ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 10. Ελεγξιμότητα (μέρος 1ο)

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Περιεχόμενα Ενότητας

- Ελεγξιμότητα.
- Εφικτότητα.
- Κριτήρια Ελεγξιμότητας.

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη των εννοιών της ελεγξιμότητας και εφικτότητας ενός συστήματος στο χώρο των καταστάσεων.
- Μελέτη των κριτηρίων ελεγξιμότητας.

Ελεγξιμότητα (Controllability) (1)

Ορισμός. Το σύστημα

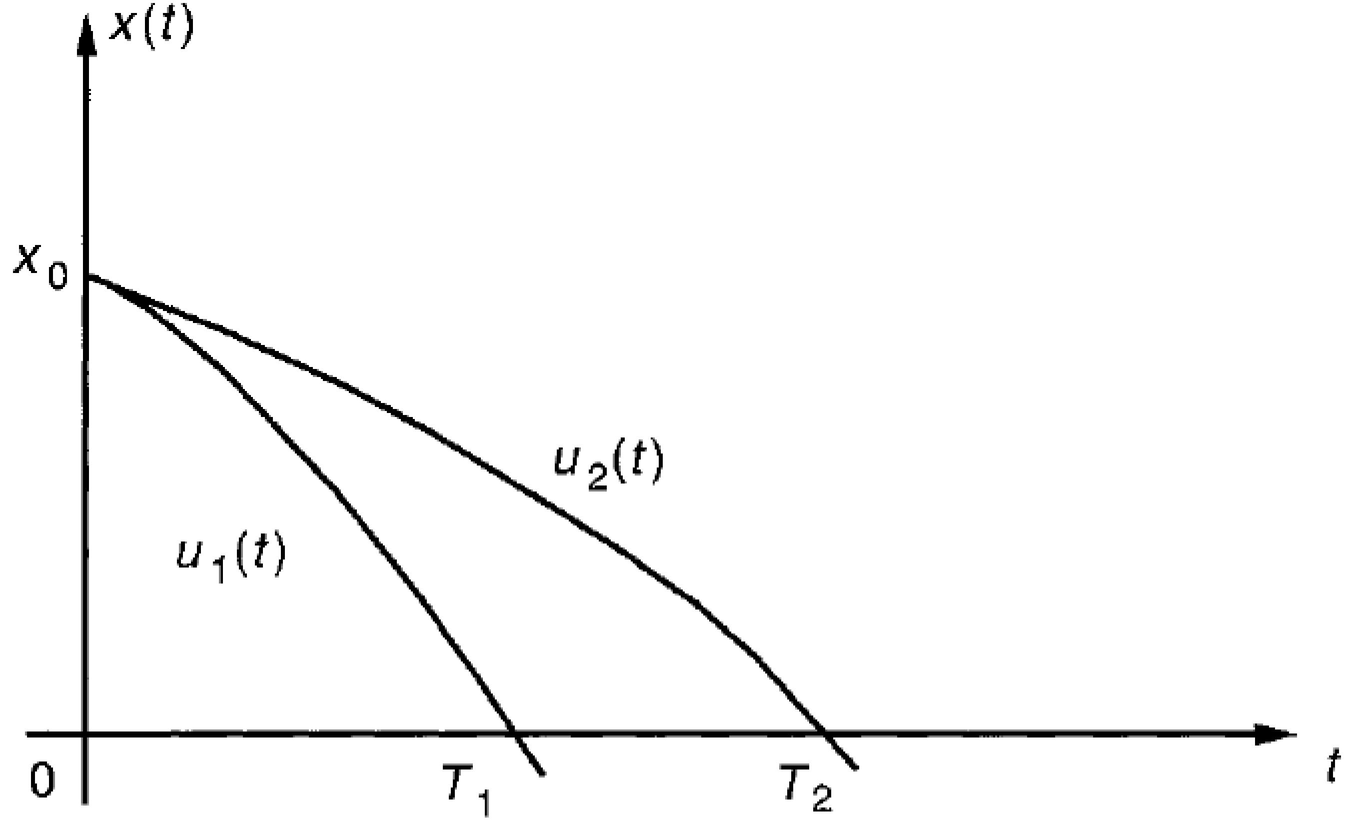
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

όπου

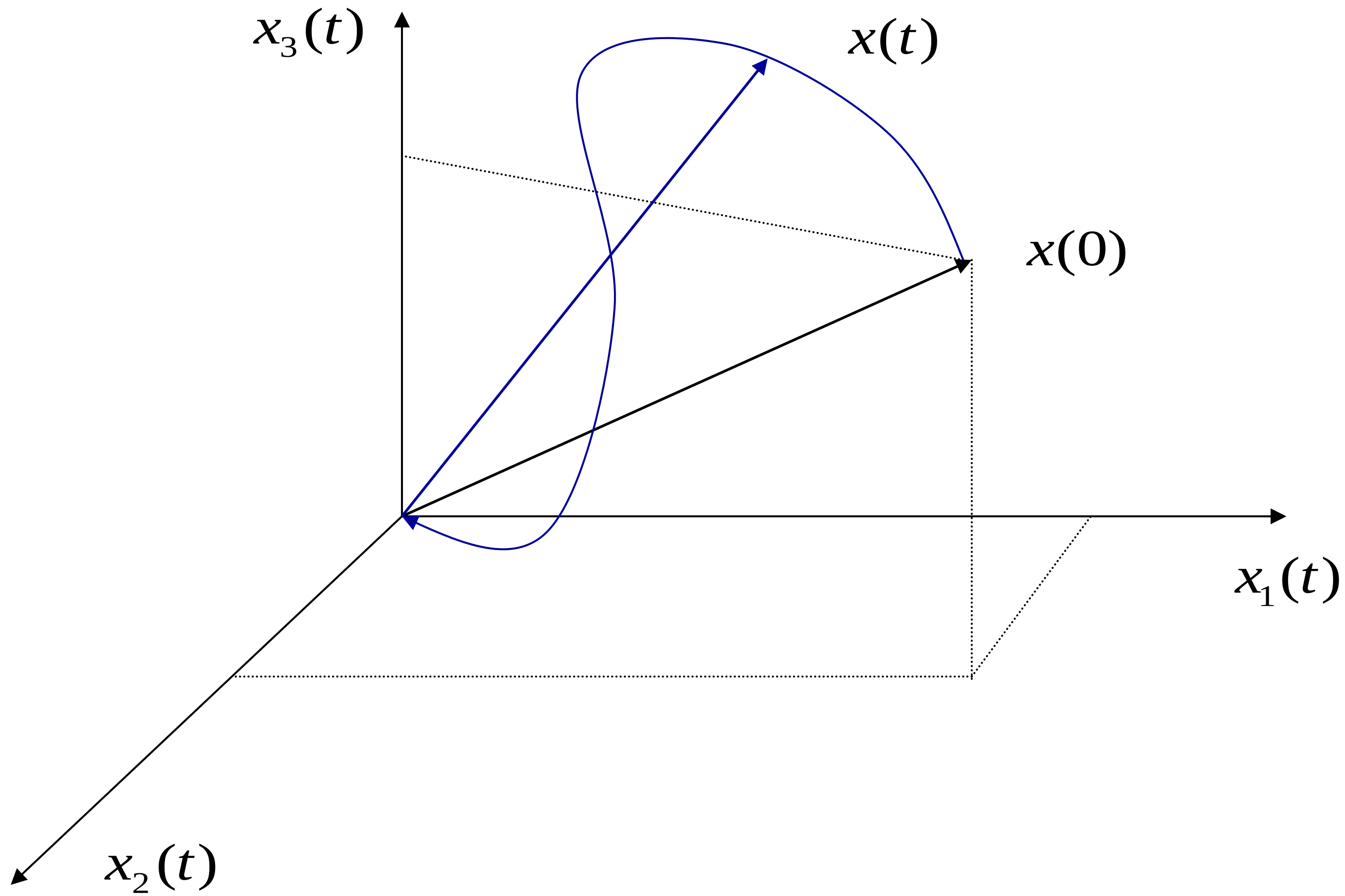
$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

(ή το ζεύγος $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$) ονομάζεται **ελέγξιμο** (**controllable**) αν για **κάθε αρχική συνθήκη** $0 \neq x(0) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ και χρόνο $t_1 > 0$ υπάρχει είσοδος $u(t), t \in [0, t_1]$ τέτοια ώστε η κατάσταση $x(t_1) = 0$.

Ελεγξιμότητα (Controllability) (2)



Ελεγξιμότητα (Controllability) (3)



Εφικτότητα (Reachability) (1)

