ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 13. Κανονικές μορφές

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Κανονική μορφή ελεγξιμότητας.
- Αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό ομοιότητας.
- Ελέγξιμη μορφή.
- Δείκτες ελεγξιμότητας.
- Από ελέγξιμη μορφή σε διαγώνιο μορφή.
- Ελέγξιμη πραγμάτωση κανονικής ρητής συνάρτησης.

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη της κανονικής μορφής ελεγξιμότητας ενός συστήματος.
- Μελέτη της ελέγξιμης μορφής συστήματος με πολλές εισόδους.
- Μελέτη της ελέγξιμης πραγμάτωσης κανονικής ρητής συνάρτησης.

Κανονική μορφή ελεγξιμότητας (1)

- **(Συστήματα μίας εισόδου και μίας εξόδου)**

Έστω το σύστημα της μορφής του χώρου των καταστάσεων

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \textbf{(1)}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

Κανονική μορφή ελεγξιμότητας (2)

Θεώρημα. Το σύστημα (1) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας

$$\bar{x}(t) = T^{-1}x(t) \Rightarrow x(t) = T\bar{x}(t),$$

τέτοιος ώστε οι πίνακες $\tilde{A} = T^{-1}AT, \tilde{B} = T^{-1}B$, οι οποίοι περιγράφουν το σύστημα με άνυσμα κατάστασης το $\tilde{x}(t)$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t)$$

να έχουν τη μορφή

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad \textbf{(2)}$$

Κανονική μορφή ελεγξιμότητας (3)

όπου $a_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2, \ldots, n-1$ είναι οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A:

$$\det(sI_n - A) = d(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Ορισμός. Λέμε ότι οι πίνακες της μορφής (2) βρίσκονται στην **κανονική μορφή ελεγξιμότητας.**

Αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό ομοιότητας (1)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\downarrow \quad \boldsymbol{x(t) = T\bar{x}(t)}$$

$$T\dot{\bar{x}}(t) = AT\bar{x}(t) + Bu(t)$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = \underbrace{T^{-1}AT}_{\tilde{A}}\,\bar{x}(t) + \underbrace{T^{-1}B}_{\tilde{B}}\,u(t)$$

$$\boxed{\begin{gathered}[sI_n - \tilde{A} \quad \tilde{B}] = \\ = [sT^{-1}T - T^{-1}AT \quad T^{-1}B] = \\ = T^{-1}[sI_n - A \quad B]\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\end{gathered}}$$

Αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό ομοιότητας (2)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\downarrow \quad \boldsymbol{x(t) = T\bar{x}(t)}$$

$$T\dot{\bar{x}}(t) = AT\bar{x}(t) + Bu(t)$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = \underbrace{T^{-1}AT}_{\tilde{A}}\,\bar{x}(t) + \underbrace{T^{-1}B}_{\tilde{B}}\,u(t)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{C}} &= [\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \dots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}] \\
&= [T^{-1}B \quad (T^{-1}AT)(T^{-1}B) \quad \dots \quad (T^{-1}AT)^{n-1}(T^{-1}B)] \\
&= [T^{-1}B \quad T^{-1}AB \quad \dots \quad T^{-1}A^{n-1}B] \\
&= T^{-1}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = T^{-1}\mathcal{C}
\end{aligned}$$

Αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό ομοιότητας (3)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\downarrow \quad x(t) = T\bar{x}(t) \qquad\qquad \boldsymbol{B \in \mathbb{R}^{m\times 1}}$$

$$T\dot{\bar{x}}(t) = AT\bar{x}(t) + Bu(t)$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = \underbrace{T^{-1}AT}_{\tilde{A}}\,\bar{x}(t) + \underbrace{T^{-1}B}_{\tilde{B}}\,u(t)$$

$$\boxed{\tilde{\mathcal{C}} = T^{-1}\mathcal{C} \Rightarrow T\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \Rightarrow T = \mathcal{C} \times \tilde{\mathcal{C}}^{-1}}$$

Κανονική μορφή ελεγξιμότητας

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό ομοιότητας (4)

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^2\tilde{B} = \tilde{A}\left(\tilde{A}\tilde{B}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_2 \\ -a_1 + a_2^2 \end{bmatrix}$$

Αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό ομοιότητας (5)

$$\tilde{C} = [\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \tilde{A}^2\tilde{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 & -a_1 + a_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = C \times \tilde{C}^{-1} = [B \quad AB \quad A^2B] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Κανονική μορφή ελεγξιμότητας (4)

Απόδειξη. (άλλος τρόπος)

(⇒) (δηλαδή αν το σύστημα (1) είναι ελέγξιμο, τότε υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας

$$\bar{x}(t) = T^{-1}x(t) \Rightarrow x(t) = T\bar{x}(t),$$

τέτοιος ώστε οι πίνακες $\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{B} = T^{-1}B$, να έχουν τη μορφή (2))

Για απλούστευση του συμβολισμού της απόδειξης, έστω $n = 3$ έτσι ώστε $A \in \mathbb{R}^{3\times3}, B \in \mathbb{R}^{3\times1}$.

$$\det(sI_3 - A) = d(s) = s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

Από το θεώρημα Cayley – Hamilton έχουμε

Κανονική μορφή ελεγξιμότητας (5)

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0_{n,n} \Rightarrow$$

$$A^3 + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I_n = 0_{3,3} \Rightarrow$$

$$A^3 = -a_2 A^2 - a_1 A - a_0 I_n \Rightarrow$$

$$A^3 B = -a_2 A^2 B - a_1 AB - a_0 B$$

Έστω ότι επιλέγουμε τον πίνακα T στο μετασχηματισμό ομοιότητας σύμφωνα με την σχέση

$$T \coloneqq [B \quad AB \quad A^2B] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = PS$$

Από την υπόθεση ισχύει $rank[B \quad AB \quad A^2B] = 3$ και λόγω της μορφής του

Κανονική μορφή ελεγξιμότητας (6)

$$S = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$rankS = 3$, άρα $rankT = 3$ και

$$AT = A\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Κανονική μορφή ελεγξιμότητας (7)

$$= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} = PS\tilde{A} = T\tilde{A} \Rightarrow$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT$$

Επίσης

$$T\tilde{B} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = B$$

$$\Rightarrow$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B$$

Άσκηση 1

Άσκηση. Αποδείξτε το αντίστροφο. Αποδείξτε δηλαδή ότι η κανονική μορφή (2) είναι πάντα ελέγξιμη.

Ελέγξιμη μορφή (Πολλές είσοδοι) (controllable companion form) (1)

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}$$

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ x & x & x & \dots & x & x \end{bmatrix}, A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & x & x & \dots & x & x \end{bmatrix}, i \neq j$$

Ελέγξιμη μορφή (Πολλές είσοδοι) (controllable companion form) (2)

$$B_i = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}_{i-1} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & x & \dots & x \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Ελέγξιμη μορφή (Πολλές είσοδοι) (controllable companion form) (3)

Έστω ότι ο πίνακας B είναι της μορφής:

$$B = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m]$$

όπου $b_1, b_2, \dots, b_m$ είναι οι στήλες του πίνακα B.

Αλγόριθμος. α) Θεωρείστε τον πίνακα:

$$L = [b_1 \quad Ab_1 \dots \quad A^{d_1-1}b_1 \quad b_2 \quad Ab_2 \dots \quad A^{d_2-1}b_2 \quad \dots \quad b_m \quad Ab_m \dots \quad A^{d_m-1}b_m]$$

έτσι ώστε οι στήλες $b_i, Ab_i \dots \quad A^{d_i-1}b_i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες καθώς και γραμμικά ανεξάρτητες των $b_j, Ab_j, \dots, A^{d_j-1}b_j$ για $j = 1, \dots, i-1$ ενώ η $A^{d_i}b_i$ είναι γραμμικά εξαρτημένη των $b_j, Ab_j, \dots, A^{d_j-1}b_j$ για $j = 1, \dots, i$.

Παράδειγμα 1 (1)

Παράδειγμα. Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Να βρεθεί ένας πίνακας T τέτοιος ώστε αν εφαρμόσω τον μετασχηματισμό:

$$x(t) = Tz(t)$$

το καινούργιο σύστημα να είναι στην ελέγξιμη μορφή.

Παράδειγμα 1 (2)

- $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
- $A^2B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
- $A^3B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα 1 (3)

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$rank\mathcal{C} = 3$ Ελέγξιμο

α)Έχουμε ότι

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, Ab_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A^2 b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A^3 b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι τα 3 πρώτα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ενώ

Παράδειγμα 1 (4)

$A^3 b_1 = b_1 + A^2 b_1$.

Άρα $d_1 = 3$.

Έχουμε επίσης ότι:

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Ab_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A^2 b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A^3 b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα $Ab_2 = b_1, A^2 b_2 = Ab_1$ και $A^3 b_2 = A^2 b_1$.

Άρα το μόνο που είναι γραμμικά ανεξάρτητο των b_1, Ab_1 και $A^2 b_1$ είναι το b_2.

Άρα $d_2 = 1$ και

Παράδειγμα 1 (5)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Σημείωση. Οι δείκτες $d_1, d_2, \dots, d_m$ ονομάζονται **δείκτες ελεγξιμότητας** (controllability indices) του συστήματος.

$$d_1 = 3 \; και \; d_2 = 1.$$

β)Υπολογίζω τον L^{-1}. Έστω

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \leftarrow q_1 \rightarrow \\ \leftarrow q_2 \rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow q_n \rightarrow \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1 (6)

$$L^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\-1&1&0&1\\1&0&0&-1\\-1&0&1&1\end{bmatrix}$$

γ) Έστω:

$$\sigma_k=\sum_{i=1}^{k}d_i$$

και

$$q_k = \text{η } \sigma_{\mathrm{k}} \text{ γραμμή του } \mathrm{L}^{-1}, k=1,\dots,m.$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα:

Παράδειγμα 1 (7)

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_m \end{bmatrix} \text{ όπου } Q_i = \begin{bmatrix} q_i \\ q_i A \\ \vdots \\ q_i A^{d_i - 1} \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι

$$\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 3 + 1 = 4$$

και

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \; \kappa\alpha\iota \; q_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι:

Παράδειγμα 1 (8)

- $q_1 A = [1 \quad 0 \quad 0 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$
- $q_1 A^2 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

Σχηματίζουμε τον πίνακα Q ως εξής

Παράδειγμα 1 (9)

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1 A \\ q_1 A^2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

δ) Ο πίνακας T είναι ο εξής

$$T = Q^{-1}$$

$$T = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1 (10)

$$\tilde{A} = QAQ^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\tilde{B} = QB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

Δείκτες ελεγξιμότητας (controllability indices)

Σημείωση. Οι δείκτες $d_1, d_2, \dots, d_m$ ονομάζονται **δείκτες ελεγξιμότητας** (controllability indices) του συστήματος.

Jordan κανονική μορφή

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{bmatrix} \text{ όπου } J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix},$$

$$i = 1,2,..,k.$$

λ_i είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

Από ελέγξιμη μορφή σε διαγώνιο μορφή (1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

$$\downarrow \quad \boldsymbol{x(t) = T\tilde{x}(t)}$$

$$T\dot{\bar{x}}(t) = AT\bar{x}(t) + Bu(t)$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = \underbrace{T^{-1}AT}_{\tilde{A}}\,\bar{x}(t) + \underbrace{T^{-1}B}_{\tilde{B}}\,u(t)$$

$$\boxed{\tilde{\mathcal{C}} = T^{-1}\mathcal{C} \Rightarrow T\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \Rightarrow T = \mathcal{C} \times \tilde{\mathcal{C}}^{-1}}$$

Από ελέγξιμη μορφή σε διαγώνιο μορφή (2)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$T\tilde{A} = AT \Leftrightarrow$$

Από ελέγξιμη μορφή σε διαγώνιο μορφή (3)

$$\begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & \dots & T_{1,n} \\ T_{2,1} & T_{2,2} & \dots & T_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{n,1} & T_{n,2} & \dots & T_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & \dots & T_{1,n} \\ T_{2,1} & T_{2,2} & \dots & T_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{n,1} & T_{n,2} & \dots & T_{n,n} \end{bmatrix}$$

Από ελέγξιμη μορφή σε διαγώνιο μορφή (4)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 T_{1,1} = T_{2,1} \\ \lambda_1 T_{2,1} = T_{3,1} \\ \\ \lambda_1 T_{n-1,1} = T_{n,1} \\ \lambda_1 T_{n,1} = -a_0 T_{1,1} - a_1 T_{2,1} - \cdots - a_{n-1} T_{n-1,1} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \lambda_2 T_{1,2} = T_{2,2} \\ \lambda_2 T_{2,2} = T_{3,2} \\ \\ \lambda_2 T_{n-1,2} = T_{n,2} \\ \lambda_2 T_{n,2} = -a_0 T_{1,2} - a_1 T_{2,2} - \cdots - a_{n-1} T_{n-1,2} \end{cases}, \ \ldots$$

Από ελέγξιμη μορφή σε διαγώνιο μορφή (5)

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} T_{2,1} = \lambda_1 T_{1,1} \\ T_{3,1} = \lambda_1 T_{2,1} = \lambda_1^2 T_{1,1} \\ \vdots \\ T_{n,1} = \lambda_1 T_{n-1,1} = \lambda_1^2 T_{n-2,1} = \cdots = \lambda_1^{n-1} T_{1,1} \\ \lambda_1^n T_{1,1} = -a_0 T_{1,1} - a_1 \lambda_1 T_{1,1} - \cdots - a_{n-1} \lambda_1^{n-1} T_{1,1} \end{array}\right. ,$$

$$\left\{\begin{array}{c} T_{2,2} = \lambda_2 T_{1,2} \\ T_{3,2} = \lambda_2 T_{2,2} = \lambda_2^2 T_{1,2} \\ \vdots \\ T_{n,2} = \lambda_2 T_{n-1,2} = \lambda_2^2 T_{n-2,2} = \cdots = \lambda_2^{n-1} T_{1,2} \\ \lambda_2^n T_{1,2} = -a_0 T_{1,2} - a_1 \lambda_2 T_{1,2} - \cdots - a_{n-1} \lambda_2^{n-1} T_{1,2} \end{array}\right. , \ldots$$

Από ελέγξιμη μορφή σε διαγώνιο μορφή (6)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-2} & \dots & \lambda_n^{n-2} \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι n **διαφορετικές** ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του συστήματος:

$$a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

Ελέγξιμη πραγμάτωση κανονικής ρητής συνάρτησης (1)

Έστω η κανονική ρητή συνάρτηση

$$G(s)=\frac{c(s)}{d(s)}+D=\frac{c_q s^q+c_{q-1}s^{q-1}+\cdots+c_1 s+c_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}+D,$$
$$q\le n-1$$

Πρόταση. Η τετράδα πινάκων

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n},\bar{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times 1},$$

$$\bar{C}=[c_0 \quad c_1 \quad \dots \quad c_q \quad 0 \quad \dots \quad 0]\in\mathbb{R}^{1\times n}, D\in\mathbb{R} \qquad \textbf{(3)}$$

Ελέγξιμη πραγμάτωση κανονικής ρητής συνάρτησης (2)

αποτελεί μία ελέγξιμη πραγμάτωση της $G(s)$, η οποία είναι παρατηρήσιμη αν και μόνο αν τα πολυώνυμα $d(s)$ και $c(s)$ είναι πρώτα μεταξύ τους (δηλαδή δεν έχουν κοινές ρίζες).

Απόδειξη. Θεωρήστε τον χαρακτηριστικό πίνακα του $\bar{A}$:

- $$sI_n - \bar{A} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & s + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

και έστω ότι $S(s)$ είναι το πολυωνυμικό άνυσμα

Ελέγξιμη πραγμάτωση κανονικής ρητής συνάρτησης (3)

$$S(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix}$$

Λόγω της κανονικής μορφής του πίνακα $\bar{A}$ στην (3), έχουμε την ταυτότητα

$$(sI_n - \bar{A})S(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} d(s) = \bar{B}d(s) \Rightarrow$$

$$(sI_n - \bar{A})^{-1}\bar{B} = \frac{1}{d(s)}S(s)$$

Ελέγξιμη πραγμάτωση κανονικής ρητής συνάρτησης (4)

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω επί $\bar{C}$, παίρνουμε

$$\bar{C}(sI_n - \bar{A})^{-1}\bar{B} = \frac{1}{d(s)}\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_q & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^q \\ s^{q+1} \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{c(s)}{d(s)}$$

και άρα οι πίνακες στην (3) αποτελούν πραγμάτωση, η οποία είναι ελέγξιμη σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα.

Ελέγξιμη πραγμάτωση κανονικής ρητής συνάρτησης (5)

Προφανώς αν λ_i είναι ιδιοτιμή του $\bar{A}$, από την ταυτότητα

$$(sI_n - \bar{A})S(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} d(s)$$

για $s = \lambda_i$ έχουμε

$$(\lambda_i I_n - \bar{A})S(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & \lambda_i + a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-2} \\ \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix} =$$

Ελέγξιμη πραγμάτωση κανονικής ρητής συνάρτησης (6)

$$(\lambda_i I_n - \bar{A})S(\lambda_i)$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_i & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & \lambda_i + a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-2} \\ \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d(\lambda_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ελέγξιμη πραγμάτωση κανονικής ρητής συνάρτησης (7)

η οποία γράφεται

$$(\lambda_i I_n - \bar{A})S(\lambda_i) = 0$$

ή

$$\bar{A}S(\lambda_i) = \lambda_i S(\lambda_i)$$

και άρα το

$$u_i = S(\lambda_i) = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-2} \\ \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

είναι το ιδιοάνυσμα του πίνακα $\bar{A}$, το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i.

Ελέγξιμη πραγμάτωση κανονικής ρητής συνάρτησης (8)

Η πραγμάτωση (3) είναι παρατηρήσιμη αν και μόνο αν

$$rank\begin{bmatrix}\lambda_i I_n - \bar{A}\\ \bar{C}\end{bmatrix} = n, \forall \lambda_i \in sp\{\bar{A}\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

Ισοδύναμα, η πραγμάτωση (3) είναι παρατηρήσιμη αν και μόνο αν

$$\begin{bmatrix}\lambda_i I_n - \bar{A}\\ \bar{C}\end{bmatrix} S(\lambda_i) = \begin{bmatrix}\lambda_i I_n - \bar{A}\\ \bar{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \lambda_i\\ \lambda_i^2\\ \vdots\\ \lambda_i^{n-2}\\ \lambda_i^{n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ d(\lambda_i)\\ c(\lambda_i)\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$d(s), c(s)$ δεν έχουν κοινές ρίζες, δηλαδή είναι πρώτα μεταξύ τους.

Άσκηση 2

Διατυπώστε και αποδείξτε τα αντίστοιχα με τα παραπάνω για μία **κανονική μορφή παρατηρησιμότητας**.

- $\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \hat{B} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_q \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1},$
- $\hat{C} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \in \mathbb{R}^{1\times n}, \widehat{D} \in \mathbb{R}$

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012, *Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Εκδόσεις Τζιόλα.*
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, *Εκδόσεις Τζιόλα*.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης