ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 3: Ο χώρος των καταστάσεων

Νίκος Καραμπετάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Χώρος των καταστάσεων.
- Χρονική απόκριση συστήματος.
- Επίλυση ομογενούς συνεχούς συστήματος.
- Θεμελιώδης πίνακας.
- Πίνακας μετάβασης της κατάστασης.
- Υπολογισμός του πίνακα e^{At} μέσω του μετασχηματισμού Laplace.
- Επίλυση μη-ομογενούς συνεχούς συστήματος.

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη του τρόπου επίλυσης ομογενούς συνεχούς συστήματος στο χώρο των καταστάσεων.
- Μελέτη του τρόπου επίλυσης μη-ομογενούς συνεχούς συστήματος στο χώρο των καταστάσεων.

Χώρος των καταστάσεων

Έστω γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα Σ με μαθηματικό πρότυπο της μορφής του χώρου των καταστάσεων , το οποίο δίνεται από τις εξισώσεις :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

όπου

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

Ορισμός

Τάξη (**order**) του συστήματος είναι ο αριθμός n των συνιστωσών του ανύσματος κατάστασης $x(t)$.

Χρονική απόκριση συστήματος – Ομογενές σύστημα

- Λύση της ομογενούς $(u(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R})$

$$\dot{x}(t) = Ax(t), (1)$$

Το σύστημα (1) ονομάζεται **ελεύθερο** .

Θεώρημα. Το σύνολο των λύσεων $x(t)$ της (1) αποτελεί γραμμικό διανυσματικό χώρο $\mathcal{X}$ διάστασης n.

Αποδείξτε το.

Ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^n$ και ονομάζεται **χώρος των καταστάσεων** .

Θεμελιώδης πίνακας (1)

Ορισμός. Ένας $n \times n$ πίνακας $\Psi(t)$ ονομάζεται **θεμελιώδης πίνακας** της (1) (**fundamental matrix**), αν οι στήλες του $\psi_i(t), i = 1,2, \dots, n$ αποτελούν n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (1).

Αν $\psi_i(t), i = 1,2, \dots, n$ αποτελούν n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (1) τότε

$$\dot{\psi}_i(t) = A\psi_i(t), i = 1,2, \dots, n, \quad \textbf{(2)}$$

και γράφοντας τις (2) υπό μορφή πίνακα έχουμε την σχέση

$$[\dot{\psi}_1(t) \quad \dot{\psi}_2(t) \quad \dots \quad \dot{\psi}_n(t)] = A[\psi_1(t) \quad \psi_2(t) \quad \dots \quad \psi_n(t)]$$

Θεμελιώδης πίνακας (2)

Επομένως

$$\dot{\Psi}(t) = A\Psi(t)$$

Θεώρημα. Κάθε θεμελιώδης πίνακας $\Psi(t)$ είναι ομαλός για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Αποδείξτε το .

Εύρεση της λύσης $x(t)$ της $\dot{x}(t) = Ax(t)$ (1)

Έστω

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots,$$
$$b_i \in \mathbb{R}^n, i = 0,1,2, \ldots$$
$$\dot{x}(t) = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \cdots + k b_k t^{k-1} + \cdots$$

και άρα

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$
$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \cdots + k b_k t^{k-1} + \cdots = A\left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots\right)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = Ab_0 \\ b_2 = \dfrac{1}{2}Ab_1 = \dfrac{1}{2}A^2 b_0 \\ \vdots \\ b_k = \dfrac{1}{k!}A^k b_0 \end{cases}$$

Εύρεση της λύσης $x(t)$ της $\dot{x}(t) = Ax(t)$ (2)

Για $t = 0$ έχουμε $x(0) = b_0$ και άρα

$$x(t) = x(0) + Atx(0) + \frac{1}{2}A^2t^2x(0) + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^kx(0) + \cdots$$
$$= \left(I_n + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots\right)x(0)$$

Έστω ο συμβολισμός

$$I_n + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots := e^{At}, \qquad (3)$$

τότε

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

Αν παραγωγίσουμε τον πίνακα e^{At} και σύμφωνα με την (3)

Ιδιότητες (1)

έχουμε

$$\frac{d}{dt}e^{At} = A + A^2 t + \frac{1}{2!}A^3 t^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}A^k t^{k-1} + \cdots$$

$$= A\left(I_n + At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \cdots\right) = Ae^{At}$$

$$= \left(I_n + At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \cdots\right)A = e^{At}A$$

Άρα έχουμε την ιδιότητα

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A}$$

Δηλαδή οι πίνακες A και e^{At} στον πολλαπλασιασμό εναλλάσσονται.

Ιδιότητες (2)

Επίσης από την

$$e^{At}e^{Ap} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k p^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}A^k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!\,(k-j)!}t^j p^{k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k(t+p)^k = e^{A(t+p)}$$

έχουμε την ιδιότητα

$$e^{At}e^{Ap} = e^{A(t+p)}$$

Ιδιότητες (3)

Η προηγούμενη ιδιότητα για $p = -t$ δίνει

$$e^{At}e^{-At} = e^{A(t-t)} = e^{0} = I_n \Rightarrow (e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

Δηλαδή ο αντίστροφος πίνακας του e^{At}είναι ο e^{-At}.

Πίνακας μετάβασης της κατάστασης (state transition matrix) (1)

Έστω

$$\Psi(t) \coloneqq e^{At}$$

Αν $t = t_1$

$$\Psi(t_1) \coloneqq e^{At_1}$$

$$\Psi(t)\Psi(t_1) \coloneqq e^{At}e^{At_1} = e^{A(t+t_1)} = \Psi(t+t_1)$$

$$\Psi(t)^{-1} = (e^{At})^{-1} = e^{-At} = \Psi(-t)$$

Η λύση $x(t)$ της $\dot{x}(t) = Ax(t)$

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

για $t = t_0 \neq 0$ δίνει

$$x(t_0) = e^{At_0}x(0) \Rightarrow x(0) = (e^{At_0})^{-1}x(t_0) = e^{-At_0}x(t_0)$$

Πίνακας μετάβασης της κατάστασης (state transition matrix) (2)

Επομένως

$$x(t) = e^{At}x(0) = e^{At}e^{-At_0}x(t_0) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$
$$= \Psi(t-t_0)x(t_0)$$

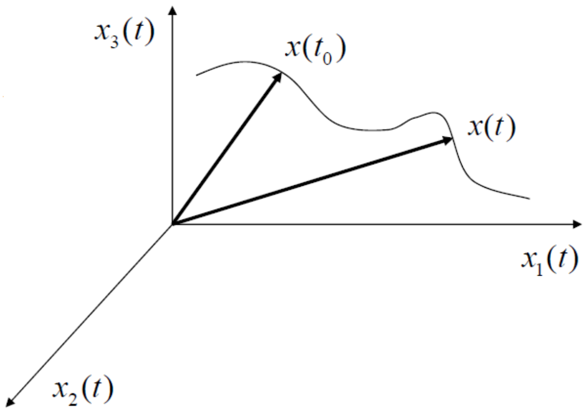
Ορισμός. Ο πίνακας

$$\Psi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

ονομάζεται **πίνακας μετάβασης της κατάστασης** (**state transition matrix**).

$\Psi(t-t_0): \mathcal{X} \to \mathcal{X}$

$x(t_0) \mapsto x(t)$



Υπολογισμός του πίνακα e^{At} μέσω του μετασχηματισμού Laplace

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace την

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

έχουμε

$$sX(s) - x(0) = AX(s) \Rightarrow$$

$$sX(s) - AX(s) = x(0) \Rightarrow$$

$$(sI_n - A)X(s) = x(0) \Rightarrow$$

$$X(s) = (sI_n - A)^{-1}x(0)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI_n - A)^{-1}x(0)\} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI_n - A)^{-1}\}x(0) \xRightarrow{x(t)=e^{At}x(0)}$$

$$\boxed{e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI_n - A)^{-1}\}}$$

Παράδειγμα 1 (1)

Έστω το ελεύθερο εισόδων σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί η (ελεύθερη) απόκριση του συστήματος ή ισοδύναμα η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης για αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$.

$$sI_n - A = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix},$$

$$\det(sI_n - A) = (s+1)(s+2)$$

Παράδειγμα 1 (2)

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{adj(sI_n - A)}{\det(sI_n - A)}$$
$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$
$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI_n - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}\right\} =$$

Παράδειγμα 1 (3)

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t}x_1(0) + e^{-t}x_2(0) - e^{-2t}x_2(0) \\ e^{-2t}x_2(0) \end{bmatrix}$$