Ορισμός. Το σύστημα

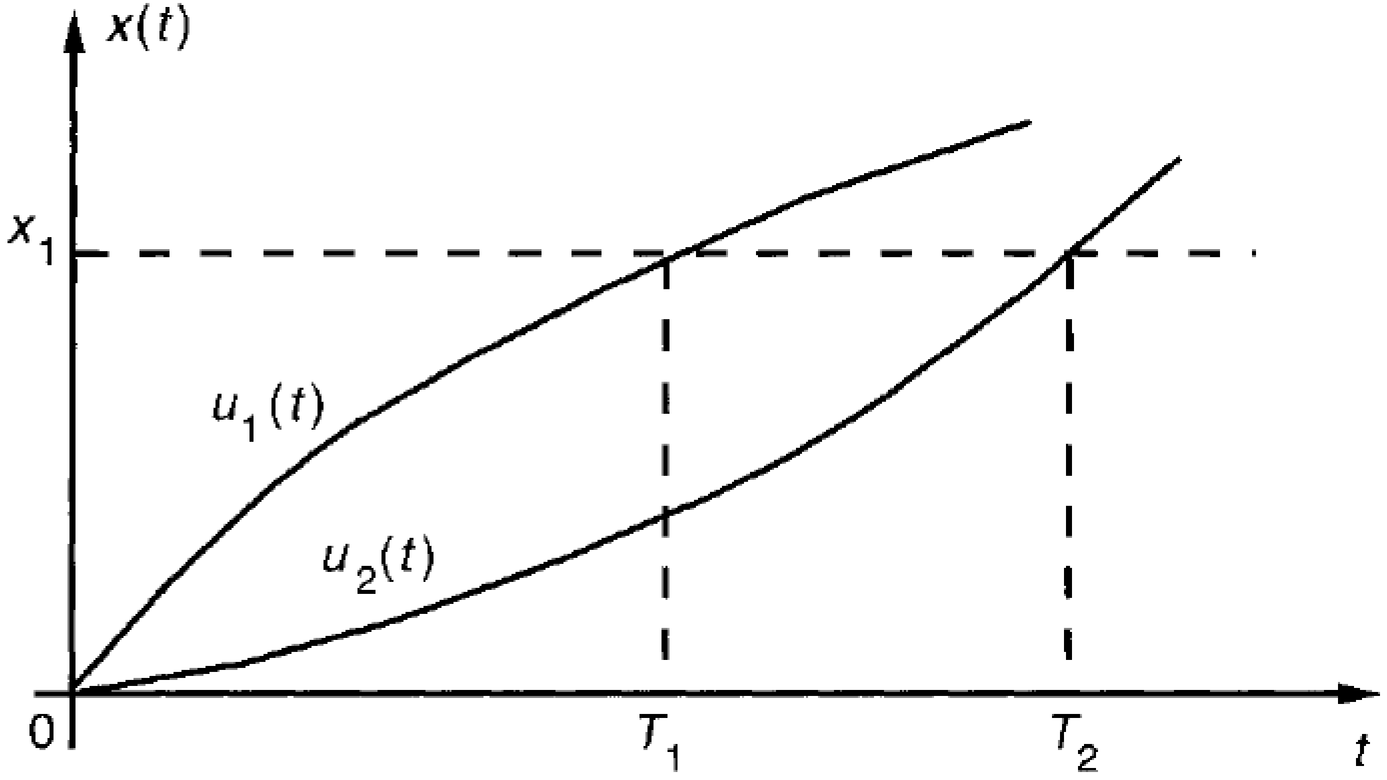
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

όπου

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

(ή το ζεύγος $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$) ονομάζεται **εφικτό** (**reachable**) αν για κάθε x_f και $x(0) = 0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ υπάρχει είσοδος $u(t), t \in [0, t_1]$ με $t_1 > 0$ τέτοια ώστε η κατάσταση $x(t_1) = x_f$.

Εφικτότητα (Reachability) (2)



Θεώρημα 1 (1)

Θεώρημα 1

Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

i. Το σύστημα (1) ή το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο.

ii. $rank_{\mathbb{R}}[\lambda I_n - A \quad B] = n, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$

iii. Το ζεύγος (A, B) δεν είναι όμοιο με ζεύγος της μορφής

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0_{k,n-k} & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix}\right).$$

iv. $rank_{\mathbb{R}}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n.$

Θεώρημα 1 (2)

v. Αν $\xi^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ είναι τέτοιο ώστε $\xi^T(sI_n - A)^{-1}B = 0$ για κάθε $s \in \mathbb{C}$, τότε $\xi^T = 0$.

Ισοδύναμα, οι n γραμμές του

$$(sI_n - A)^{-1}B \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες για $s \in \mathbb{C}$.

vi. Αν $\xi^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ είναι τέτοιο ώστε $\xi^T e^{At}B = 0$ για $t \in [0, t_1]$ και αυθαίρετο t_1, τότε $\xi^T = 0$. Ισοδύναμα, οι n γραμμές του $e^{At}B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες για κάθε $t \in [0, t_1]$.

Απόδειξη $(i) \Rightarrow (ii)$ **(1)**

Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

i. Το σύστημα (1) ή το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο.

ii. $rank_{\mathbb{R}}[\lambda I_n - A \quad B] = n, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω ότι

$$\exists \lambda_1 \in \mathbb{C}: rank_{\mathbb{R}}[\lambda_1 I_n - A \quad B] < n \Rightarrow$$

$$\exists \xi^T = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \dots \quad \xi_n] \neq 0: \xi^T[\lambda_1 I_n - A \quad B] = 0 \Rightarrow$$

$$\xi^T A = \lambda_1 \xi^T \ \kappa\alpha\iota \ \xi^T B = 0 \quad \textbf{(2)}$$

Από την (2) και την (1)

$$\dot{z}(t) := \xi^T \dot{x}(t) = \xi^T A x(t) + \xi^T B u(t) \underset{(2)}{=} \lambda_1 \xi^T x(t)$$

Απόδειξη $(i) \Rightarrow (ii)$ (2)

$$= \lambda_1 [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 [\xi_1 x_1(t) + \xi_2 x_2(t) + \cdots + \xi_n x_n(t)] := \lambda_1 z(t)$$

$$\dot{z}(t) = \lambda_1 z(t) \Rightarrow z(t) = e^{\lambda_1 t} z(0)$$

$$z(t) = \xi^T x(t) = e^{\lambda_1 t} \xi^T x(0) \; \textbf{(3)}$$

Αν το ξ^T είναι τέτοιο ώστε $\xi^T x(0) \neq 0$, τότε η (3) συνεπάγεται ότι

$$\xi^T x(t) \neq 0, \forall t \geq 0$$

Απόδειξη $(i) \Rightarrow (ii)$ (3)

Επομένως για το $x(t)$ στην (1) ισχύει

$$x(t) \neq 0, \forall u(t)$$

και το ζεύγος (A, B) (από τον ορισμό) δεν είναι ελέγξιμο.

Άρα $(i) \Rightarrow (ii)$.

Απόδειξη $(ii) \Rightarrow (iii)$ (1)

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Έστω ότι υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$

τέτοιος ώστε

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0_{k,n-k} & A_2 \end{bmatrix}, TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix}$$

όπου

$$A_1 \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}, A_{12} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times k}, A_2 \in \mathbb{R}^{k\times k}$$

Έστω λ ιδιοτιμή του A_2^T και ξ_2 το αντίστοιχο αριστερό ιδιοάνυσμα:

$$A_2^T\xi_2 = \lambda\xi_2 \Rightarrow \xi_2^T(\lambda I_k - A_2) = 0_{1,k}$$

Απόδειξη $(ii) \Rightarrow (iii)$ (2)

Είναι

$$\begin{bmatrix} 0_{1,n-k} & \xi_2^T \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} \lambda I_n - A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0_{1,n-k} & \xi_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(\lambda I_n - A)T^{-1} & TB \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0_{1,n-k} & \xi_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A_1 & -A_{12} & B_1 \\ 0_{k,n-k} & \lambda I_n - A_2 & 0_{k,m} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0_{1,n-k} & 0_{1,k} & 0_{1,m} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow rank \begin{bmatrix} \lambda I_n - A_1 & -A_{12} & B_1 \\ 0 & \lambda I_n - A_2 & 0 \end{bmatrix} < n$$

η οποία αντιβαίνει στην (ii). Άρα $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Απόδειξη $(iii) \Rightarrow (iv)$ (1)

Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

iii. Το ζεύγος (A, B) δεν είναι όμοιο με ζεύγος της μορφής $\left(\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0_{k,n-k} & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{k,m} \end{bmatrix}\right)$.

iv. $rank_{\mathbb{R}}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n.$

Απόδειξη.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Έστω ότι

$$rank_{\mathbb{R}}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] < n$$

και για $0 < k < n$ είναι

$$rank_{\mathbb{R}}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n - k$$

Απόδειξη $(iii) \Rightarrow (iv)$ (2)

Τότε υπάρχουν k γραμμικά ανεξάρτητα ανύσματα που ανήκουν (παράγουν) στον αριστερό πυρήνα του πίνακα ελεγξιμότητας, δηλαδή υπάρχουν

$$\xi_i^T \in \mathbb{R}^{1\times n}, \xi_i^T \neq 0, i = 1,2,\dots,k:$$

$$\underbrace{\xi_i^T}_{1\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}}_{n\times m} = 0_{1,nm}$$

Έστω

$$T_2 := \begin{bmatrix} \xi_1^T \\ \xi_2^T \\ \vdots \\ \xi_k^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times n}, rankT_2 = k$$

Απόδειξη $(iii) \Rightarrow (iv)$ (3)

Οι γραμμές $\xi_i^T, i = 1,2, \dots, k$ του T_2 παράγουν τον αριστερό πυρήνα του πίνακα ελεγξιμότητας και θα είναι

$$T_2[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = 0_{k,nm}$$

ή ισοδύναμα

$$T_2A^iB = 0_{n,m}, i = 0,1,2, \dots, n-1 \quad \textbf{(4)}$$

Έστω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A

$$|sI_n - A| = \alpha(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Από το θεώρημα του Cayley–Hamilton έχουμε ότι

$$\alpha(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0_{n,n} \quad \textbf{(5)}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5) από αριστερά με T_2 και

Απόδειξη $(iii) \Rightarrow (iv)$ (4)

από δεξιά με B παίρνουμε την

$$T_2A^nB + a_{n-1}T_2A^{n-1}B + \cdots + a_1T_2AB + a_0T_2B = 0_{k,m} \quad \textbf{(6)}$$

Η (6) λόγω των (4) γράφεται ως

$$T_2A^nB = 0_{k,m}$$

Μπορούμε τώρα εύκολα να δούμε ότι

$$T_2A[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = T_2[AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^nB] = 0_{k,nm}$$

Άρα ο πίνακας T_2A ανήκει στον αριστερό πυρήνα του πίνακα ελεγξιμότητας κι έτσι θα υπάρχει πίνακας $A_2 \in \mathbb{R}^{k\times k}$ τέτοιος ώστε

$$T_2A = A_2T_2 \quad \textbf{(7)}$$

Απόδειξη $(iii) \Rightarrow (iv)$ (5)

Σχηματικά η (7) είναι:

$$\underset{k\times n}{\boxed{T_2}}\;\underset{n\times n}{\boxed{A}} = \underset{k\times k}{\boxed{A_2}}\;\underset{k\times n}{\boxed{T_2}}$$

Απόδειξη $(iii) \Rightarrow (iv)$ (6)

Έστω

$$T_1 \in \mathbb{R}^{(n-k)\times n}\text{: } rankT_1 = n-k$$

έτσι ώστε ο πίνακας

$$T := \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

να έχει $rankT = n$, δηλαδή να είναι ομαλός ($|T| \neq 0$) και έστω ότι $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}, A_{12} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$ πίνακες που να ορίζονται από την σχέση

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \end{bmatrix} := T_1 A \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

έτσι ώστε

Απόδειξη $(iii) \Rightarrow (iv)$ (7)

$$T_1 A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \textbf{(8)}$$

και άρα να έχουμε ότι

$$TA = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} T_1 A \\ T_2 A \end{bmatrix} \underset{(7)}{=} \begin{bmatrix} T_1 A \\ A_2 T_2 \end{bmatrix} \underset{(8)}{=} \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0_{k,n-k} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0_{k,n-k} & A_2 \end{bmatrix} T$$

ή

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0_{k,n-k} & A_2 \end{bmatrix} \textbf{(9)}$$

Επίσης από την (4) είναι

Απόδειξη $(iii) \Rightarrow (iv)$ (8)

$$T_2 B = 0_{k,\mu}$$

έτσι ώστε

$$TB = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} T_1 B \\ T_2 B \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \textbf{ (10)}$$

όπου

$$B_1 := T_1 B \in \mathbb{R}^{(n-k)\times m}$$

Οι (9) και (10) αντιβαίνουν στην (iii). Άρα $(iii) \Rightarrow (iv)$.

Απόδειξη $(iv) \Rightarrow (v)$ (1)

Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

$iv.$ $rank_{\mathbb{R}}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n.$

v. Αν $\xi^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ είναι τέτοιο ώστε $\xi^T(sI_n - A)^{-1}B = 0$ για κάθε $s \in \mathbb{C}$, τότε $\xi^T = 0$. Ισοδύναμα, οι n γραμμές του

$$(sI_n - A)^{-1}B \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες για $s \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Είναι

$$\mathcal{L}^{-1}[(sI_n - A)^{-1}] = e^{At} = I_n + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots \Rightarrow$$

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{s}I_n + \frac{1}{s^2}A + \frac{1}{s^3}A^2 + \cdots$$

Απόδειξη $(iv) \Rightarrow (v)$ (2)

Έστω

$$\xi^T \neq 0: \xi^T (sI_2 - A)^{-1} B = 0, \forall s \in \mathbb{C}$$

τότε

$$\xi^T (sI_n - A)^{-1} B = \left(\xi^T \frac{1}{s} I_n + \xi^T \frac{1}{s^2} A + \xi^T \frac{1}{s^3} A^2 + \cdots \right) B = 0,$$

$$\forall s \in \mathbb{C}$$

η οποία συνεπάγεται ότι για κάθε k

$$\xi^T B = 0$$

$$\xi^T AB = 0$$

$$\vdots$$

$$\xi^T A^k B = 0$$

Απόδειξη $(iv) \Rightarrow (v)$ (3)

ή

$$\xi^T [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = 0 \Rightarrow$$
$$rank_{\mathbb{R}} [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] < n$$

η οποία αντιβαίνει στην (iv). Άρα $(iv) \Rightarrow (v)$.

Απόδειξη $(v) \Rightarrow (\mathrm{vi})$ (1)

Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

v. Αν $\xi^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ είναι τέτοιο ώστε $\xi^T(sI_n - A)^{-1}B = 0$ για κάθε $s \in \mathbb{C}$, τότε $\xi^T = 0$. Ισοδύναμα, οι n γραμμές του
$$(sI_n - A)^{-1}B \in \mathbb{R}[s]^{n\times m}$$
είναι γραμμικά ανεξάρτητες για $s \in \mathbb{C}$.

vi. Αν $\xi^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ είναι τέτοιο ώστε $\xi^T e^{At}B = 0$ για $t \in [0, t_1]$ και αυθαίρετο t_1, τότε $\xi^T = 0$. Ισοδύναμα, οι n γραμμές του $e^{At}B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες για κάθε $t \in [0, t_1]$.

Απόδειξη.

$(v) \Rightarrow (\mathrm{vi})$ Υποθέστε ότι η (vi) δεν ισχύει.

Απόδειξη $(v) \Rightarrow (\mathrm{vi})$ (2)

Υποθέστε δηλαδή ότι υπάρχει

$$\xi^T \in \mathbb{R}^{1\times n}, \xi^T \neq 0 \colon \xi^T e^{At} B = 0, \forall t \in [0, t_1]$$

τότε οι σχέσεις

$$\frac{d^k}{dt^k}(\xi^T e^{At} B) = \xi^T A^k e^{At} B = 0, k = 0,1,2, \ldots$$

Για $t = 0$ συνεπάγονται τις σχέσεις

$$\xi^T A^k B = 0, k = 0,1,2, \ldots$$

οι οποίες λόγω της

$$\xi^T (sI_n - A)^{-1} B = \xi^T \left(\frac{1}{s} I_n + \frac{1}{s^2} A + \frac{1}{s^3} A^2 + \cdots \right) B =$$

Απόδειξη $(v) \Rightarrow (\mathrm{vi})$ (3)

$$= \frac{1}{s}\xi^T B + \frac{1}{s^2}\xi^T AB + \frac{1}{s^3}\xi^T A^2 B + \cdots$$

συνεπάγονται την

$$\xi^T (sI_n - A)^{-1} B = 0, \forall s \in \mathbb{C}$$

η οποία αντιβαίνει στην (v). Άρα $(v) \Rightarrow (\mathrm{vi})$.

Απόδειξη $(vi) \Rightarrow (i)$ (1)

Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

vi. Αν $\xi^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ είναι τέτοιο ώστε $\xi^T e^{At} B = 0$ για $t \in [0, t_1]$ και αυθαίρετο t_1, τότε $\xi^T = 0$. Ισοδύναμα, οι n γραμμές του $e^{At}B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες για κάθε $t \in [0, t_1]$.

i. Το σύστημα (1) ή το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο.

Απόδειξη.

$(vi) \rightarrow (i)$ Έστω ο πίνακας

$$M(t_1) := \int_0^{t_1} e^{-At} B B^T e^{-A^T t} dt \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \textbf{(11)}$$

Απόδειξη $(vi) \Rightarrow (i)$ (2)

Αν η (vi) ισχύει, αν δηλαδή οι γραμμές του $e^{At}B$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες για κάθε $t \in [0, t_1]$, τότε ο $M(t_1)$ είναι ομαλός για κάθε $t_1 > 0$, $(|M(t_1)| \neq 0)$.

Πράγματι, έστω ότι ο $M(t_1)$ δεν είναι ομαλός. Τότε θα υπάρχει

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \neq 0$$

τέτοιο ώστε

$$M(t_1)\xi = 0 \quad \textbf{(12)}$$

Απόδειξη $(vi) \Rightarrow (i)$ (3)

Πολλαπλασιάζοντας την (12) από αριστερά με ξ^T και λαμβάνοντας υπόψη την (11) παίρνουμε την

$$\xi^T M(t_1)\xi = \xi^T \left[\int_0^{t_1} e^{-At} B B^T e^{-A^T t} dt\right] \xi$$

$$= \int_0^{t_1} \underbrace{[\xi^T e^{-At} B]}_{1\times m} \underbrace{\left[B^T e^{-A^T t} \xi\right]}_{m\times 1} dt$$

$$= \int_0^{t_1} \underbrace{[x^T]}_{1\times m} \underbrace{[x]}_{m\times 1} dt$$

$$= \int_0^{t_1} \|x^T\|^2 dt$$

Απόδειξη $(vi) \Rightarrow (i)$ (4)

$$= \int_0^{t_1} \|\xi^T e^{-At} B\|^2 dt \quad \textbf{(13)}$$

$$\Rightarrow \xi^T M(t_1)\xi = \int_0^{t_1} \|\xi^T e^{-At} B\|^2 dt = 0$$

Σημείωση για την (13)

Αν

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Απόδειξη $(vi) \Rightarrow (i)$ (5)

$$x^T x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

και η **Ευκλείδεια νόρμα** του x είναι

$$\|x\| = \|x^T\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{x^T x}$$

άρα

$$x^T x = \|x\|^2 = \|x^T\|^2$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η

Απόδειξη $(vi) \Rightarrow (i)$ **(6)**

$$\xi^T M(t_1)\xi = \int_0^{t_1} \|\xi^T e^{-At} B\|^2 dt = 0$$

συνεπάγεται ότι

$$\xi^T e^{-At} B = 0 \; \gamma\iota\alpha \; t \in [0, t_1] \quad \textbf{(14)}$$

και εφόσον ο πίνακας $e^{-At}B$ έχει γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές για $t \in [0, t_1]$, η (14) συνεπάγεται την

$$\xi^T = 0 \quad \textbf{(15)}$$

Αλλά η (15) αντιβαίνει στην υπόθεση ότι $\xi^T \neq 0$.

Άρα αν η (vi) ισχύει, τότε ο πίνακας

$$M(t_1) := \int_0^{t_1} e^{-At} B B^T e^{-A^T t} dt \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Απόδειξη $(vi) \Rightarrow (i)$ (7)

είναι ομαλός για κάθε $t_1 > 0$.

Έστω τώρα ότι επιλέγουμε είσοδο την

$$u(t) := -B^T e^{-A^T t} M(t_1)^{-1} x(0) \quad \textbf{(16)}$$

Η είσοδος $u\ (t)$ στην (16) «φέρνει» την κατάσταση $x(t)$ από το $x(0) \neq 0$ στο $x(t_1) = 0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ σε χρόνο $t = t_1$.

Πράγματι

$$x(t_1) = e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)} Bu(t)dt =$$

$$= e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)} B\left(-B^T e^{-A^T t} M(t_1)^{-1} x(0)\right) dt =$$

Απόδειξη $(vi) \Rightarrow (i)$ (8)

$$= e^{At_1}x(0) - e^{At_1}\left(\int_0^{t_1} e^{-At}BB^T e^{-A^T t}dt\right)M(t_1)^{-1}x(0)$$
$$= e^{At_1}[x(0) - M(t_1)M(t_1)^{-1}x(0)] = e^{At_1}[x(0) - x(0)]$$
$$= 0$$

άρα $(vi) \Rightarrow (i)$.

Ποια είναι η είσοδος που θα μεταφέρει σε ένα ελέγξιμο σύστημα μια τυχαία κατάσταση $\boldsymbol{x(0)}$ στο 0;

Minimum energy control (1)

$$u(t) := -B^T e^{-A^T t} M(t_1)^{-1} x(0)$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και δεύτερη είσοδος $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})$ που οδηγεί το σύστημα στο 0

$$x(t_1) = 0 = e^{At_1} x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1 - t)} B v(t) dt$$

$$x(t_1) = 0 = e^{At_1} x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1 - t)} B u(t) dt$$

Τότε

$$0 = \int_0^{t_1} e^{A(t_1 - t)} B \underbrace{\left(v(t) - u(t)\right)}_{w(t)} dt =$$

Minimum energy control (2)

$$= e^{At_1} \int_0^{t_1} e^{-At} B \underbrace{\left(v(t) - u(t)\right)}_{w(t)} dt$$

Η ενέργεια που οφείλεται στην νέα είσοδο $\boldsymbol{v(t)}$ θα είναι

$$\int_0^{t_1} \|v(t)\|^2 dt = \int_0^{t_1} \|u(t) + w(t)\|^2 dt =$$

$$= \int_0^{t_1} \left\| \underbrace{-B^T e^{-A^T t} M(t_1)^{-1} x(0)}_{u(t)} + w(t) \right\|^2 dt$$

$$= \int_0^{t_1} \left(-B^T e^{-A^T t} M(t_1)^{-1} x(0) + w(t)\right)^T \left(-B^T e^{-A^T t} M(t_1)^{-1} x(0) + w(t)\right) dt$$

Minimum energy control (3)

$$= x(0)^T M(t_1)^{-1} \underbrace{\int_0^{t_1} \left(e^{-At} B B^T e^{-A^T t}\right) dt}_{M(t_1)} M(t_1)^{-1} x(0)$$

$$+ \int_0^{t_1} \|w(t)\|^2 dt$$

$$- 2x(0)^T M(t_1)^{-1} \underbrace{\int_0^{t_1} \left(-e^{-At} B w(t)\right) dt}_{0}$$

$$= x(0)^T M(t_1)^{-1} x(0) + \int_0^{t_1} \|w(t)\|^2 dt$$

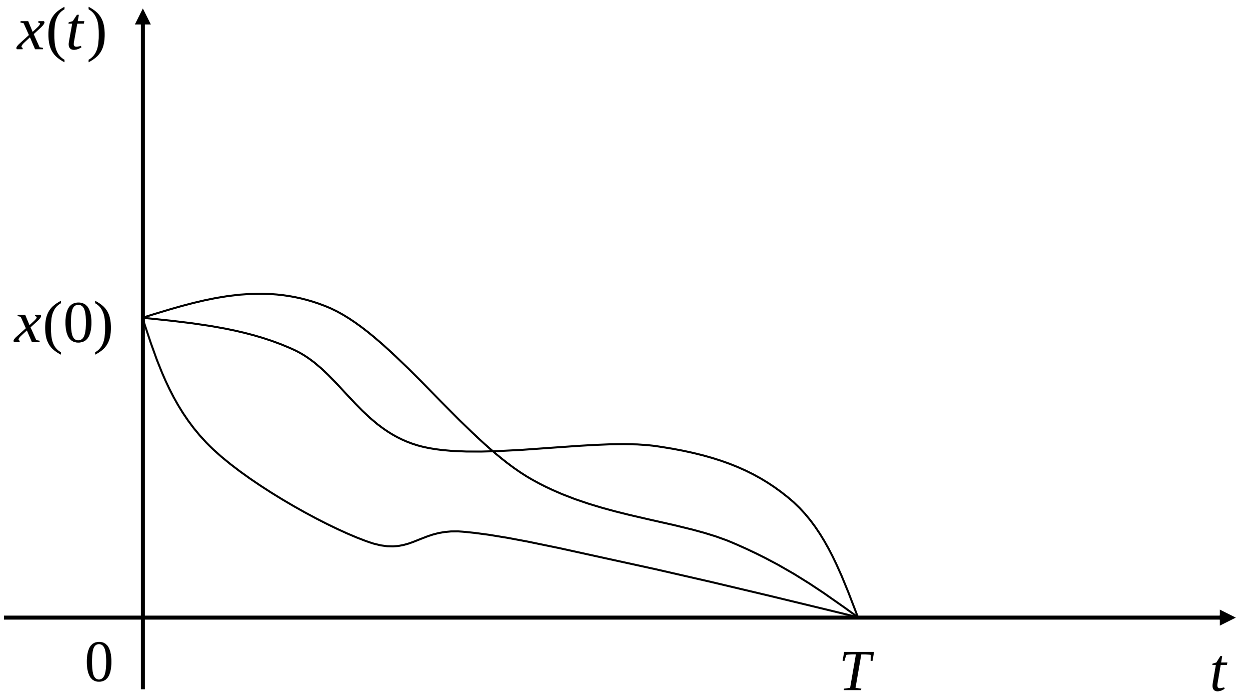
Minimum energy control (4)

Για να έχουμε ελάχιστη ενέργεια θα πρέπει $\boldsymbol{w(t) = 0}$ ή $\boldsymbol{v(t) - u(t) = 0}$ δηλ. $\boldsymbol{v(t) = u(t)}$.

Παρατήρηση

Η ελεγξιμότητα εξασφαλίζει την ύπαρξη της εισόδου $u\ (t)$, η οποία πραγματοποιεί τη «μετάβαση» από μία αυθαίρετη αρχική κατάσταση $x(0) \neq 0$ στη μηδενική κατάσταση $x(T) = 0$ σε αυθαίρετο χρόνο $T > 0$. Δεν περιγράφει την «τροχιά» $x(t)$.

Minimum energy control (5)



Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012*, Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Εκδόσεις Τζιόλα.*
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, *Εκδόσεις Τζιόλα*.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 10. Ελεγξιμότητα (μέρος 1ο)». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης