιμήσεις γυναικών</u>

	1^{st}	2^{nd}	3^{rd}
Ann:	Jim	Tom	Bob
Lea:	Tom	Bob	Jim
Sue:	Jim	Tom	Bob

<u>πίνακας προτιμήσεων</u>

	Ann	Lea	Sue
Bob	2,3	1,2	3,3
Jim	3,1	1,3	2,1
Tom	3,2	2,1	1,2

{(Bob, Ann) (Jim, Lea) (Tom, Sue)}: ασταθής

{(Bob, Ann) (Jim, Sue) (Tom, Lea)}: ευσταθής

Αλγόριθμος Gale-Shapley

Βήμα 0 Όλοι οι άνδρες και όλες οι γυναίκες είναι ελεύθεροι.

Βήμα 1 Όσο υπάρχουν ελεύθεροι άνδρες, επέλεξε έναν από αυτούς:
Φάση Πρότασης Ο επιλεγμένος άνδρας κάνει πρόταση στην πρώτη γυναίκα σύμφωνα με τη λίστα προτιμήσεών του που δεν έχει πρόταση μέχρι τώρα.

Φάση απάντησης Αν η γυναίκα είναι ελεύθερη δέχεται την πρόταση και αρραβωνιάζεται. Αν δεν είναι, συγκρίνει τον άνδρα που μόλις της πρότεινε με τον νυν αρραβωνιαστικό. Αν προτιμά τον νέο άνδρα, αρραβωνιάζεται μαζί του, αφήνοντας ελεύθερο τον προηγούμενο, αλλιώς απορρίπτεται η πρόταση.

Βήμα 2 Όλοι οι αρραβώνες καταλήγουν σε γάμο.

Παράδειγμα

Ελέυθεροι:
Bob, Jim, Tom

	Ann	Lea	Sue
Bob	2,3	$\boxed{1,2}$	3,3
Jim	3,1	1,3	2,1
Tom	3,2	2,1	1,2

O Bob προτείνει στην Lea, η Lea δέχεται.

Ελέυθεροι:
Jim, Tom

	Ann	Lea	Sue
Bob	2,3	$\boxed{1,2}$	3,3
Jim	3,1	<u>1,3</u>	2,1
Tom	3,2	2,1	1,2

O Jim προτείνει στη Lea. H Lea απορρίπτει την πρόταση.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Ελέυθεροι:
Jim, Tom

	Ann	Lea	Sue
Bob	2,3	$\boxed{1,2}$	$\boxed{3,3}$
Jim	3,1	1,3	2,1
Tom	3,2	2,1	1,2

O Jim προτείνει στη Sue, η Sue δέχεται.

Ελέυθεροι:
Tom

	Ann	Lea	Sue
Bob	2,3	$\boxed{1,2}$	3,3
Jim	3,1	1,3	$\boxed{2,1}$
Tom	3,2	2,1	<u>1,2</u>

O Tom προτείνει στη Sue. H Sue απορρίπτει την πρόταση.

Παράδειγμα (συνέχεια (2))

Ελεύθεροι:
Tom

	Ann	Lea	Sue
Bob	2,3	1,2	$\boxed{3,3}$
Jim	3,1	$\boxed{1,3}$	2,1
Tom	3,2	2,1	1,2

Ο Tom προτείνει στη Lea. Η Lea αντικαθιστά τον Bob με τον Tom

Ελεύθεροι:
Bob

	Ann	Lea	Sue
Bob	$\boxed{2,3}$	1,2	3,3
Jim	3,1	1,3	$\boxed{2,1}$
Tom	3,2	$\boxed{2,1}$	1,2

Ο Bob προτείνει στην Ann. Η Ann δέχεται

Σχολιασμός αλγορίθμου

- Ο αλγόριθμος εκτελεί το πολύ n^2 επαναλήψεις.

- Σε αυτή την μορφή ο αλγόριθμος παράγει τα καλύτερα (βέλτιστα) για τους άνδρες ευσταθή ζευγάρια. Αν πρότειναν οι γυναίκες, θα είχαμε τα καλύτερα για τις γυναίκες ζευγάρια.
  - Το βέλτιστο ταίριασμα είναι μοναδικό για συγκεκριμένες προτιμήσεις.

- Εφαρμόζεται σε περιπτώσεις όπως ανάθεση θέσεων ειδικοτήτων σε αποφοίτους της Ιατρικής.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ανδρέας Κοσματόπουλος
Θεσσαλονίκη, Αύγουστος 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.