



Συμβολικές Γλώσσες Προγραμματισμού

Ενότητα 3: Αριθμητικοί υπολογισμοί

Νικόλαος Καραμπετάκης

Τμήμα Μαθηματικών



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα

1. Αριθμητικοί τελεστές.
2. Προσεγγιστικοί υπολογισμοί.
3. Τελεστές Σύγκρισης.
4. Λογικοί Τελεστές.
5. Γνωστές συναρτήσεις.
6. Σταθερές.
7. Ανάθεση τιμής σε μεταβλητή.
8. Τύποι αριθμών.
9. Βοήθεια.
10. Αριθμητικό άθροισμα και γινόμενο αριθμών.
11. Εύρεση λύσης εξίσωσης.
12. Αριθμητική βελτιστοποίηση.
13. Ορισμένα Ολοκληρώματα.
14. Τυχαίοι αριθμοί.
15. Θεωρία αριθμών.
16. Αποθήκευση και έξοδος.



Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη των αριθμητικών υπολογισμών που πραγματοποιούνται με το *Mathematica*.



Αριθμητικοί Τελεστές (1)

Πρόσθεση (+)

$$3 + 4$$

7

Αφαίρεση (-)

$$123 - 321$$

-198

Πολλαπλασιασμός

$$78 * 84$$

6552



Αριθμητικοί Τελεστές (2)

Διαίρεση

35 / 24

35
—
24

Δύναμη

2²⁴

16 777 216



Αριθμητικοί Τελεστές (3)

Προσπάθησε να υπολογίσεις τις παρακάτω εκφράσεις :

$$31 \times \frac{4}{23} - 52$$

$$(32 + 24 - 23) + \frac{22}{2 - 34}$$

$$31 * 4 / 23 - 52$$

$$\frac{1072}{23}$$

$$(32 + 24 - 23) + 22 / (2 - 34)$$

$$\frac{517}{16}$$



Τελεστές Σύγκρισης (1)

Ισότητα (== ή Equal[x,y])

```
5 == 5
```

```
True
```

Διάφορο (!= ή Unequal[x,y])

```
5 ≠ 6
```

```
True
```



Τελεστές Σύγκρισης (2)

Μεγαλύτερο (> ή Greater[x,y]), Μεγαλύτερο ή ίσο (>= ή GreaterEqual[x,y])

```
5 ≥ 3
```

```
True
```

Μικρότερο (< ή Less[x,y]), Μικρότερο ή ίσο (<= ή LessEqual[x,y])

```
7 < 9
```

```
True
```



Λογικοί Τελεστές (1)

Όχι (! ή Not[x])

```
Not[3 >= 3]
```

```
False
```

Και (&& ή And[x,y])

```
(4 == 3) && (3 > 2)
```

```
False
```

```
And[4 == 3, 3 > 2]
```

```
False
```



Λογικοί Τελεστές (2)

Ή (`||` ή `Or[x,y]`)

```
True || True
```

```
True
```

ή/και (`&&` ή `Xor[x,y]`)

```
(3 > 4) && !(3 < 5)
```

```
False
```

Η σειρά προτεραιότητας είναι Not, And, Or.

Προσπάθησε να υπολογίσεις το αποτέλεσμα της έκφρασης

(1<2) και όχι (4<2)



Ανάθεση τιμής σε μεταβλητή (1)

Μεταβλητή=έκφραση

c = 1

1

c = c + 1

2

c ++

2

c

3

++c

4



Ανάθεση τιμής σε μεταβλητή (2)

c

4

c--

4

c

3

--c

2

c

2



Ανάθεση τιμής σε δύο μεταβλητές

Ανάθεση μιας τιμής σε δύο μεταβλητές $x=y=τιμή$

$x = y = 1$

1

x

1

y

1



Διαγραφή των τιμών μιας μεταβλητής

Διαγραφή των τιμών μιας μεταβλητής (Clear[μεταβλητή] ή μεταβλητή=.)

```
Clear[x, y, c]
```

```
c
```

```
C
```



Ανάθεση τιμής σε μεταβλητή (3)

Αν μετά από μια εντολή ακολουθεί ερωτηματικό, δεν εμφανίζεται το αποτέλεσμα της εκτέλεσης της εντολής (χρήσιμο στα προγράμματα).

```
x = 1; y = 1
```

```
1
```

**** Είναι φρόνιμο να χρησιμοποιούμε ονόματα μεταβλητών που αρχίζουν με μικρό γράμμα για να τα ξεχωρίζουμε από τις συναρτήσεις.**



Σταθερές (1)

π (Pi)

N[Pi, 5]

3.1416

e (E)

N[E, 5]

2.7183

$\pi/180$ (ακτίσιο) (Degree)

N[Degree, 5]

0.017453



Σταθερές (2)

$$i = \sqrt{-1} \text{ (I)}$$

$$(3 + 4 * I) * (4 - 5 * I)$$

$$32 + i$$

Άπειρο (Infinity)

$$\text{ArcTan[Infinity]}$$

$$\frac{\pi}{2}$$

Υπολογίστε τις εκφράσεις

$$(1 - i)(1 + i)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{\pi}\right)$$



Ακέραιοι και Ρητοί αριθμοί (1)

3/4

$\frac{3}{4}$

FullForm[%]

`Rational[3, 4]`

Ο παραπάνω αριθμός είναι ρητός όπως φαίνεται παρακάτω

Head[%]

`Rational`



Ακέραιοι και Ρητοί αριθμοί (2)

Σε αντίθεση με άλλες γλώσσες προγραμματισμού, στο *Mathematica* ακέραιοι και ρητοί αποθηκεύονται στην πλήρη μορφή τους.

```
Precision[%%]
```

```
∞
```

Για πράξεις μεταξύ ακεραίων που μπορεί να χειριστεί ο H/Y χρησιμοποιεί τις δυνατότητες του H/Y

```
2^3 + 2^5
```

```
40
```

διαφορετικά χρησιμοποιεί ειδικούς αλγορίθμους

```
2^256 + 2^1024
```

```
179769 313 486 231 590 772 930 519 078 902 473 361 797 697 894 230 657 273 430 081 157 732 675 805 500 963 132 708 477 322 407 536 021 120 113 879 871 393 357 :  
658 789 768 814 416 622 492 847 430 639 474 124 377 767 893 424 865 485 276 302 219 601 246 094 119 453 082 952 085 005 768 838 150 682 342 462 881 589 705 199 :  
778 143 432 586 921 495 693 274 206 093 217 230 604 120 280 344 292 940 337 537 353 777 152
```



Ακέραιοι και Ρητοί αριθμοί (3)

Υπάρχει συνάρτηση που ελέγχει αν ένας αριθμός είναι ακέραιος ή αν ένα αποτέλεσμα αποτελεί αριθμό.

IntegerQ[%]

True

NumberQ[%%]

True

Το μέγεθος σε byte που καταλαμβάνει ο παραπάνω αριθμός είναι

ByteCount[%%%]

184



Ακέραιοι και Ρητοί αριθμοί (4)

```
Head[1.4142]
```

```
Real
```

```
Precision[1.4142]
```

```
MachinePrecision
```

Το π δεν είναι αριθμός

```
{Head[Pi], NumberQ[Pi]}
```

```
{Symbol, False}
```



Μιγαδικοί αριθμοί (1)

Έστω ο μιγαδικός αριθμός

$$z = 3 + 2i$$

$$3 + 2i$$

FullForm[z]

Complex[3, 2]

Το πραγματικό του μέρος είναι

Re[z]

3

ενώ το φανταστικό του μέρος

Im[z]

2



Μιγαδικοί αριθμοί (2)

Ο συζυγής του z είναι

Conjugate[z]

$$3 - 2i$$

Το μέτρο του z είναι

Abs[z]

$$\sqrt{13}$$

ενώ το όρισμα του είναι

Arg[z]

$$\text{ArcTan}\left[\frac{2}{3}\right]$$



Μιγαδικοί αριθμοί (3)

Τριγωνομετρική μορφή αριθμού

$$x = -\sqrt{3} + i$$

$$i - \sqrt{3}$$

Abs[x]

2

Arg[x]

$$\frac{5\pi}{6}$$



Μιγαδικοί αριθμοί (4)

Η τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού x είναι

$$\text{Simplify}\left[2 * \left(\text{Cos}\left[\frac{5 \text{ Pi}}{6}\right] + \text{I Sin}\left[\frac{5 \text{ Pi}}{6}\right]\right)\right]$$

$$i - \sqrt{3}$$

Νιοστές ρίζες της μονάδας (συμπεριλαμβανομένων και μιγαδικών).

```
Clear[z]
```



Μιγαδικοί αριθμοί (5)

```
Solve[z^4 == 1, z]
```

```
{{z → -1}, {z → -i}, {z → i}, {z → 1}}
```

ή και αριθμητικά

```
Solve[z^4 == 1, z] // N
```

```
{{z → -1.}, {z → 0. - 1. i}, {z → 0. + 1. i}, {z → 1.}}
```



Άσκηση 1

Ασκήσεις. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$I + I^2 + I^3 + I^4$$

$$\frac{1}{z^2 - z} \text{ αν } z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$(a + bi)^{10} + (b - ai)^{10}$$

Να κάνετε χρήση της συνάρτησης `Simplify[]` που έχει ως σκοπό την απλοποίηση εκφράσεων.



Προσεγγιστικοί Υπολογισμοί (1)

Οι πράξεις μεταξύ ακεραίων μας οδηγεί σε ακέραιο ή ρητό αποτέλεσμα. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε όμως το αποτέλεσμα ως πραγματικό αριθμό θα πρέπει να κάνουμε χρήση της συνάρτησης N (με δύο τρόπους).

```
N[1 / 3]
```

```
0.333333
```

```
1 / 3 // N
```

```
0.333333
```

Μπορούμε αν θέλουμε να ορίσουμε την ακρίβεια των υπολογισμών μας δηλώνοντας το πλήθος n των σημαντικών ψηφίων που θέλουμε να έχει η έκφραση μας $expr$ $N[expr, n]$.

```
N[Pi, 6]
```

```
3.14159
```



Προσεγγιστικοί Υπολογισμοί (2)

```
N[Pi, 100]
```

```
3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342.  
117068
```

Μπορούμε να υπολογίσουμε την ακρίβεια που χρησιμοποιεί το *Mathematica* για υπολογισμούς που κάνει.

```
N[17^(1/2)]
```

```
4.12311
```

```
Precision[%]
```

```
MachinePrecision
```



Προσεγγιστικοί Υπολογισμοί (3)

Εύκολα μπορούμε να μετατρέψουμε μια πραγματική έκφραση σε ακέραια

```
Rationalize[%%, 0]
```

$$\frac{76\,996\,132}{18\,674\,305}$$

Να υπολογίσετε την παρακάτω έκφραση με ακρίβεια 20 σημαντικών ψηφίων και στη συνέχεια να την μετατρέψετε σε ρητό αριθμό $\sqrt{2}$.



Γνωστές συναρτήσεις (1)

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις (Sin[x], Cos[x], Tan[x], ArcSin[x], ArcCos[x], ArcTan[x])

Sin[Pi / 2]

1

ArcTan[Infinity]

$\frac{\pi}{2}$

Εκθετική (Exp[x]), Λογάριθμος με βάση το b (Log[b,x], με βάση το e Log[x])

Log[E]

1



Γνωστές συναρτήσεις (2)

Exp[Log[x]]

$i - \sqrt{3}$

Απόλυτη τιμή του x (Abs[x]), Πρόσημο του x (Sign[x])

Abs[-3]

3

Παραγοντικό (!), Υπόλοιπο της διαίρεσης του n με το m (Mod[n,m]), ο πλησιέστερος ακέραιος στον x (Round[x])

45!

119 622 220 865 480 194 561 963 161 495 657 715 064 383 733 760 :
000 000 000



Γνωστές συναρτήσεις (3)

Mod[10, 3]

1

Round[4.56]

5

Round[-4.56]

-5

Υπολογίστε τις εκφράσεις

$$(\eta\mu(\pi/4))^2 + (\sigma\upsilon\nu(\pi/4))^2$$

$$e^\pi - \pi^e$$



Βοήθεια (1)

Βοήθεια για την σύνταξη της εντολής Plot.

? Plot



Βοήθεια (2)

Επιπλέον παράμετροι της σύνταξης της εντολής της Plot.

?? Plot

```
Attributes[Plot] = {HoldAll, Protected}
```

```
Options[Plot] = {AlignmentPoint → Center, AspectRatio →  $\frac{1}{\text{GoldenRatio}}$ , Axes → True, AxesLabel → None,  
AxesOrigin → Automatic, AxesStyle → {}, Background → None, BaselinePosition → Automatic, BaseStyle → {},  
ClippingStyle → None, ColorFunction → Automatic, ColorFunctionScaling → True, ColorOutput → Automatic,  
ContentSelectable → Automatic, CoordinatesToolOptions → Automatic, DisplayFunction → $DisplayFunction, Epilog → {},  
Evaluated → System`Private`$Evaluated, EvaluationMonitor → None, Exclusions → Automatic, ExclusionsStyle → None,  
Filling → None, FillingStyle → Automatic, FormatType → TraditionalForm, Frame → False, FrameLabel → None,  
FrameStyle → {}, FrameTicks → Automatic, FrameTicksStyle → {}, GridLines → None, GridLinesStyle → {}, ImageMargins → 0.,  
ImagePadding → All, ImageSize → Automatic, ImageSizeRaw → Automatic, LabelStyle → {}, MaxRecursion → Automatic, Mesh → None,  
MeshFunctions → {#1 &}, MeshShading → None, MeshStyle → Automatic, Method → Automatic, PerformanceGoal → $PerformanceGoal,  
PlotLabel → None, PlotPoints → Automatic, PlotRange → {Full, Automatic}, PlotRangeClipping → True,  
PlotRangePadding → Automatic, PlotRegion → Automatic, PlotStyle → Automatic, PreserveImageOptions → Automatic, Prolog → {},  
RegionFunction → (True &), RotateLabel → True, Ticks → Automatic, TicksStyle → {}, WorkingPrecision → MachinePrecision}
```



Βοήθεια (3)

Εντολές που τελειώνουν σε Q.

?*Q

▼ System`

AcyclicGraphQ	CompleteGraphQ	DiscreteTimeModelQ	ExactNumberQ	ImageQ	IsomorphicGraphQ	MachineNumberQ	NumericQ	PermutationCyclesQ	QuadraticIrrationalQ	StringQ	UnsameQ
AlgebraicIntegerQ	ConnectedGraphQ	DistributionParameterQ	FileExistsQ	IndependentEdgeSetQ	LegendreQ	MarcumQ	ObservableModelQ	PermutationListQ	RootOfUnityQ	SymmetricMatrixQ	UpperCaseQ
AlgebraicUnitQ	ContinuousTimeModelQ	EdgeCoverQ	FreeQ	IndependentVertexSetQ	LetterQ	MatchLocalNameQ	OddQ	PolynomialQ	SameQ	SyntaxQ	ValueQ
ArgumentCountQ	ControllableModelQ	EdgeQ	GraphQ	InexactNumberQ	LinkConnectdQ	MatchQ	OptionQ	PositiveDefiniteMatrixQ	SatisfiableQ	TautologyQ	VectorQ
ArrayQ	CoprimeQ	EllipticNomeQ	GroupElementQ	IntegerQ	LinkReadyQ	MatrixQ	OrderedQ	PossibleZeroQ	SimpleGraphQ	TensorQ	VertexCoverQ
AtomQ	DigitQ	EmptyGraphQ	HamiltonianGraphQ	IntervalMemberQ	ListQ	MemberQ	OutputControllableModelQ	PrimePowerQ	SquareFreeQ	TreeGraphQ	VertexQ
BinaryImageQ	DirectedGraphQ	EulerianGraphQ	HermitianMatrixQ	InverseEllipticNomeQ	LoopFreeGraphQ	NameQ	PartitionsQ	PrimeQ	StringFreeQ	TrueQ	WeightedGraphQ
BipartiteGraphQ	DirectoryQ	EvenQ	HypergeometricPFQ	IrreduciblePolynomialQ	LowerCaseQ	NumberQ	PathGraphQ	QHypergeometricPFQ	StringMatchQ	UndirectedGraphQ	

▼ PacletManager`

PacletNewerQ

Άλλος τρόπος : Help → Help Browser

Πως συντάσσεται η implicitplot ;



Αριθμητικό άθροισμα (σειρές) (1)

Το άθροισμα των όρων μιας ακολουθίας υπολογίζεται με την συνάρτηση `Sum[έκφραση,{μεταβλητή,αρχική τιμή, τελική τιμή, [βήμα]}` αλλά και `NSum` για αριθμητικούς υπολογισμούς.

```
Sum[1/i, {i, 1, Infinity}]
```

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

```
NSum[1/i, {i, 1, 100}]
```

```
5.18738
```

```
Sum[1/i^2, {i, 1, Infinity}]
```

$$\frac{\pi^2}{6}$$



Αριθμητικό άθροισμα (σειρές) (2)

NSum[1/i², {i, 1, Infinity}]

1.64493

Sum[1/i², {i, 1, Infinity, 2}]

$\frac{\pi^2}{8}$

Sum[i², {i, 1, k}]

$\frac{1}{6} k (1 + k) (1 + 2 k)$



Αριθμητικό άθροισμα (σειρές) (3)

Άσκηση. Δείξτε ότι το άθροισμα $\sum_{i=1}^n i^3$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Μπορούμε να υπολογίσουμε και διπλά αθροίσματα όπως

```
Sum[1/(i + j), {i, 1, 50}, {j, 1, 50}]
```

```
4 532 255 594 555 881 486 679 280 170 968 012 322 314 159 /  
69 720 375 229 712 477 164 533 808 935 312 303 556 800
```

```
N[%]
```

```
65.0062
```



Γινόμενα αριθμών

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε γινόμενα αριθμών χρησιμοποιούμε την συνάρτηση `Product` [έκφραση, {μεταβλητή, αρχική τιμή, τελική τιμή [, βήμα]}] ενώ για αριθμητικούς υπολογισμούς την `NProduct`

`Product[i, {i, 1, 50}]`

```
30 414 093 201 713 378 043 612 608 166 064 768 844 377 641 568 960 512 000 000 000 :  
000
```

`NProduct[i, {i, 1, 50}]`

3.04141×10^{64}

`Product[i/(1 + j), {i, 1, 10}, {j, 1, 10}]`

$$\frac{1}{25\,937\,424\,601}$$

`N[%]`

3.85543×10^{-11}



Εύρεση λύσης εξίσωσης (1)

Μπορούμε να λύσουμε αλγεβρικά μια εξίσωση με την βοήθεια της `NSolve`

```
Clear[x]
```

```
NSolve[{x^2 - 5 * x + 6 == 0}, {x}]
```

```
{{x -> 2.}, {x -> 3.}}
```

Αν όμως η εξίσωση δεν μπορεί να λυθεί αλγεβρικά όπως η παρακάτω

```
NSolve[x^3 * Exp[x] - Sin[x] == 0, x]
```

```
NSolve[ $e^x x^3 - \text{Sin}[x] == 0$ , x]
```

τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την `FindRoot` δίνοντας μια αρχική προσέγγιση για την επίλυση της π.χ. (προσέγγιση 1)



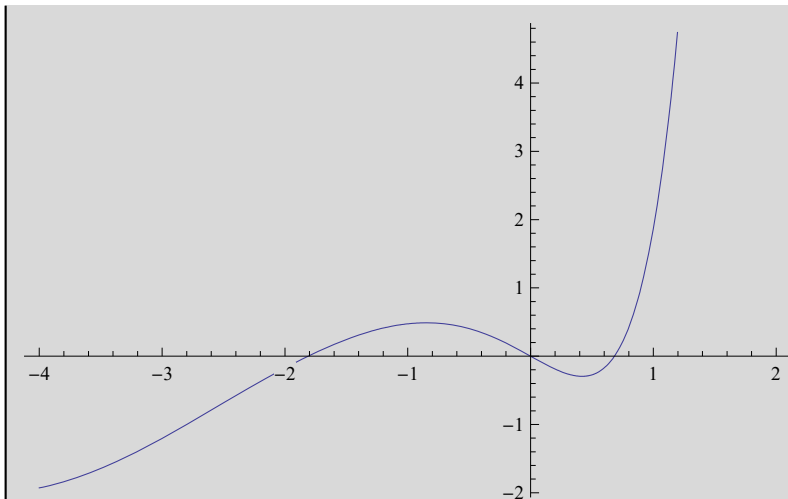
Εύρεση λύσης εξίσωσης (2)

```
FindRoot[x^3 * Exp[x] - Sin[x] == 0, {x, 1}]
```

```
{x -> 0.683126}
```

Η επιλογή της αρχικής προσέγγισης μπορεί να γίνει με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

```
Plot[x^3 * Exp[x] - Sin[x], {x, -4, 2}]
```



Εύρεση λύσης εξίσωσης (3)

Μπορούμε να λύσουμε και σύστημα εξισώσεων με τις ίδιες συναρτήσεις αρκεί να κλείσουμε τις εξισώσεις και τις άγνωστες μεταβλητές σε αγκίλες

```
NSolve[{x^2 + y^2 == 1, y == x}, {x, y}]
```

```
NSolve[{1 + x^2 == 1, 1 == x}, {x, 1}]
```

```
FindRoot[{x^2 + y^2 == 1, y == x Exp[x]}, {x, .1}, {y, .5}]
```

```
{x -> 0.513489, 1 -> 0.858096}
```



Εύρεση λύσης εξίσωσης (4)

```
<< Graphics'ImplicitPlot'
```

```
ImplicitPlot[{x^2 + y^2 == 1, y == x * Exp[x]}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```

```
ImplicitPlot[{1 + x^2 == 1, 1 == e^x x}, {x, -5, 5}, {1, -5, 5}]
```

```
FindRoot[{x^2 + y^2 == 1, y == x Exp[x]}, {x, -1.5}, {y, -0.5}]
```

```
{x → -0.930244, 1 → -0.366942}
```



Άσκηση 2

Υπολογίστε την λύση του συστήματος

$$3x + 4y + 5z = 1$$

$$4x + 5y + 3z = 2$$

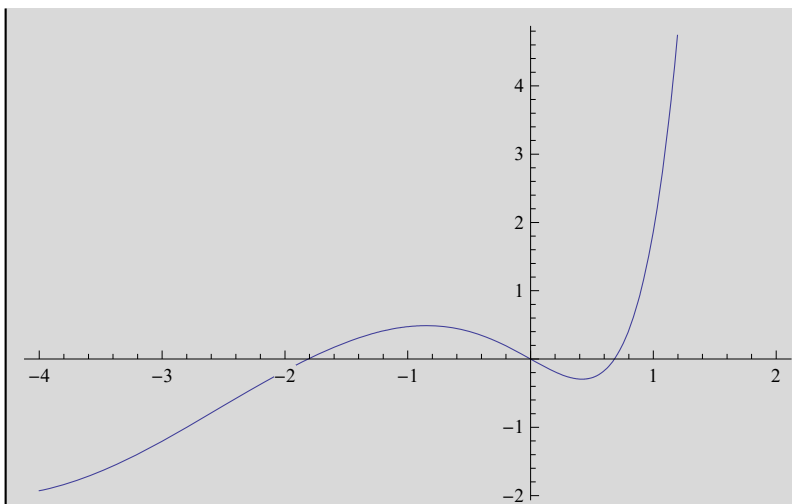
$$5x + 3y + 4z = 3$$



Αριθμητική βελτιστοποίηση (1)

Με την συνάρτηση `FindMinimum` μπορούμε να υπολογίσουμε το τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης, δίνοντας μια αρχική προσέγγιση του τοπικού ελάχιστου

```
Plot[x^3 * Exp[x] - Sin[x], {x, -4, 2}]
```



Αριθμητική βελτιστοποίηση (2)

Τοπικό ελάχιστο

```
FindMinimum[x^3 * Exp[x] - Sin[x], {x, 0}]
```

```
{-0.295004, {x -> 0.419145}}
```

Άλλο τοπικό ελάχιστο

```
FindMinimum[x^3 * Exp[x] - Sin[x], {x, -2}]
```

```
{-1.99776, {x -> -4.37473}}
```



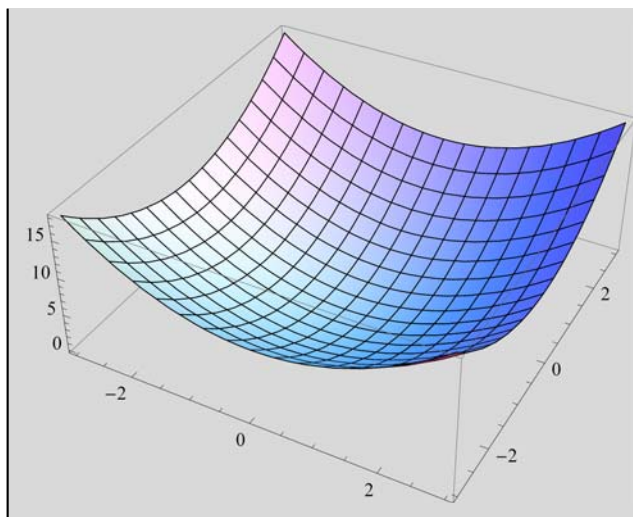
Αριθμητική βελτιστοποίηση (3)

Μπορούμε να υπολογίσουμε τοπικό ελάχιστο συναρτήσεων με περισσότερες από μια μεταβλητές

```
FindMinimum[x^2 + y^2, {x, 0}, {y, 0}]
```

```
{0., {x → 0., 1 → 0.}}
```

```
Plot3D[x^2 + y^2, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```



Αριθμητική βελτιστοποίηση (4)

Μπορούμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο μιας συνάρτησης που υπόκειται σε κάποιους περιορισμούς

```
ConstrainedMin[x - y - z, {y + z < 3, x > 7}, {x, y, z}]
```

```
ConstrainedMin[-1 + x - z, {1 + z < 3, x > 7}, {x, 1, z}]
```



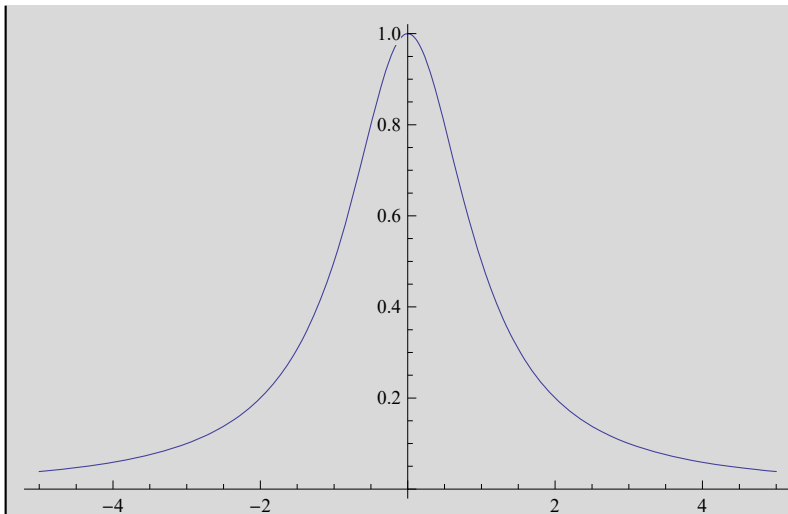
Ορισμένα Ολοκληρώματα

Η συνάρτηση `NIntegrate[expr,{x,xmin,xmax}]` υπολογίζει το ορισμένο ολοκλήρωμα στο πεδίο ορισμού `[xmin,xmax]`

```
NIntegrate[1/(x^2 + 1), {x, -1, 1}]
```

```
1.5708
```

```
Plot[1/(x^2 + 1), {x, -5, 5}]
```



Τυχαίοι αριθμοί (1)

Δημιουργία τυχαίου αριθμού στο $[0,1]$

```
Random[]
```

```
0.855478
```

Δημιουργία τυχαίου ακέραιου αριθμού 0 ή 1

```
Random[Integer]
```

```
0
```

Δημιουργία τυχαίου ακέραιου αριθμού στο $[0,49]$

```
Random[Integer, {0, 49}]
```

```
22
```



Τυχαίοι αριθμοί (2)

Μπορούμε να αλλάξουμε την γεννήτρια τυχαίων αριθμών με την `SeedRandom`

```
SeedRandom[1]
```

```
Random[]
```

```
0.668693
```

```
SeedRandom[1]
```

```
Random[]
```

```
0.668693
```

Τι παρατηρείται παραπάνω ;

Τι νομίζεται ότι κάνουν οι συναρτήσεις ;



Τυχαίοι αριθμοί (3)

Random[Complex]

0.8312 + 0.781807 i

Random[Complex, {0 + 0 * I, 10 + 10 * I}]

1.24634 + 9.34537 i



Υπόλοιπο - Πηλίκο διαίρεσης

Εύρεση του υπόλοιπου της διαίρεσης του n με το m $\text{Mod}[n,m]$

$\text{Mod}[13, 4]$

1

Πηλίκο της διαίρεσης του n με το m $\text{Quotient}[n,m]$

$\text{Quotient}[13, 4]$

3



Μέγιστος κοινός διαιρέτης

Μέγιστος κοινός διαιρέτης των n_1, n_2, \dots $\text{GCD}[n_1, n_2, \dots]$

$\text{GCD}[12, 15]$

3

Τι πιστεύεται ότι κάνει η παρακάτω συνάρτηση ;

$\text{ExtendedGCD}[12, 15]$

$\{3, \{-1, 1\}\}$

$-1 * 12 + 1 * 15$

3



Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο

Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των n_1, n_2, \dots $\text{LCM}[n_1, n_2, \dots]$

$\text{LCM}[12, 15]$

60

$\text{GCD}[12, 15] * \text{LCM}[12, 15] - 12 * 15$

0



Πρώτοι παράγοντες ενός αριθμού n

Πρώτοι παράγοντες του αριθμού n , `FactorInteger[n]`

```
FactorInteger[2^12 - 1]
```

```
{{3, 2}, {5, 1}, {7, 1}, {13, 1}}
```

Οι ακέραιοι που διαιρούνται από τον n δίνονται από την `Divisors[n]`

```
Divisors[2^12 - 1]
```

```
{1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 21, 35, 39, 45, 63, 65, 91,  
105, 117, 195, 273, 315, 455, 585, 819, 1365, 4095}
```



Πρώτοι αριθμοί

Ο k πρώτος αριθμός δίνεται από $\text{Prime}[k]$

Prime[10]

29

ενώ το πλήθος των πρώτων που είναι μικρότεροι του x από την $\text{PrimePi}[x]$

PrimePi[10]

4



Επίλυση διοφαντικής εξίσωσης (1)

Έστω ότι θέλουμε την λύση της $ax+by=c$. Με την βοήθεια της `ExtendedGCD` μπορούμε να υπολογίσουμε : α) τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των (a,b) και στη συνέχεια να ελέγξουμε αν διαιρεί το c και β) υπολογίζουμε τους αριθμούς x_0, y_0 τέτοιους ώστε $a x_0 + b y_0 = \text{MKD}[a,b]$. Θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τους αριθμούς αυτούς με $c/\text{MKD}[a,b]$. Ας προσπαθήσουμε να επιλύσουμε την $3x+4y=6$.

```
ExtendedGCD[3, 4]
```

```
{1, {-1, 1}}
```

```
IntegerQ[6 / ExtendedGCD[3, 4][[1]]]
```

```
True
```

```
ExtendedGCD[3, 4][[2]] * 6 / ExtendedGCD[3, 4][[1]]
```

```
{-6, 6}
```



Επίλυση διοφαντικής εξίσωσης (2)

Άρα $\{-6,6\}$ είναι μια λύση της παραπάνω διοφαντικής εξίσωσης. Η γενική λύση της διοφαντικής εξίσωσης είναι $\{x_0, y_0\} + \{bt, -at\}$.

$$\% + \{4 * t, -3 * t\}$$

$$\{-6 + 4 t, 6 - 3 t\}$$

Πράγματι

$$\text{Simplify}[3 * \%[[1]] + 4 * \%[[2]] - 6]$$

$$0$$



Αποθήκευση και έξοδος

File→Save, File → Exit



Ασκήσεις για το σπίτι (1)

1. Να επιλύσετε το παρακάτω σύστημα

$$x + y + az = 1$$

$$x + ay + z = a$$

$$ax + y + z = a^2$$

2. Να βρείτε τα τοπικά ελάχιστα-μέγιστα της συνάρτησης

$$x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$A = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

και το άθροισμα

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

και να δείξετε ότι $A < B < A + 1$



Ασκήσεις για το σπίτι (2)

4. Να υπολογίσετε 5 τυχαίους αριθμούς από το 1 ως το 49 και έναν τυχαίο αριθμό από το 1 έως το 20.

5. Ελέγξτε αν ο αριθμός

$$2^p - 1$$

$$-1 + 2^p$$

όπου p πρώτος αριθμός μας δίνει πάντα πρώτο αριθμό (δοκιμάστε με παραδείγματα).

6. Να επιλύσετε την διοφαντική εξίσωση $5x+6y=12$.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης.
«Συμβολικές Γλώσσες Προγραμματισμού. Ενότητα 3: Αριθμητικοί υπολογισμοί».
Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

```
http://eclass.auth.gr/courses/OCRS430/
```



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

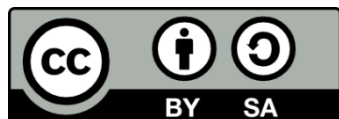
μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