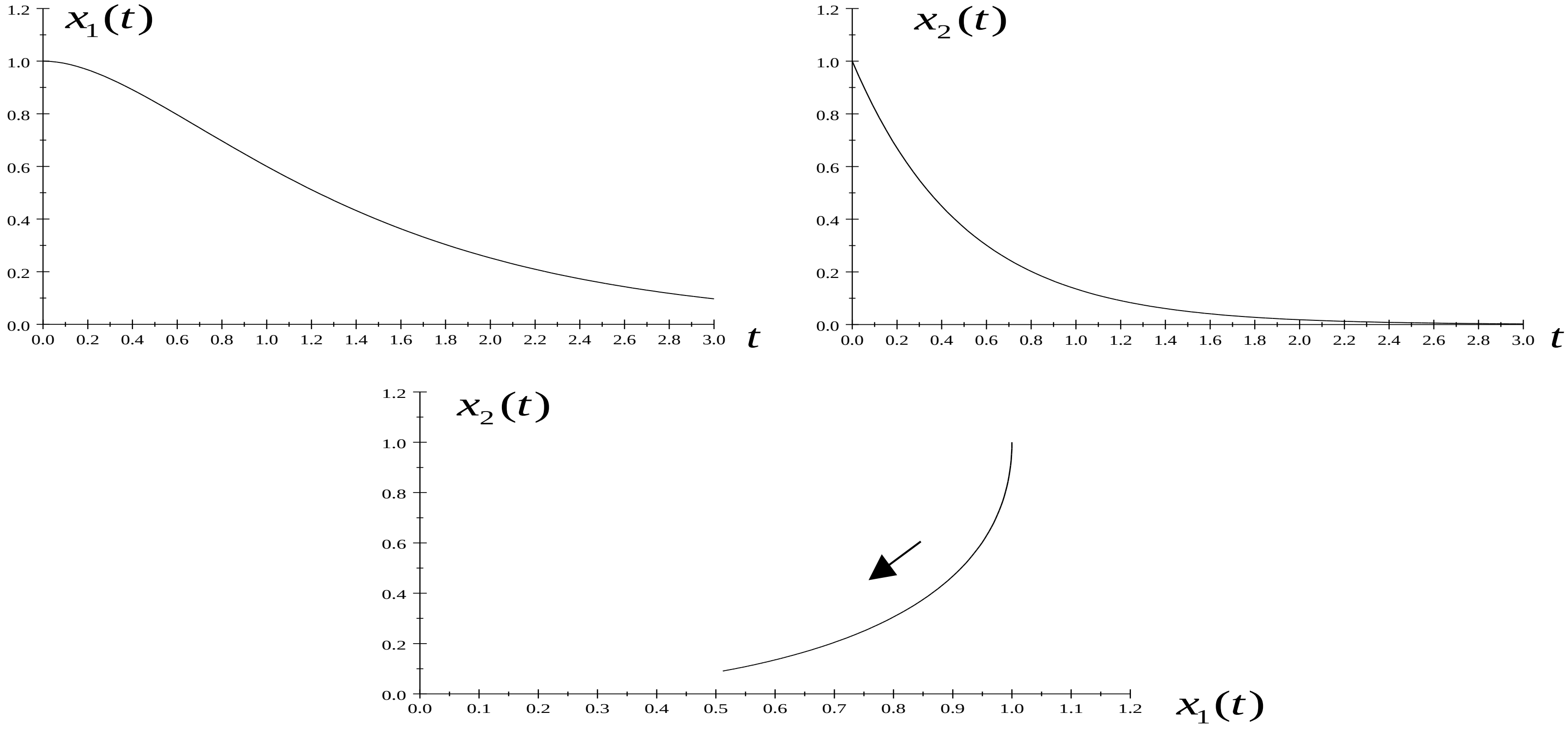
Για $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$

$$x_1(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$x_2(t) = e^{-2t}$$

Παράδειγμα 1 (4)

Τροχιά του ανύσματος κατάστασης στον χώρο των καταστάσεων $\mathcal{X} \to \mathbb{R}^2$.



Γενική λύση της $\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$ (1)

Έστω η γενική λύση της

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad (4)$$

και $x_p(t)$ η μερική λύση της (4) έτσι ώστε

$$\dot{x}_p(t) = Ax_p(t) + Bu(t), \qquad (5)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (4) και (5)

$$\dot{x}(t) - \dot{x}_p(t) = A\left[x(t) - x_p(t)\right]$$

και άρα η

$$x_h(t) \coloneqq x(t) - x_p(t)$$

είναι λύση της ομογενούς

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

Γενική λύση της $\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$ (2)

Έστω ότι η μερική λύση της

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

είναι η

$$x_p(t) = \Psi(t)\omega(t)$$

όπου $\omega(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ άγνωστη ανυσματική συνάρτηση. Τότε

$$\dot{x}_p(t) = Ax_p(t) + Bu(t)$$

ή

$$\dot{x}_p(t) = \dot{\Psi}(t)\omega(t) + \Psi(t)\dot{\omega}(t) = A\Psi(t)\omega(t) + Bu(t),$$

ή, λόγω της

$$\dot{\Psi}(t) = A\Psi(t)$$

Γενική λύση της $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ (3)

$$\dot{x}_p(t) = A\Psi(t)\omega(t) + \Psi(t)\dot{\omega}(t) = A\Psi(t)\omega(t) + Bu(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}(t) = \Psi(t)^{-1}Bu(t)$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\omega(t) = \int_0^t \Psi(\tau)^{-1}Bu(\tau)d\tau$$

$$x_p(t) = \Psi(t)\omega(t) = \Psi(t)\int_0^t \Psi(\tau)^{-1}Bu(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t \Psi(t)\Psi(-\tau)Bu(\tau)d\tau = \int_0^t \Psi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Γενική λύση της $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ (4)

Από την

$$x_h(t) \coloneqq x(t) - x_p(t)$$

η γενική λύση της (4) είναι

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

και άρα

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Γενική λύση της $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ (5)

Αν την χρονική στιγμή $t = t_0 \neq 0$ το άνυσμα κατάστασης είναι το $x(t_0)$, τότε από την

$$x(t_0) = e^{At_0}x(0) \Rightarrow x(0) = e^{-At_0}x(t_0)$$

έχουμε ότι η γενική λύση της $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ είναι η

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)}x(t_0)}_{\text{ελεύθερη απόκριση καταστασης}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{δυναμικη απόκριση καταστασης}}$$

Από την $y(t) = Cx(t) + Du(t)$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{A(t-t_0)}x(t_0)}_{\text{ελεύθερη απόκριση εξόδου}} + \underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\text{δυναμικη απόκριση εξόδου}}$$

Παράδειγμα 2 (1)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t), u(t)=1, t\geq 0,$$

$$x(0)=\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Psi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}e^{-t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau=$$

$$=\begin{bmatrix}e^{-t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}e^{-(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ 0 & e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}d\tau$$

Παράδειγμα 2 (2)

$$\begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau =$$

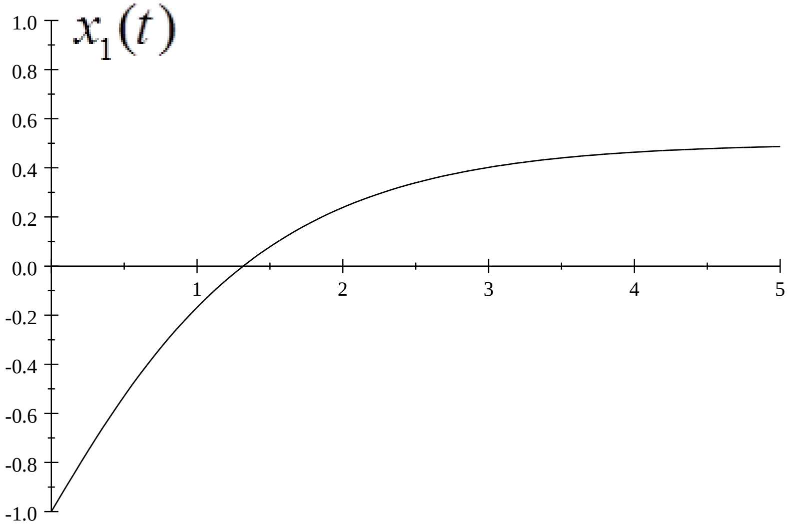
$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t} \end{bmatrix}$$

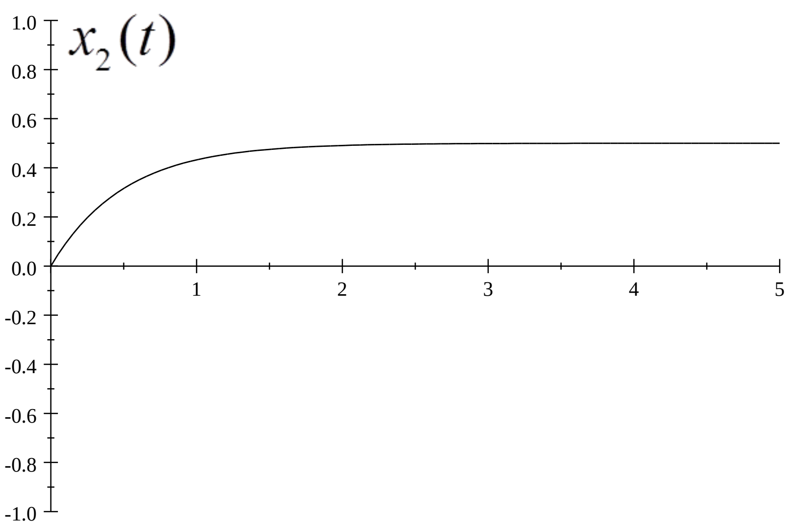
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2 (3)

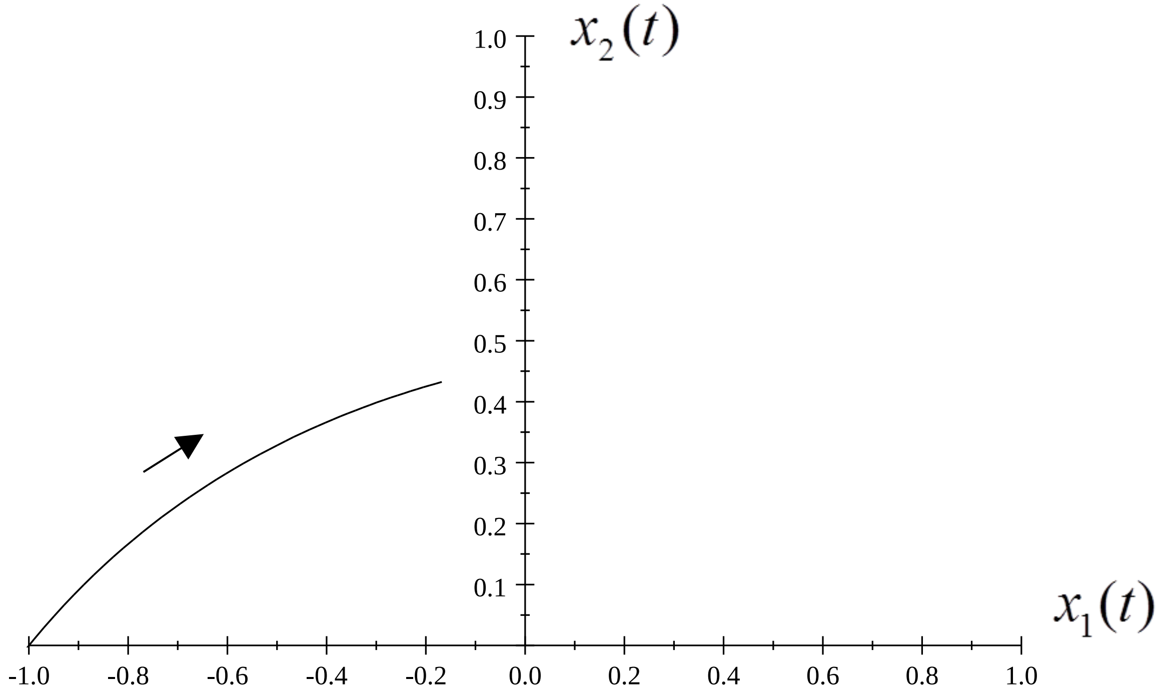
$$x_1(t) = \frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$





Παράδειγμα 2 (4)



Υπολογισμός της λύσης του σύστήματος στον χώρο των καταστάσεων

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace την

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

έχουμε

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow$$

$$sX(s) - AX(s) = x(0) + BU(s) \Rightarrow$$

$$(sI_n - A)X(s) = x(0) + BU(s) \Rightarrow$$

$$X(s) = (sI_n - A)^{-1}x(0) + (sI_n - A)^{-1}BU(s)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI_n - A)^{-1}x(0) + (sI_n - A)^{-1}BU(s)\}$$

Παράδειγμα 2 (5)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t), u(t)=1, t\geq 0,$$

$$x(0)=\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}X_1(s)\\ X_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\frac{1}{s}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\frac{1}{s}$$

Παράδειγμα 2 (6)

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)(s+2)s} \\ \dfrac{1}{(s+1)s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{(s+1)(s+2)s} \\ \dfrac{1}{(s+2)s} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}[X_1(s)] \\ \mathcal{L}^{-1}[X_2(s)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left[-\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{(s+1)(s+2)s}\right] \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s+2)s}\right] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} - 2e^{-t} + \dfrac{1}{2}e^{-2t} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012, *Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος B. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Εκδόσεις Τζιόλα.*
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, *Εκδόσεις Τζιόλα*.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 3: Ο χώρος των καταστάσεων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης