ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 5: Διακριτοποίηση συστημάτων

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

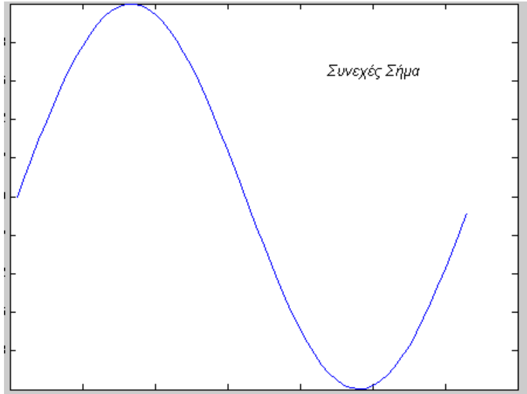
Περιεχόμενα Ενότητας

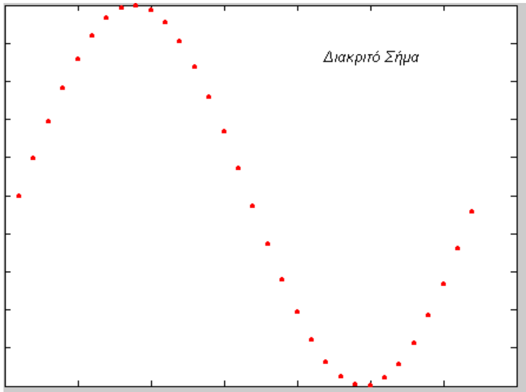
- Σήματα και Συστήματα.
- Μέθοδοι συγκράτησης n-τάξης.
- Διακριτοποίηση Συστημάτων Συνεχούς Χρόνου στο χώρο των καταστάσεων με χρήση αριθμητικών μεθόδων ολοκλήρωσης.
  - Μέθοδος διαφοράς προς τα εμπρός.
  - Μέθοδος διαφοράς προς τα πίσω.
  - Μέθοδος του τραπεζίου.
- Διακριτοποίηση με τη μέθοδο συγκράτησης μηδενικής τάξης.
- Διακριτοποίηση με τη μέθοδο συγκράτησης πρώτης τάξης.

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη διαφόρων μεθόδων διακριτοποίησης συνεχών συστημάτων στο χώρο των καταστάσεων.

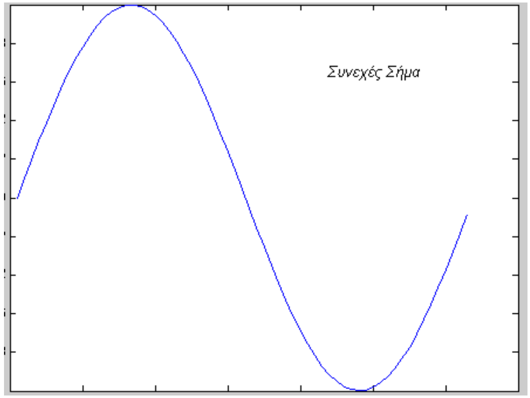
Σήματα και Συστήματα (1)

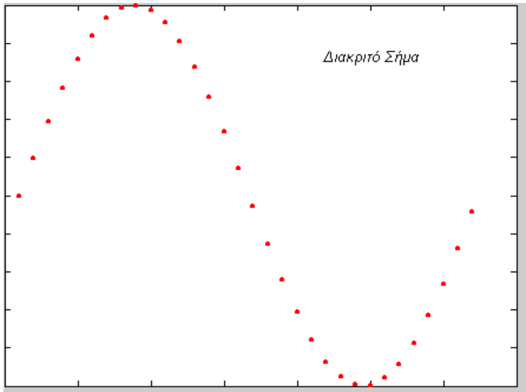




- Το **σήμα συνεχούς χρόνου** (continuous time signal) είναι μια πραγματική συνάρτηση $x(t)\colon \mathcal{R} \rightarrow\ \mathcal{R}$ της ανεξάρτητης μεταβλητής t, η οποία εκφράζει τον συνεχή χρόνο.
- Το **σήμα διακριτού χρόνου** (discrete time signal) είναι ένα σήμα $x(kT)$ το οποίο είναι συνάρτηση της μεταβλητής διακριτού χρόνου $t = kT$ όπου $T > 0$ είναι η περίοδος δειγματοληψίας και $k = \cdots - 2, -1,0,1,2, \dots.$

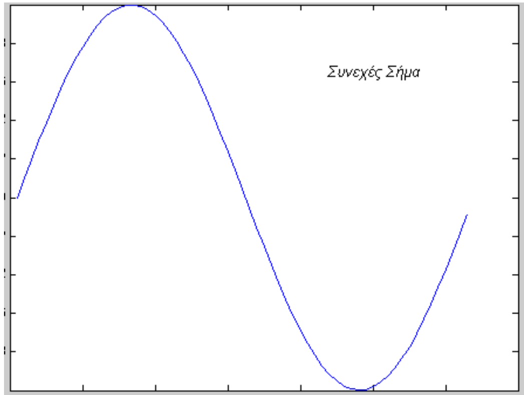
Σήματα και Συστήματα (2)

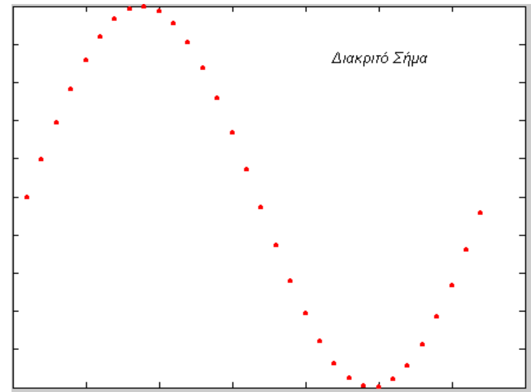




- Τα <u>**συστήματα ελέγχου συνεχούς χρόνου**</u> περιλαμβάνουν στοιχεία που παράγουν ή επεξεργάζονται μόνον σήματα συνεχή στο χρόνο.
- Τα <u>**συστήματα ελέγχου διακριτού χρόνου**</u> περιλαμβάνουν στοιχεία που παράγουν ή επεξεργάζονται διακριτά σήματα σε ένα ή και περισσότερα σημεία του συστήματος.

Σήματα και Συστήματα (3)





- Συστήματα τα οποία επεξεργάζονται ή παράγουν διακριτά σήματα σε κάποια μέρη τους και συνεχή σήματα σε κάποια άλλα ονομάζονται **μικτά ή υβριδικά** (**sampled data systems**).

Μέθοδοι συγκράτησης n-τάξης (1)

- **Συγκράτηση τιμών** ενός σήματος (**data hold**) είναι μία διαδικασία κατά την οποία παράγεται ένα σήμα συνεχούς χρόνου $h(t)$ χρησιμοποιώντας την ακολουθία διακριτών τιμών $x(kT)$.
- Η τιμή του σήματος $h(t)$ για το χρονικό διάστημα $kT \leq t < kT + T$ προσεγγίζεται με ένα πολυώνυμο της μεταβλητής τ δηλαδή

$$h(kT + \tau) = \alpha_n \tau^n + \alpha_{n-1} \tau^{n-1} + \alpha_1 \tau + x(kT)$$

όπου $0 \leq \tau \leq \mathrm{T}$.

Μέθοδοι συγκράτησης n-τάξης (2)

- Εάν το πολυώνυμο προσέγγισης είναι n-βαθμού τότε η συγκράτηση ονομάζεται **συγκράτηση n-τάξης**.

Η συγκράτηση n-τάξης χρησιμοποιεί τις $n+1$ προηγούμενες τιμές του $x(kT)$, δηλαδή τις τιμές

$$x((k-n)T), x((k-n+1)T), \ldots, x(kT)$$

για να παράγει το σήμα $h(kT+\tau)$.

Διακριτοποίηση συστημάτων στο χώρο των καταστάσεων

A. Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης με χρήση αριθμητικών μεθόδων ολοκλήρωσης ή διαφόρισης.

B. Μέθοδοι Συγκράτησης.

   I. Δειγματοληψία του σήματος εισόδου $u(t)$.

   II. Συγκράτηση των τιμών των δειγμάτων $u(kT)$ για χρονικό διάστημα T.

A. Διακριτοποίηση Συστημάτων Συνεχούς Χρόνου στο χώρο των καταστάσεων με χρήση αριθμητικών μεθόδων ολοκλήρωσης

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} [Ax(t) + Bu(t)]dt$$

Θέτοντας $t = kT, t_0 = 0$ και $k = 0,1,2,\ldots$, προκύπτει ότι

$$x(kT) = x(0) + \int_{0}^{kT} [Ax(t) + Bu(t)]dt$$

Ομοίως $x(kT + T) = x(0) + \int_{0}^{kT+T} [Ax(t) + Bu(t)]dt$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι

$$x(kT + T) = x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} [Ax(t) + Bu(t)]dt\,, \qquad (\mathbf{2})$$

Α1. Μέθοδος διαφοράς προς τα εμπρός (1)

$$x(kT+T) = x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} [Ax(t) + Bu(t)]dt\,, \qquad \mathbf{(2)}$$

$$\int_{kT}^{kT+T} [Ax(t) + Bu(t)]dt = [Ax(kT) + Bu(kT)]T$$

οπότε η σχέση (2) γίνεται

$$x(kT+T) = \ (I + AT)x(kT) + BTu(kT)$$

Θέτοντας $t = kT, k \ = 0,1, \dots,$ στην εξίσωση εξόδου έχουμε

$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT)$$

Α1. Μέθοδος διαφοράς προς τα εμπρός (2)

Επομένως το διακριτό σύστημα δίνεται από τις εξισώσεις

$$x(kT+T)=\tilde{A}x(kT)+\tilde{B}u(kT)$$

$$y(kT)=\tilde{C}x(kT)+\widetilde{D}u(kT)$$

όπου

$$\tilde{A}=I+AT, \tilde{B}=BT, \tilde{C}=C, \widetilde{D}=D$$

Α2. Μέθοδος διαφοράς προς τα πίσω (1)

$$\int_{kT}^{kT+T} [Ax(t) + Bu(t)]dt = [Ax(kT + T) + Bu(kT + T)]T$$

οπότε η σχέση (2) γίνεται

$$(I - AT)x(kT + T) = x(kT) + B\mathrm{T}\, u(kT + T).$$

Θέτοντας $\bar{x}(kT + T) = x(kT)$,

$$(I - AT)x(kT + T) = \bar{x}(kT + T) + B\mathrm{T}\, u(kT + T)$$

$$(I - AT)x(kT) = \bar{x}(kT) + B\mathrm{T}\, u(kT)$$

$$(I - AT)\bar{x}(kT + T) = \bar{x}(kT) + B\mathrm{T}\, u(kT)$$

$$\bar{x}(kT + T) = [I - AT]^{-1}\bar{x}(kT) + [I - AT]^{-1}BTu(kT)$$

Α2. Μέθοδος διαφοράς προς τα πίσω (2)

Επομένως το διακριτό σύστημα δίνεται από τις εξισώσεις

$$\bar{x}(kT+T) = \tilde{A}\bar{x}(kT) + \tilde{B}u(kT)$$

$$y(kT) = \tilde{C}\bar{x}(kT) + \tilde{D}u(kT)$$

όπου

$$\tilde{A} = [I - AT]^{-1}, \qquad \tilde{B} = [I - AT]^{-1}BT,$$

$$\tilde{C} = C[I - AT]^{-1}, \tilde{D} = C[I - AT]^{-1}BT + D$$

Α3. Μέθοδος του τραπεζίου (1)

$$\int_{kT}^{kT+T} x(t)dt = \frac{T}{2}[x(kT) + x(kT+T)]$$

και

$$\int_{kT}^{kT+T} u(t)dt = \frac{T}{2}[u(kT) + u(kT+T)]$$

οπότε η σχέση (2) γίνεται

$$\bar{x}(kT+T) = \left[I - \frac{AT}{2}\right]^{-1}\left[I + \frac{AT}{2}\right]\bar{x}(kT) + \left[I - \frac{AT}{2}\right]^{-1}\frac{BT}{2}u(kT-T) + \left[I - \frac{AT}{2}\right]^{-1}\frac{BT}{2}u(kT)$$

Επομένως το διακριτό σύστημα δίνεται από τις εξισώσεις

A3. Μέθοδος του τραπεζίου (2)

$$\bar{x}(kT+T) = \tilde{A}\bar{x}(kT) + \tilde{B}u(kT) + \tilde{\tilde{B}}u(kT-T)$$

$$y(kT) = \tilde{C}\bar{x}(kT) + \tilde{D}u(kT) + \tilde{\tilde{D}}u(kT-T)$$

όπου

$$\tilde{\mathrm{A}} = \left[I - \frac{AT}{2}\right]^{-1}\left[I + \frac{AT}{2}\right], \tilde{\mathrm{B}} = \left[I - \frac{AT}{2}\right]^{-1}\frac{BT}{2},$$

$$\tilde{\tilde{B}} = \left[I - \frac{AT}{2}\right]^{-1}\frac{BT}{2}$$

$$\tilde{\mathrm{C}} = C\left[I - \frac{AT}{2}\right]^{-1}\left[I + \frac{AT}{2}\right], \tilde{D} = C\left[I - \frac{AT}{2}\right]^{-1}\frac{BT}{2} + D,$$

$$\tilde{\tilde{D}} = C\left[I - \frac{AT}{2}\right]^{-1}\frac{BT}{2}$$

Β1. Διακριτοποίηση με τη μέθοδο συγκράτησης μηδενικής τάξης (1)

Η λύση της δ. ε. του συστήματος είναι

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Θέτοντας $t = kT, k = 0,1,2,3, \dots.$ προκύπτει

$$x(kT) = e^{AkT}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Το διάνυσμα κατάστασης στο $k+1$ βήμα δίνεται από την σχέση

$$x(kT+T) = e^{A(kT+T)}x(0) + \int_0^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow$$

B1. Διακριτοποίηση με τη μέθοδο συγκράτησης μηδενικής τάξης (2)

$$x(kT+T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Αν θεωρήσουμε ότι η είσοδος διατηρείται σταθερή για χρονικό διάστημα T δηλαδή

$$u(t) = u(kT) \quad \gamma\iota\alpha \quad kT \le t < kT + T$$

$$\int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \left[\int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}d\tau\right]Bu(kT)$$

προκύπτει ότι το ισοδύναμο σύστημα διακριτού χρόνου είναι

$$x[(k+1)T] = \tilde{A}x(kT) + \tilde{B}u(kT)$$
$$y(kT) = \tilde{C}x(kT) + \tilde{D}u(kT)$$

B1. Διακριτοποίηση με τη μέθοδο συγκράτησης μηδενικής τάξης (3)

$$\tilde{A} = e^{AT}, \tilde{B} = \left[\frac{IT}{1!} + \frac{AT^2}{2!} + \frac{A^2T^3}{3!} + \cdots + \frac{A^iT^{i+1}}{(i+1)!} + \cdots\right]B,$$

$$\tilde{C} = C, \tilde{D} = D$$

Ή αν ο Α είναι αντιστρέψιμος

$$\tilde{B} = (e^{AT} - I)A^{-1}B$$

Β2. Διακριτοποίηση με τη μέθοδο συγκράτησης πρώτης τάξης (1)

Όμοια με την προηγούμενη μέθοδο καταλήγουμε στην εξίσωση

$$x(kT+T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Αντικαθιστώντας την $u(\tau)$ με

$$u(\tau) = u(kT) + \frac{u(kT) - u\big((k-1)T\big)}{T}(\tau - kT),$$

$$kT \leq \tau < (k+1)T$$

προκύπτει

B2. Διακριτοποίηση με τη μέθοδο συγκράτησης πρώτης τάξης (2)

$$x(kT+T) = \underbrace{e^{AT}}_{\tilde{A}}\, x(kT) + \underbrace{\left[\int_0^T e^{Aw}\left[2-\frac{w}{T}\right]dw\right]B}_{\tilde{B}}\, u(kT) +$$

$$+\underbrace{\left[\int_0^T e^{Aw}\left[\frac{w}{T}-1\right]dw\right]B}_{\tilde{\tilde{B}}}\, u\big((k-1)T\big)$$

Επομένως το ισοδύναμο σύστημα διακριτού χρόνου είναι

$$x\big((k+1)T\big) = \tilde{A}x(kT) + \tilde{B}u(kT) + \tilde{\tilde{B}}u\big((k-1)T\big)$$

$$y(kT) = \tilde{C}x(kT)$$

B2. Διακριτοποίηση με τη μέθοδο συγκράτησης πρώτης τάξης (3)

όπου

$$\tilde{A} = e^{AT}, \tilde{B} = \left[\int_0^T e^{Aw}\left[2 - \frac{w}{T}\right] dw\right] B,$$

$$\tilde{\tilde{B}} = \left[\int_0^T e^{Aw}\left[\frac{w}{T} - 1\right] dw\right] B, \tilde{C} = C.$$

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012*, Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Εκδόσεις Τζιόλα.*
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, *Εκδόσεις Τζιόλα*.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 5. Διακριτοποίηση συστημάτων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης