ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 8: Ομοιότητα και Όμοιες Περιγραφές

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Περιγραφή του συστήματος S της μορφής του χώρου των καταστάσεων.
- Περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του συστήματος S.
- Όμοιες περιγραφές.

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη της περιγραφής ενός συστήματος S της μορφής του χώρου των καταστάσεων.
- Μελέτη των όμοιων περιγραφών ενός συστήματος S της μορφής του χώρου των καταστάσεων.

Περιγραφή του S της μορφής του χώρου των καταστάσεων

Έστω γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο πολυμεταβλητό σύστημα S με μαθηματικό πρότυπο της μορφής του χώρου των καταστάσεων:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$
$$x(t) \in \mathcal{X} \sim \mathbb{R}^{n}$$

Ορισμός. Η τετράδα πινάκων

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

ονομάζεται **περιγραφή του S της μορφής του χώρου των καταστάσεων.**

Περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S (1)

Αν $e_1, e_2, \dots, e_n$ είναι η ορθοκανονική βάση του χώρου των καταστάσεων $\mathcal{X}$ με

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i\, \gamma\rho\alpha\mu\mu\eta$$

τότε

$$x(t) = e_1 x_1(t) + e_2 x_2(t) + \cdots e_n x_n(t) = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S (2)

και το άνυσμα στήλης $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}$

ονομάζεται **περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του $\boldsymbol{S}$** ως προς την βάση $e_1, e_2, \dots, e_n$ του $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$.

Περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S (3)

Έστω $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ μία άλλη βάση του $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$.

Τότε

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{e}_1 \bar{x}_1(t) + \bar{e}_2 \bar{x}_2(t) + \cdots \bar{e}_n \bar{x}_n(t) \\ &= [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n] \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_n(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

και το άνυσμα στήλης $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_n(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$

Περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S (4)

ονομάζεται **περιγραφή** του ανύσματος κατάστασης ως προς την βάση $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ του $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$.

Έστω

$$e_i = [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n] \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} = \bar{E} p_i, i = 1,2, \dots, n$$

η περιγραφή του ανύσματος e_i ως προς την βάση $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$.

Για $i = 1,2, \dots, n$

Περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S (5)

$$\begin{aligned}
[e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n] &= [\bar{E}p_1 \quad \bar{E}p_2 \quad \dots \quad \bar{E}p_n] \\
&= \bar{E}[p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n] \\
&= [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} = \bar{E}P
\end{aligned}$$

όπου $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει στήλη i την περιγραφή του e_i ως προς την βάση $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$.

$$[e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n] = E = [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n]P = \bar{E}P$$

Άρα

Περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S (6)

$$x(t) = [e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n]x(t)$$
$$= [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n]Px(t)$$
$$= [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n]\bar{x}(t)$$

Άρα οι δύο περιγραφές συνδέονται μέσω της

$$\bar{x}(t) = Px(t)$$

Ομοίως

$$x(t) = Q\bar{x}(t)$$

όπου $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει στήλη i την περιγραφή του $\bar{e}_i$ ως προς την βάση $e_1, e_2, \dots, e_n$.

$$\bar{E} = EQ$$

Περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S (7)

$$\bar{x}(t) = Px(t) = PQ\bar{x}(t) \Rightarrow PQ = I_n \Rightarrow P = Q^{-1}$$

P, Q ομαλοί πίνακες (non-singular)

Άρα αν $x(t)$ είναι η περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S ως προς κάποια βάση του χώρου των καταστάσεων $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$ και αν $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $|R| \neq 0 \Leftrightarrow R$ ομαλός, τότε η εξίσωση

$$Rx(t) =: \bar{x}(t)$$

ορίζει μία νέα περιγραφή $\bar{x}(t)$ του ανύσματος κατάστασης $x(t)$ ως προς μία άλλη βάση του $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$.

Όμοιες περιγραφές (similar) (1)

Έστω η περιγραφή του S

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

$$x(t) \in \mathcal{X} \sim \mathbb{R}^{n}$$
$$Rx(t) =: \bar{x}(t)$$

$$x(t) = R^{-1}\bar{x}(t)$$
$$\dot{x}(t) = R^{-1}\dot{\bar{x}}(t)$$

$$\dot{x}(t) = R^{-1}\dot{\bar{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) = AR^{-1}\bar{x}(t) + Bu(t) \Rightarrow$$
$$\dot{\bar{x}}(t) = RAR^{-1}\bar{x}(t) + RBu(t)$$

Όμοιες περιγραφές (similar) (2)

Ορισμός. Αν

$$\bar{A} = RAR^{-1}, \bar{B} = RB, \bar{C} := CR^{-1}, \bar{D} := D$$

τότε έχουμε την περιγραφή του S

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t)$$
$$y(t) = \bar{C}x(t) + \bar{D}u(t)$$

και οι περιγραφές $(A, B, C, D), (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ του S ονομάζονται **όμοιες** (**similar**).

Παράδειγμα 1 (1)

Έστω η

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έστω

$$\bar{x}(t) = Rx(t)$$

όπου $R = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, |R| = -1 \neq 0$

$$x(t) = R^{-1}\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\bar{x}(t)$$

Παράδειγμα 1 (2)

Έχουμε ότι

$$\bar{A} = RAR^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = RB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} := CR^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

και

$$\bar{D} := D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1 (3)

Οι δύο περιγραφές

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

και

$$\bar{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \bar{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \bar{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}, \bar{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

είναι όμοιες.

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012*, Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου.* Εκδόσεις Τζιόλα*.*
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Τίτλος ενότητας». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης