ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 1: Μαθηματικά Μοντέλα Συστημάτων

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

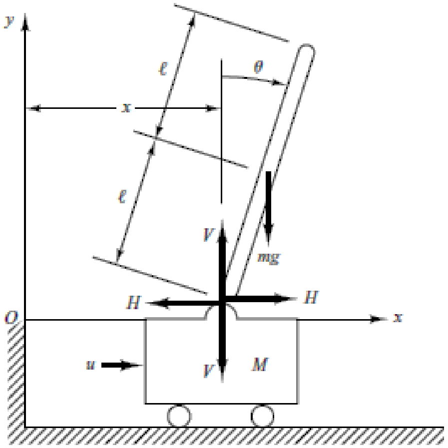
- Ανάστροφο εκκρεμές.
- Μαθηματικά μοντέλα συστημάτων.
- Άνυσμα κατάστασης.
- Άνυσμα εισόδων.
- Άνυσμα εξόδων.
- Μοντέλο του χώρου των καταστάσεων.
- Μαθηματικά πρότυπα Γ.Χ.Α. συστημάτων της μορφής του χώρου των καταστάσεων.
- Αναπαράσταση στον χώρο των καταστάσεων.

Σκοποί Ενότητας

- Γενική περιγραφή συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων.
- Ειδική περιγραφή των γραμμικών συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων.
- Τρόπος αναπαράστασης της περιγραφής ενός συστήματος στον χώρο τον καταστάσεων.
- Παραδείγματα συστημάτων (ηλεκτρικά, μηχανικά κλπ).

Ανάστροφο εκκρεμές (Segway)

Εικόνα 1



Καθορίστε τη γωνία της ράβδου μήκους l, από την κάθετη γραμμή ως θ. Καθορίστε τις (x, y) συντεταγμένες του κέντρου βάρους της ράβδου εκκρεμούς ως (x_G, y_G). Τότε

$$x_G = x + l sin\theta$$
$$y_G = l cos\theta$$

Η περιστροφική κίνηση της ράβδου του εκκρεμούς γύρω από το κέντρο βάρους του είναι

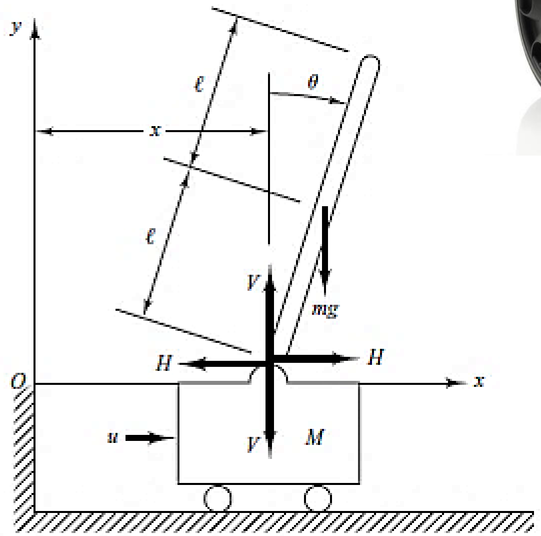
$$I\ddot{\theta} = Vl sin\theta - Hl cos\theta$$

όπου I είναι η ροπή αδρανείας της ράβδου γύρω από το κέντρο της βαρύτητας.

Ανάστροφο εκκρεμές (1)

- Η οριζόντια κίνηση του κέντρου βάρους της ράβδου του εκκρεμούς δίνεται από
$$m\frac{d^2}{dt^2}(x + l sin\theta) = H$$
- Η κατακόρυφη κίνηση του κέντρου βάρους της ράβδου του εκκρεμούς είναι
$$m\frac{d^2}{dt^2}(l cos\theta) = V - mg$$
- Η οριζόντια κίνηση του περιγράφεται από
$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = u - H$$

Εικόνα 2

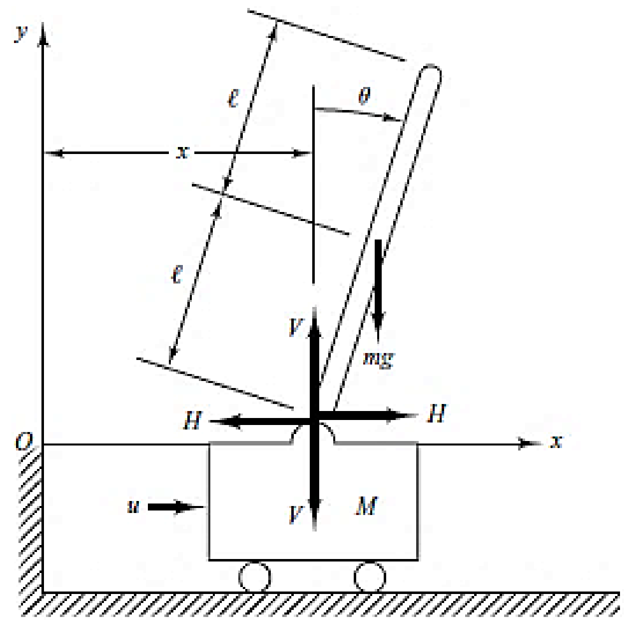


Ανάστροφο εκκρεμές
Υποθέσεις (1)

Για θ και $d\theta/dt$ κοντά στο μηδέν (σημείο ισορροπίας)

- $sin\theta = \theta, cos\theta = 1, \theta\dot{\theta}^2 = 0.$
- $I\ddot{\theta} = Vlsin\theta - Hlcos\theta \rightarrow I\ddot{\theta} = Vl\theta - Hl$
- $m\dfrac{d^2}{dt^2}(x + lsin\theta) = H \rightarrow m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = H$
- $m\dfrac{d^2}{dt^2}(lcos\theta) = V - mg \rightarrow 0 = V - mg$

Εικόνα 3



Ανάστροφο εκκρεμές
Υποθέσεις (2)

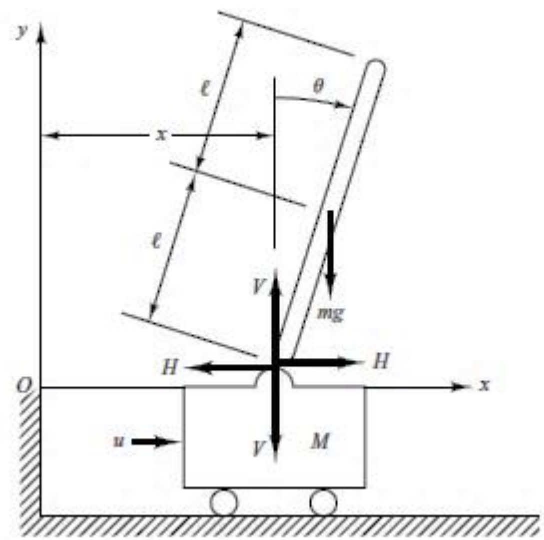
- $sin\theta = \theta, cos\theta = 1, \theta\dot{\theta}^2 = 0.$
- $\begin{cases} M\dfrac{d^2x}{dt^2} = u - H \\ m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = \mathrm{H} \end{cases} \rightarrow (\mathrm{M} + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$
- $\begin{cases} I\ddot{\theta} = Vl\theta - \mathrm{Hl} \\ m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = \mathrm{H} \\ 0 = \mathrm{V} - \mathrm{mg} \end{cases}$

$$\downarrow$$

- $\begin{cases} I\ddot{\theta} = mgl\theta - Hl = \\ = mgl\theta - l(m\ddot{x} + ml\theta) \end{cases}$

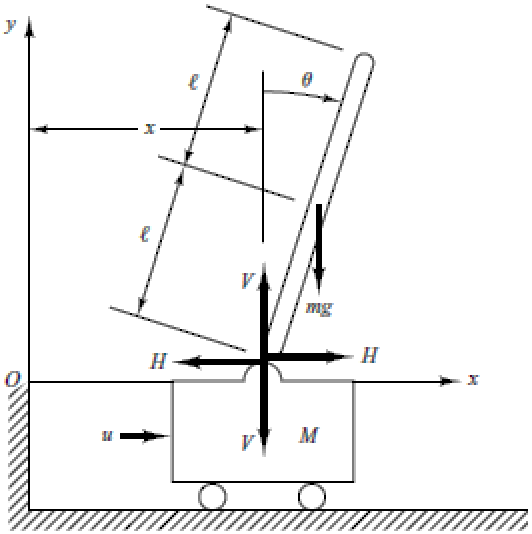
$$\downarrow$$

- $\{(l + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$



Ανάστροφο εκκρεμές
Εξισώσεις (1)

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$$
$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$$



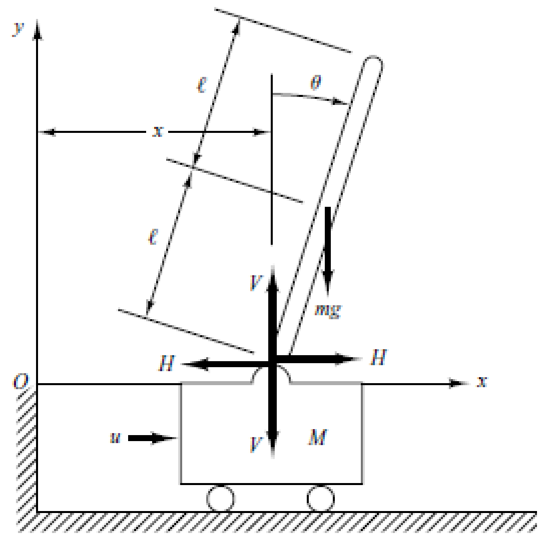
Ανάστροφο εκκρεμές Εξισώσεις (2)

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \\ x_3 = x \\ x_4 = \dot{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{M+m}{Ml} g x_1 - \dfrac{1}{Ml} u \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\dfrac{m}{M} g x_1 + \dfrac{1}{M} u \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$$
$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$$

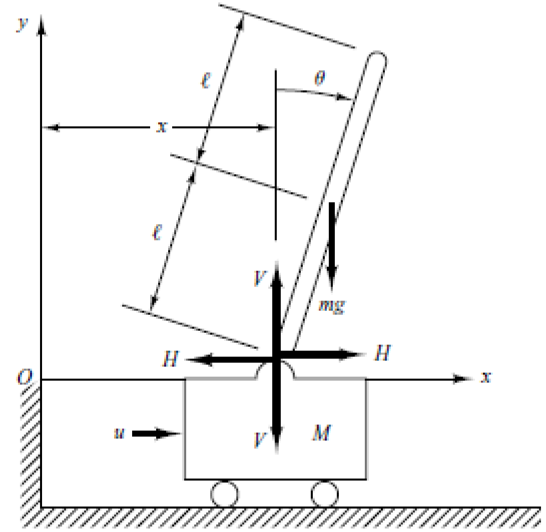


Ανάστροφο εκκρεμές
Εξισώσεις (3)

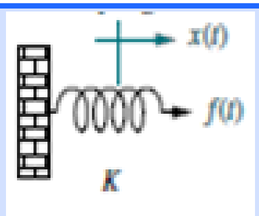
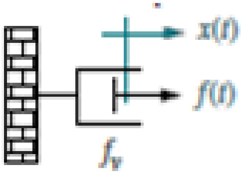
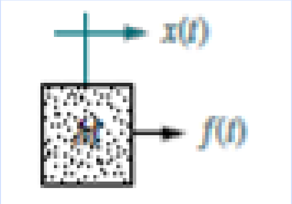
$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$$
$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{Ml}\\ 0\\ 1/M\end{bmatrix}u$$

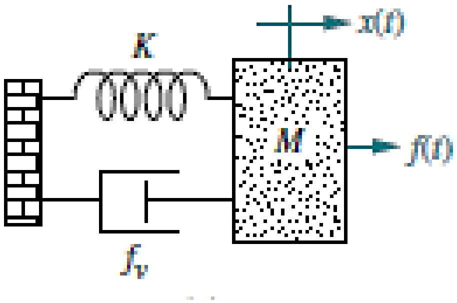
$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

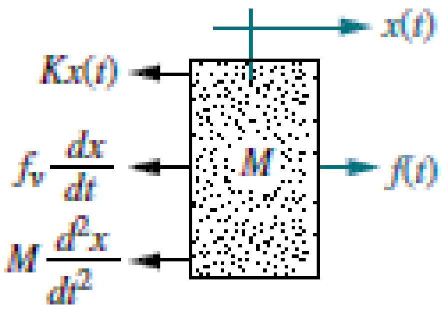


Μηχανικό Σύστημα - Εξισώσεις

Εξάρτημα	Δύναμη-ταχύτητα	Μετατόπιση θέσης	Σύνθετη αντίσταση $Z_M(s) = F(s)/X(s)$
	$f(t) = K\int_0^t v(\tau)d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	K
	$f(t) = f_v v(t)$	$f(t) = f_v \frac{dx(t)}{dt}$	$f_v s$
	$f(t) = M\frac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$	Ms^2

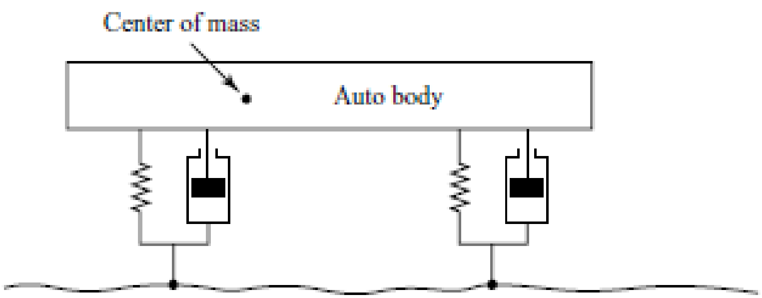
Μηχανικό σύστημα



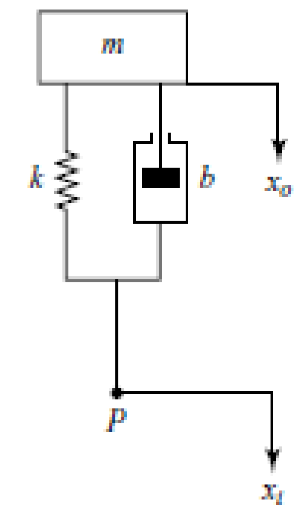


$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + f_v\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$$

Ανάρτηση αυτοκινήτου (1)



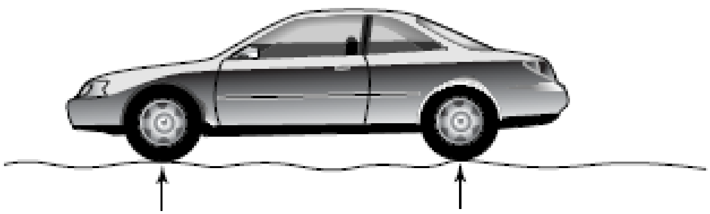
(a)

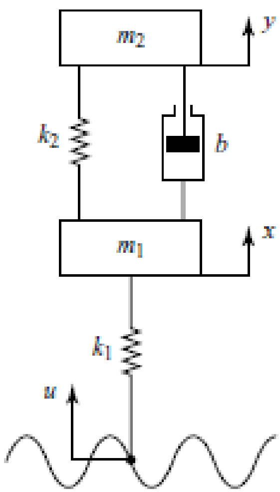


- Απλοποιημένο σύστημα

$$m\ddot{x}_0 + b(\dot{x}_0 - \dot{x}_i) + k(x_0 - x_i) = 0$$
$$m\ddot{x}_0 + b\dot{x}_0 + kx_0 = b\dot{x}_i + kx_i$$

Ανάρτηση αυτοκινήτου (2)



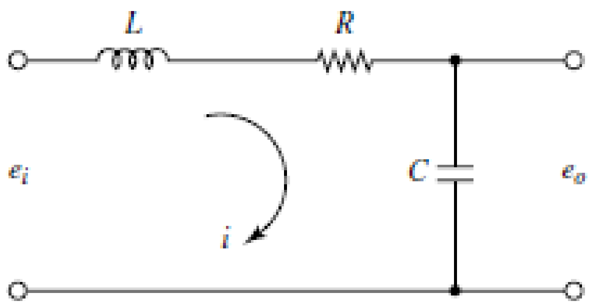


$$m_1\ddot{x} = k_2(y-x) + b(\dot{y}-\dot{x}) + k_1(u-x)$$
$$m_2\ddot{y} = -k_2(y-x) - b(\dot{y}-\dot{x})$$
$$\downarrow$$
$$m_1\ddot{x} + b\dot{x} + (k_1+k_2)x = b\dot{y} + k_2 y + k_1 u$$
$$m_2\ddot{y} + b\dot{y} + k_2 y = b\dot{x} + k_2 x$$

ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΣΠΙΤΙ

Μετατροπή του συστήματος σε σύστημα στον χώρο των καταστάσεων.

Ηλεκτρικό σύστημα



- $L\dfrac{di}{dt} + Ri + \dfrac{1}{C}\int idt = e_l$
- $\dfrac{1}{C}\int idt = e_0$

- $\ddot{e}_0 + \dfrac{R}{L}\dot{e}_0 + \dfrac{1}{LC}e_0 = \dfrac{1}{LC}e_l$
- $\begin{cases} x_1 = e_0 \\ x_2 = \dot{e}_0 \end{cases}$
- $\begin{cases} u = e_l \\ y = e_0 = x_1 \end{cases}$

- $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{LC} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{LC} \end{bmatrix} u$
- $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Μαθηματικά μοντέλα συστημάτων

Η πιο γενική οικογένεια συστημάτων με τα οποία θα ασχοληθούμε περιγράφονται από ένα σύνολο n συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης της μορφής :

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t; u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)),$$
$$i = 1,2, \dots, n$$

και ένα σύνολο p αλγεβρικών σχέσεων της μορφής

$$y_j(t) = g_j(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t; u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)),$$

$$j = 1,2, \dots, p$$

Άνυσμα κατάστασης ή κατάσταση του συστήματος

Ορισμός. Οι n μεταβλητές $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ θεωρούμενες ως συναρτήσεις του χρόνου t:

$$x_i(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = 1,2, \dots, n.$$

ονομάζονται **καταστάσεις** του συστήματος και το n −διάστατο άνυσμα στήλης:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

ονομάζεται **άνυσμα κατάστασης ή κατάσταση** του συστήματος .

Άνυσμα εισόδων ή είσοδος του συστήματος

Ορισμός. Οι m μεταβλητές $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ θεωρούμενες ως συναρτήσεις του χρόνου t:

$$u_j(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}, j = 1,2, \dots, m.$$

οι οποίες περιγράφουν επιδράσεις του περιβάλλοντος προς το σύστημα ονομάζονται **είσοδοι** του συστήματος και το m −διάστατο άνυσμα στήλης:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

ονομάζεται **άνυσμα εισόδων ή είσοδος** του συστήματος .

Άνυσμα εξόδων ή έξοδος του συστήματος

Ορισμός. Οι p μεταβλητές $y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t)$ θεωρούμενες ως συναρτήσεις του χρόνου t:

$$y_k(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}, k = 1,2, \dots, p$$

οι οποίες περιγράφουν αποκρίσεις του συστήματος προς το περιβάλλον ονομάζονται **έξοδοι** του συστήματος και το p −διάστατο άνυσμα στήλης:

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

ονομάζεται **άνυσμα εξόδων ή έξοδος** του συστήματος .

Μοντέλο του χώρου των καταστάσεων (state space model)

- Ένα σύστημα μίας εισόδου και μίας εξόδου έχει $p = m = 1$.

Ορισμός. Αν $m > 1$ ή $p > 1$ (αν δηλαδή το σύστημα έχει περισσότερες από μία εισόδους ή εξόδους) το σύστημα ονομάζεται **πολυμεταβλητό**.

Ορισμός. Η περιγραφή ενός συστήματος με την παραπάνω μορφή εξισώσεων ονομάζεται **μοντέλο του χώρου των καταστάσεων** (**state space model**).

Μη γραμμικές απεικονίσεις

Οι συναρτήσεις:

- $f_i\big(x(t), t; u(t)\big) \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i = 1,2, \dots, n.$
- $g_k\big(x(t), t; u(t)\big) \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ k = 1,2, \dots, p.$

είναι γενικά **μη γραμμικές απεικονίσεις**.

Ανυσματικές εξισώσεις

Αν ορίσουμε τις ανυσματικές συναρτήσεις:

$$f\big(x(t),t;u(t)\big)=\begin{bmatrix} f_1\big(x(t),t;u(t)\big)\\ f_2\big(x(t),t;u(t)\big)\\ \vdots\\ f_n\big(x(t),t;u(t)\big)\end{bmatrix}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$g\big(x(t),t;u(t)\big)=\begin{bmatrix} g_1\big(x(t),t;u(t)\big)\\ g_2\big(x(t),t;u(t)\big)\\ \vdots\\ g_m\big(x(t),t;u(t)\big)\end{bmatrix}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^p \quad (2)$$

τότε το σύστημα περιγράφεται από τις ανυσματικές εξισώσεις:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f\big(x(t),t,u(t)\big)\\ y(t)=g\big(x(t),t,u(t)\big)\end{cases} \quad \textbf{(3)}$$

Παράδειγμα 1 (1)

Αν η συμπεριφορά ενός συστήματος διέπεται από μία διαφορική εξίσωση τάξης μεγαλύτερης της πρώτης, τότε μπορούμε να το περιγράψουμε με εξισώσεις του χώρου των καταστάσεων εισάγοντας βοηθητικές μεταβλητές.

Για παράδειγμα έστω σύστημα του οποίου η συμπεριφορά μιας μεταβλητής $y(t)$ (έξοδος) διέπεται από τη (μη γραμμική) διαφορική εξίσωση

$$\ddot{y}(t) + 6y(t)\dot{y}(t) + 5[\dot{y}(t)]^3 + 12 siny(t) = \cos(t)$$

Ας ορίσουμε ως καταστάσεις του συστήματος τις μεταβλητές

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t), \\ x_3(t) = \ddot{y}(t) \end{cases} \qquad (4)$$

Παράδειγμα 1 (2)

Παραγωγίζοντας τις (4) ως προς τον χρόνο έχουμε

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \dddot{y}(t)$$
$$= -6x_1(t)x_2(t) - 5[x_2(t)]^3 - 12sinx_1(t) + \cos(t)$$

που είναι της μορφής (3), με άνυσμα κατάστασης το

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

και έξοδο $y(t) = x_1(t)$.

Παράδειγμα 1 (3)

Οπότε

$$f\big(x(t),t;u(t)\big)=\begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ -6x_1(t)x_2(t)-5[x_2(t)]^3-12sinx_1(t)+\cos(t) \end{bmatrix}$$

$$g\big(x(t),t;u(t)\big)=x_1(t)$$

Ιδιότητες συστημάτων

Αιτιότητα (Causality) (1)

- **Ιδιότητα 1**. Ένα σύστημα είναι **αιτιατό (causal)**, εάν $u \rightsquigarrow y$ τότε, για οποιαδήποτε είσοδο $\bar{u}$ για την οποία ισχύει
$$\bar{u}(t) = u(t), \forall 0 \leq t < T$$
για κάποια χρονικό διάστημα $T > 0$, το σύστημα έχει (τουλάχιστον) μία έξοδο $\bar{y}$ για την οποία ισχύει
$$\bar{y}(t) = y(t), \forall 0 \leq t < T.$$

"Η έξοδος πριν από την χρονική στιγμή t δεν εξαρτάται από την είσοδο μετά την χρονική στιγμή t."

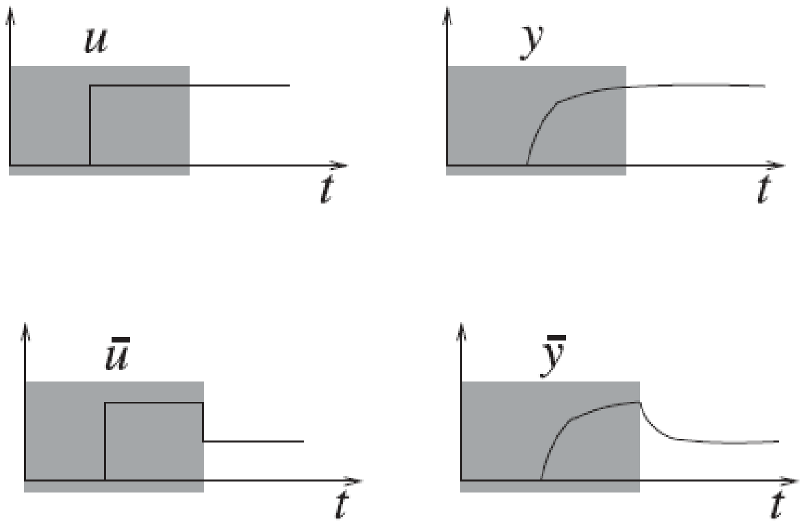
Αιτιότητα (Causality) (2)

Ορισμός: Ένα σύστημα

$$y(t) = (Fx)(t)$$

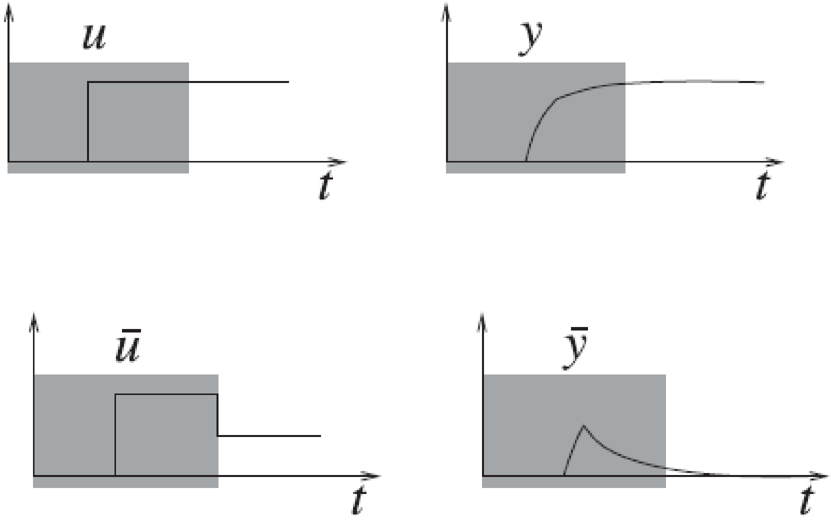
λέγεται **αιτιατό** αν, για κάθε χρονική στιγμή t_0, η έξοδος $y(t_0)$ του συστήματος την χρονική στιγμή t_0, εξαρτάται μόνο από την είσοδο $x(t_0)$ μέχρι την χρονική στιγμή t_0.

Αιτιότητα (Causality) (3)



Αιτιατό σύστημα

Αιτιότητα (Causality) (4)

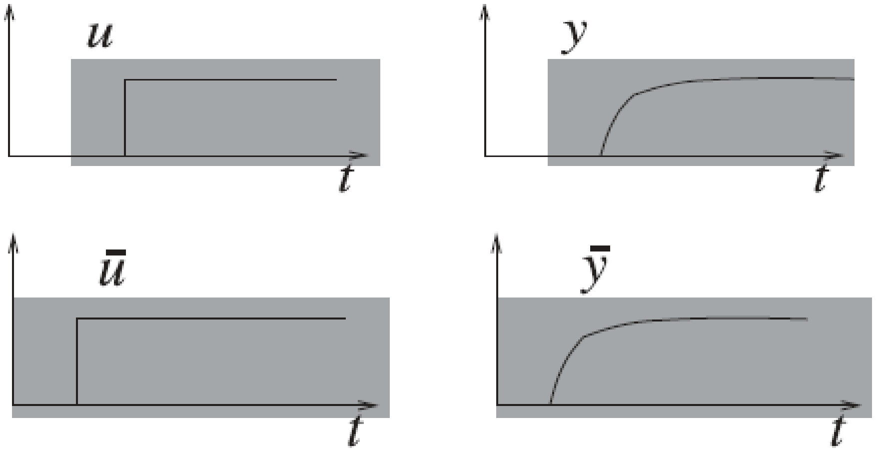


Μη αιτιατό σύστημα

Χρονικά αναλλοίωτο (Time invariance) (1)

- **Ιδιότητα 2.** Ένα σύστημα είναι **χρονικά αναλλοίωτο (time invariant)** υπό την έννοια ότι, εάν $u \rightsquigarrow y$ τότε, για κάθε $T > 0$, έχουμε $\bar{u} \rightsquigarrow \bar{y}$ όπου

$$\bar{u}(t) = u(t+T), \forall t \geq 0, \text{ και } \bar{y}(t) = y(t+T), \forall t \geq 0.$$

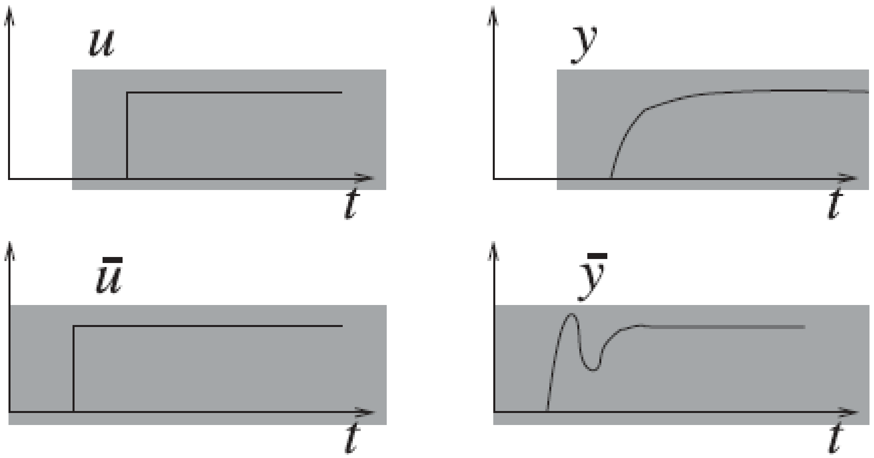


Χρονικά αναλλοίωτο

Χρονικά αναλλοίωτο (Time invariance) (2)

- **Ιδιότητα 2.** Ένα σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο υπό την έννοια ότι, εάν $u \rightsquigarrow y$ τότε, για κάθε $T > 0$, έχουμε $\bar{u} \rightsquigarrow \bar{y}$ όπου

$$\bar{u}(t) = u(t+T), \forall t \geq 0, \text{ και } \bar{y}(t) = y(t+T), \forall t \geq 0.$$



Μη χρονικά αναλλοίωτο

Χρονικά αναλλοίωτο (Time invariance) (3)

Έστω το σύστημα

$$y(t) = \big(Fx(t)\big)(t) = tx(t)$$

Η έξοδος σε είσοδο $\tilde{x}(t) := x(t - t_1)$ είναι

$$(F\tilde{x})(t) = t\tilde{x}(t) = tx(t - t_1) \neq (t - t_1)x(t - t_1) \\ = y(t - t_1)$$

Μετατόπιση της εξόδου κατά t_1 $\neq$ Εξόδου για μετατόπιση της εισόδου κατά t_1.

Γραμμικότητα (Linearity)

Ορισμός: Ένα σύστημα

$$y(t) = (Fx)(t)$$

λέγεται

- **Προσθετικό** αν για κάθε ζεύγος εισόδων $x_1(t), x_2(t)$είναι

$$\big(F(x_1 + x_2)\big)(t) = (Fx_1)(t) + (Fx_2)(t)$$

- **Ομογενές** αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\big(F(ax)\big)(t) - a(Fx)(t)$$

- **Γραμμικό** αν είναι προσθετικό και ομογενές αν για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$

$$\big(F(ax_1 + bx_2)\big)(t) = a(Fx_1)(t) + b(Fx_2)(t)$$

Παράδειγμα 2

Έστω σύστημα με σχέση εισόδου-εξόδου την

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} x(\tau) d\tau$$

Το σύστημα είναι γραμμικό, επειδή για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ είναι

$$\int_{\tau=0}^{\tau=t} [a x_1(\tau) + b x_2(\tau)] d\tau$$

$$= a \int_{\tau=0}^{\tau=t} x_1(\tau) d\tau + b \int_{\tau=0}^{\tau=t} x_2(\tau) d\tau$$

Παράδειγμα 3

Έστω σύστημα με σχέση εισόδου-εξόδου την

$$y(t) = [x(t)]^2$$

Για $a \in \mathbb{R}$ η είσοδος είναι η $ax(t)$.

Η έξοδος θα είναι η $y(t) = a^2[x(t)]^2$ και όχι η $a[x(t)]^2$.

Άρα το σύστημα δεν είναι ομογενές και άρα δεν είναι γραμμικό.

Μαθηματικά πρότυπα Γ.Χ.Α. συστημάτων της μορφής του χώρου των καταστάσεων (1)

Όταν το σύστημα είναι **γραμμικό** και **χρονικά αναλλοίωτο**, οι συναρτήσεις (1) και (2) στις εξισώσεις (3) παίρνουν τη μορφή

$$f\big(x(t), t; u(t)\big) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$g\big(x(t), t; u(t)\big) = Cx(t) + Du(t)$$

όπου A, B, C, D είναι πίνακες με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς και διαστάσεων αντίστοιχα $n \times n, n \times m, p \times n,$ $p \times m$ έτσι ώστε οι εξισώσεις (3) της μορφής του χώρου των καταστάσεων παίρνουν τη μορφή

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Μαθηματικά πρότυπα Γ.Χ.Α. συστημάτων της μορφής του χώρου των καταστάσεων (2)

ή πιο αναλυτικά τη μορφή

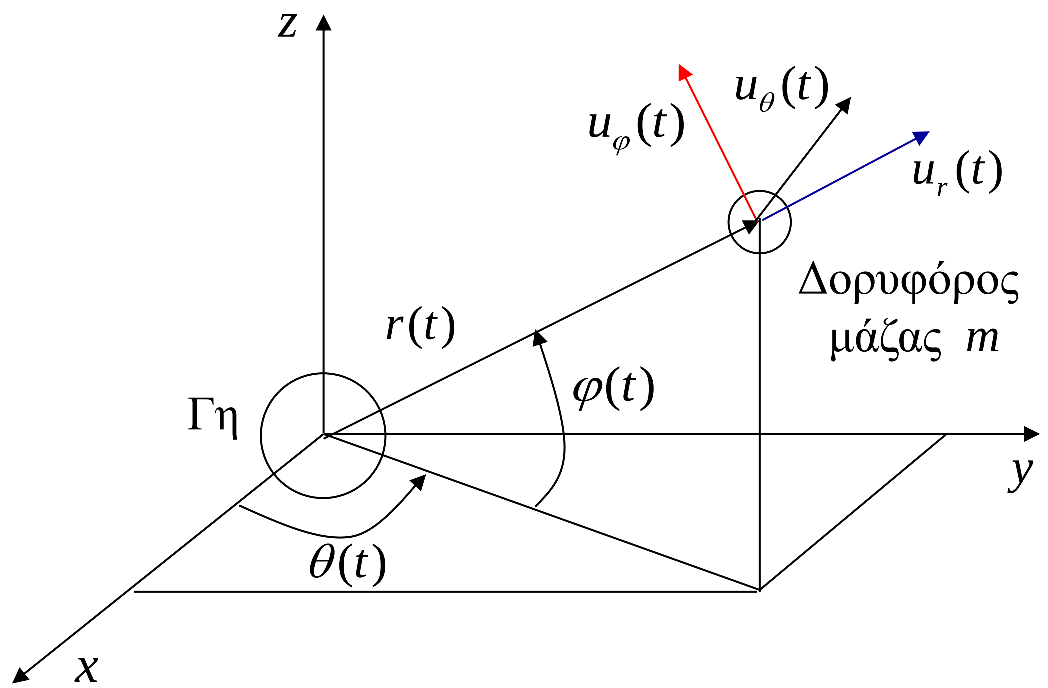
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4 (1)

- Σύστημα της μορφής του χώρου των καταστάσεων με τρεις εισόδους και τρεις εξόδους και έξι καταστάσεις.

Θεωρήστε ένα τεχνητό δορυφόρο μάζας m σε τροχιά γύρω από τη γη .



Παράδειγμα 4 (2)

Η θέση του δορυφόρου ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων x, y, z ορίζεται από την ακτίνα θέσης $r(t)$ και τις γωνίες γεωγραφικού μήκους και πλάτους $\theta(t)$ και $\varphi(t)$.

Η τροχιά του δορυφόρου μπορεί να ελεγχθεί από τις ωθήσεις μέσω jet $u_r(t), u_\theta(t), u_\varphi(t)$ κατά μήκος της ακτίνας θέσης $r(t)$ και των γωνιών γεωγραφικού μήκους και πλάτους $\theta(t)$ και $\varphi(t)$.

Επιλέγουμε άνυσμα κατάστασης $x(t)$, άνυσμα εισόδων $u(t)$ και άνυσμα εξόδων $y(t)$ ως εξής:

Παράδειγμα 4 (3)

$$x(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ \dot{r}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_r(t) \\ u_\theta(t) \\ u_\varphi(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ \theta(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Παράδειγμα 4 (4)

Μπορεί να δειχτεί ότι το σύστημα περιγράφεται από τις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

$$\dot{r}(t) = r(t)\dot{\theta}(t)^2 cos^2\varphi(t) + r(t)\dot{\varphi}(t)^2 - \frac{k}{r(t)^2} + \frac{1}{m}u_r(t)$$

$$\dot{\theta}(t) = -2\dot{r}(t)\frac{\dot{\theta}(t)}{r(t)} + 2\dot{\theta}(t)\dot{\varphi}(t)\frac{sin\varphi(t)}{cos\varphi(t)} + \frac{1}{mr(t)cos\varphi(t)}u_\theta(t)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\dot{\theta}(t)^2 cos\varphi(t)sin\varphi(t) - 2\dot{r}(t)\dot{\varphi}(t)\frac{1}{r(t)} + \frac{1}{mr(t)}u_\varphi(t)$$

Μία λύση των παραπάνω η οποία αντιστοιχεί σε κυκλική ισημερινή τροχιά σε σταθερό ύψος r_0 είναι η

Παράδειγμα 4 (5)

$$x_0(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ \dot{r}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ 0 \\ \omega t \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u_0(t) = \begin{bmatrix} u_r(t) \\ u_\theta(t) \\ u_\varphi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$r_0^3 \omega^3 = k$$

Παράδειγμα 4 (6)

Ένα γραμμικοποιημένο μοντέλο των παραπάνω δ.ε. της μορφής του χώρου των καταστάσεων είναι το

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\dot{r}(t)\\ \ddot{r}(t)\\ \dot{\theta}(t)\\ \ddot{\theta}(t)\\ \dot{\varphi}(t)\\ \ddot{\varphi}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 3\omega^3 & 0 & 0 & 2\omega r_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{-2\omega}{r_0} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r(t)\\ \dot{r}(t)\\ \theta(t)\\ \dot{\theta}(t)\\ \varphi(t)\\ \dot{\varphi}(t)\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \dfrac{1}{m} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{mr_0} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_r(t)\\ u_\theta(t)\\ u_\varphi(t)\end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4 (7)

$$y(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ \theta(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t) \\ \dot{r}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix}$$

Μετά από γραμμικοποίηση …

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = h(x(t), u(t), t) \\ y(t) = f(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

- $\dot{x}_0(t) = h(x_0(t), u_0(t), t)$
- $\dot{x}_0(t) + \dot{\bar{x}}(t) = h(x_0(t) + \bar{x}(t), u_0(t) + \bar{u}(t), t) =$

$$= h(x_0(t), u_0(t), t) + \frac{\partial h}{\partial x}\bar{x} + \frac{\partial h}{\partial u}\bar{u} + \cdots$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t)$$

- $A(t) \coloneqq \frac{\partial h}{\partial x} \coloneqq \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x_1} & \frac{\partial h_3}{\partial x_2} & \frac{\partial h_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}, \quad B(t) \coloneqq \frac{\partial h}{\partial u} \coloneqq \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_1} & \frac{\partial h_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial h_3}{\partial u_1} & \frac{\partial h_3}{\partial u_2} \end{bmatrix}$

Παράδειγμα 5 (1)

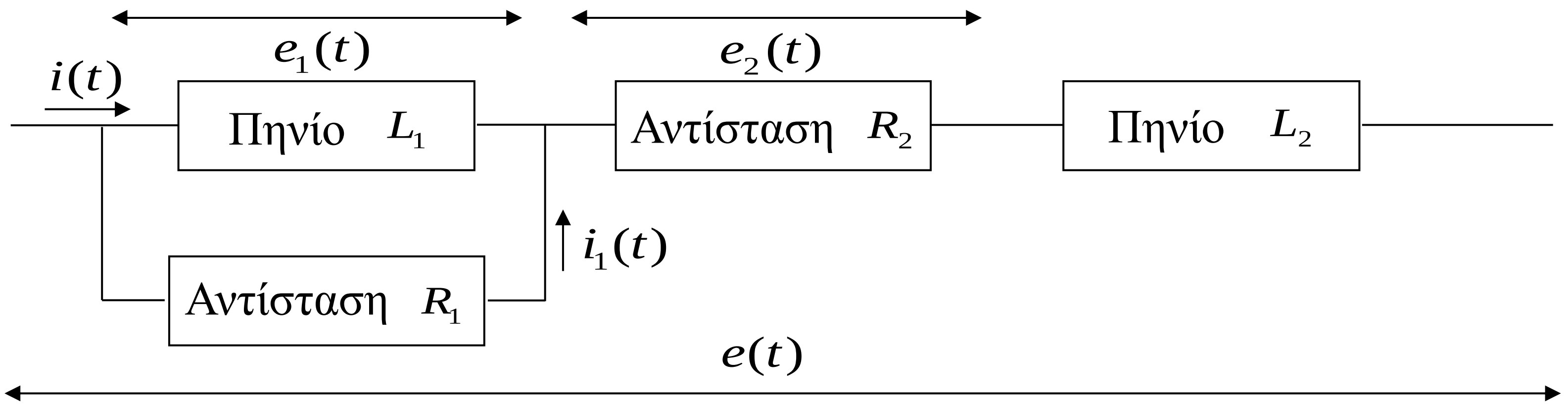
Θεωρήστε το ηλεκτρικό κύκλωμα του σχήματος του οποίου η συμπεριφορά υπακούει στις εξισώσεις

$$e_1(t) = L_1 \frac{d}{dt}[i(t) - i_1(t)], \quad \textbf{(5)}$$

$$e_1(t) = R_1 i_1(t), \quad \textbf{(6)}$$

$$e_2(t) = R_2 i(t), \quad \textbf{(7)}$$

$$e(t) - e_1(t) - e_2(t) = L_2 \frac{di(t)}{dt}, \quad \textbf{(8)}$$



Παράδειγμα 5 (2)

Θεωρούμε την τάση $e(t)$ στα άκρα του κυκλώματος ως είσοδο στο σύστημα και την ένταση του ρεύματος $i(t)$ ως έξοδο.

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (6) και (7) στην (8) έχουμε

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R_2}{L_2} i(t) - \frac{R_1}{L_1} i_1(t) + \frac{1}{L_2} e(t), \quad \textbf{(9)}$$

Αντικαθιστώντας την (9) στην (6) και έπειτα στην (5) παίρνουμε

$$\frac{di_1(t)}{dt} = -\frac{R_2}{L_2} i(t) - R_1 \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) i_1(t) + \frac{1}{L_2} e(t)$$

Παράδειγμα 5 (3)

Αν ορίσουμε άνυσμα κατάστασης το

$$x(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ i_1(t) \end{bmatrix}$$

το πρότυπο της μορφής του χώρου των καταστάσεων είναι το

$$\begin{bmatrix} \dfrac{di(t)}{dt} \\ \dfrac{di_1(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_2}{L_2} & -\dfrac{R_1}{L_2} \\ -\dfrac{R_2}{L_2} & -R_1\left(\dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ i_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_2} \\ \dfrac{1}{L_2} \end{bmatrix} e(t)$$

$$y(t) = i(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ i_1(t) \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση (1)

Ορίζοντας το άνυσμα κατάστασης, είσοδο κι έξοδο ως εξής :

$$x(t)=\begin{bmatrix} i(t)\\ i_1(t)\\ e_1(t)\\ e_2(t)\end{bmatrix}, u(t)=e(t), y(t)=i(t)$$

οι εξισώσεις (5)-(8) γράφονται

$$\begin{bmatrix} L_1\rho & -L_1\rho & -1 & 0\\ 0 & R_1 & -1 & 0\\ R_2 & 0 & 0 & -1\\ L_2\rho & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} i(t)\\ i_1(t)\\ e_1(t)\\ e_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

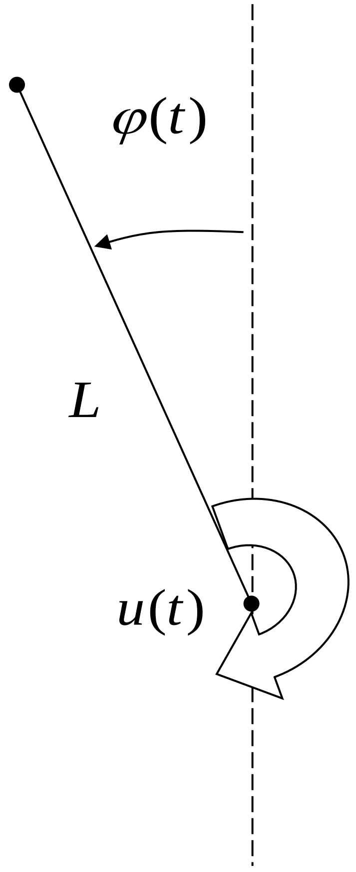
και

Παρατήρηση (2)

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ i_1(t) \\ e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

οι οποίες δεν είναι της μορφής του χώρου των καταστάσεων.

Παράδειγμα 6 (1)
(Ανάστροφο εκκρεμές)



$$\ddot{\varphi}(t) - \frac{g}{L}\varphi(t) = \frac{1}{mL^2}u(t), \quad \textbf{(10)}$$

Έστω ότι

$$\frac{g}{L} = 1, \qquad \frac{1}{mL^2} = 1$$

τότε η (10) γράφεται

$$\ddot{\varphi}(t) - \varphi(t) = u(t),$$

Ορίζουμε καταστάσεις μέσω των

$$x_1(t) \coloneqq \varphi(t)$$

$$x_2(t) \coloneqq \dot{\varphi}(t)$$

Παράδειγμα 6 (2) (Ανάστροφο εκκρεμές)

Τότε έχουμε ότι

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\varphi}(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{\varphi}(t) = \varphi(t) + u(t) = x_1(t) + u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Υπό μορφή πινάκων το σύστημα γράφεται

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Αν ορίσουμε άνυσμα κατάστασης το

$$x(t) := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 6 (3) (Ανάστροφο εκκρεμές)

τότε

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

Επομένως το μοντέλο της μορφής του χώρου των καταστάσεων για το παραπάνω μηχανικό σύστημα είναι το

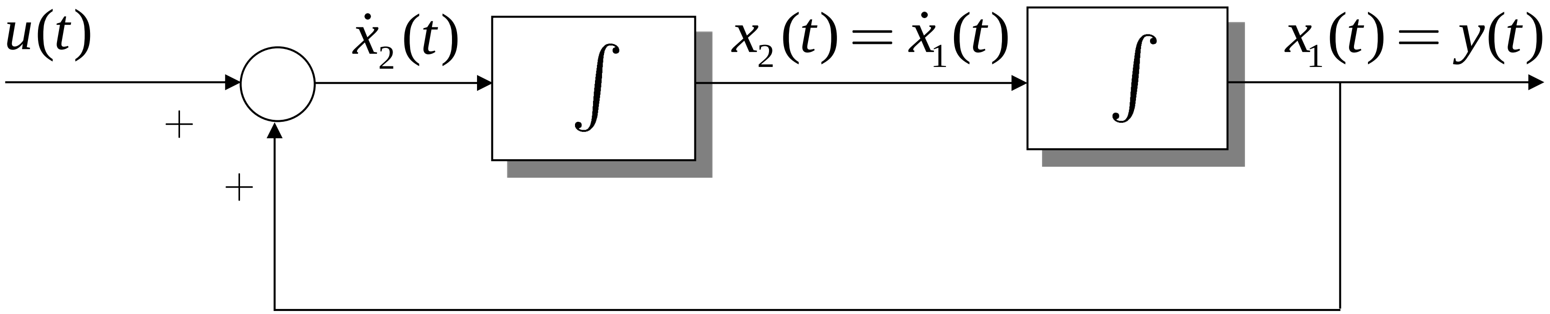
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

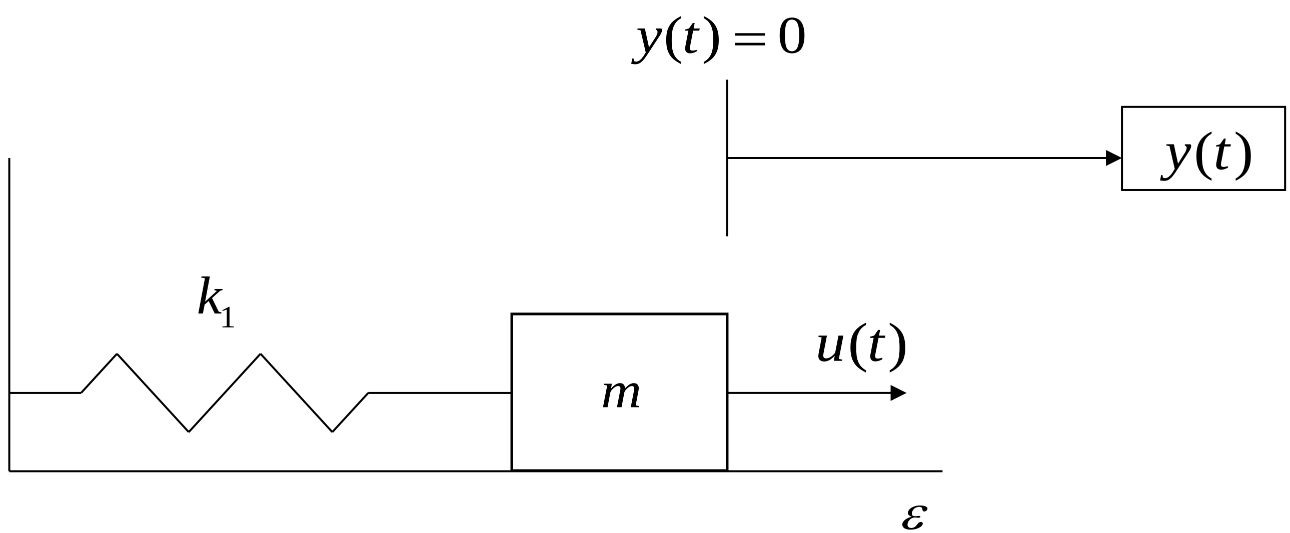
Παράδειγμα 6 (4)
(Ανάστροφο εκκρεμές)

Το λειτουργικό διάγραμμα του συστήματος είναι



Παράδειγμα 7 (1)

Έστω το μηχανικό σύστημα του σχήματος όπου μία μάζα m είναι συνδεδεμένη με ένα τοίχο μέσω ενός ελατηρίου σταθεράς k_1 και σύρεται πάνω στην επιφάνεια ε κάτω από την επίδραση της εξωτερικής δύναμης $u(t)$.



Παράδειγμα 7 (2)

Ο νόμος του Newton δίνει

$$m\ddot{y}(t) = u(t) - k_1\dot{y}(t) - k_1 y(t)$$

Ορίζουμε καταστάσεις του συστήματος τις

$$x_1(t) \coloneqq y(t)$$
$$x_2(t) \coloneqq \dot{y}(t)$$

και το άνυσμα κατάστασης είναι το

$$x(t) \coloneqq \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Οι εξισώσεις κατάστασης είναι οι

Παράδειγμα 7 (3)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = \dfrac{1}{m}u(t) - \dfrac{k_1}{m}\dot{y}(t) - \dfrac{k_2}{m}y(t) = \dfrac{1}{m}u(t) - \dfrac{k_1}{m}x_2(t) - \dfrac{k_2}{m}x_1(t) \end{cases}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις γραμμένες υπό μορφή πινάκων είναι

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k_2}{m} & -\dfrac{k_1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Άρα το μοντέλο της μορφής του χώρου των καταστάσεων για το σύστημα είναι το

Παράδειγμα 7 (4)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_2}{m} & -\frac{k_1}{m} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αναπαράσταση στον χώρο των καταστάσεων (1)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u$$

- $\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases}$
- $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - \cdots - a_1 x_n + u \end{cases}$
- $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Αναπαράσταση στον χώρο των καταστάσεων (2)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

- $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$

Αναπαράσταση στον χώρο των καταστάσεων (3)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_n u$$

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0 u \\ x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 = \ddot{y} - \beta_0 u - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u \end{cases}$$

Αναπαράσταση στον χώρο των καταστάσεων (4)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_n u$$

$$\begin{cases} \beta_0 = b_0 \\ \beta_1 = b_1 - \alpha_1\beta_0 \\ \beta_2 = b_2 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} = b_{n-1} - \alpha_1\beta_{n-2} - \cdots - \alpha_{n-2}\beta_1 - \alpha_{n-1}\beta_0 \\ \beta_n = b_n - \alpha_1\beta_{n-1} - \cdots - \alpha_{n-1}\beta_1 - \alpha_n\beta_0 \end{cases}$$

Αναπαράσταση στον χώρο των καταστάσεων (5)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n = -\alpha_n x_1 - \alpha_{n-1} x_2 - \cdots - \alpha_1 x_n + \beta_n u \end{cases}$$

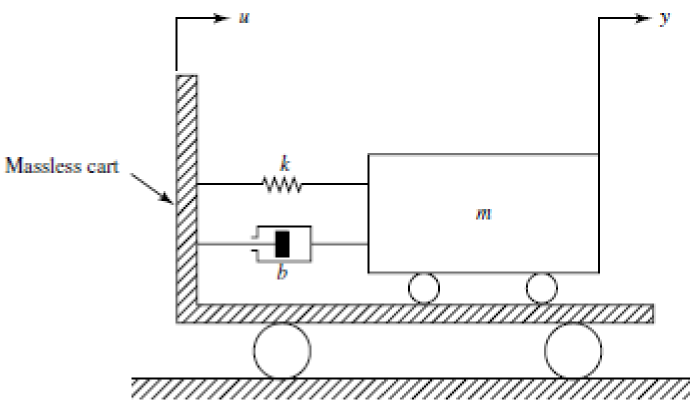
Αναπαράσταση στον χώρο των καταστάσεων (6)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_n u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \ldots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

Μηχανικό σύστημα (1)



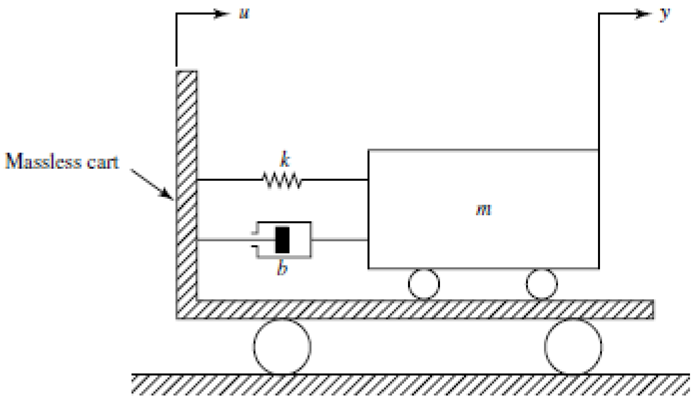
Για συστήματα ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα αναφέρει ότι

$$ma = \Sigma \mathrm{F}$$

όπου m είναι μια μάζα, a είναι η επιτάχυνση της μάζας, και ΣF είναι το άθροισμα των δυνάμεων που δρουν επί της μάζας προς την κατεύθυνση της επιτάχυνσης a. Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (το καλάθι δεν έχει μάζα) παίρνουμε

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -b\left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt}\right) - k(y-u)$$

Μηχανικό σύστημα (2)



$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = b\frac{du}{dt} + ku$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2u$$

$$a_1 = \frac{b}{m}, \qquad a_2 = \frac{k}{m}, \qquad b_0 = 0,$$

$$b_1 = \frac{b}{m}, \qquad b_2 = \frac{k}{m}$$

Μηχανικό σύστημα (3)

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

$$a_1 = \frac{b}{m}, \qquad a_2 = \frac{k}{m}, \qquad b_0 = 0, \qquad b_1 = \frac{b}{m}, \qquad b_2 = \frac{k}{m}$$

- $\beta_0 = b_0 = 0$
- $\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = \frac{b}{m}$
- $\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2$

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0 u = y \\ x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \dfrac{b}{m}u \end{cases}$$

Μηχανικό σύστημα (4)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + \dfrac{b}{m} u \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 u = -\dfrac{k}{m} x_1 - \dfrac{b}{m} x_2 + \left[\dfrac{k}{m} - \left(\dfrac{b}{m}\right)^2\right] \\ y = x_1 \end{cases}$$

Άρα

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{b}{m} \\ \dfrac{k}{m} - \left(\dfrac{b}{m}\right)^2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Βιβλιογραφία

1. Βαρδουλάκης Α.Ι., 2011, *Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Α : Κλασική Θεωρία Ελέγχου*, Εκδόσεις Τζιόλα.
2. Βαρδουλάκης Α.Ι., http://eclass.auth.gr/courses/MATH101/
3. Norman Nise, 2011, *Control Systems Engineering*, 6th Edition, John Willey.
4. Ogata K., 2010, *Modern Control Engineering*, 5th Edition, Prentice Hall.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- Εικόνα 1: http://www.allsanfranciscotours.com/body.asp?tour=SFO-SEG01&page=TourDetails
- Εικόνα 2: http://sphericaldrivesystem.com/concept/
- Εικόνα 3: http://www.airwing.gr/booking/index.php?pid=198

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 1: Μαθηματικά Μοντέλα Συστημάτων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης