ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 14. Ελάχιστες Πραγματώσεις

Νίκος Καραμπετάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Πραγματώσεις.
- Μη αναγώγιμο σύστημα.
- Ελάχιστη πραγμάτωση.
- Θεώρημα (Kalman).

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη των εννοιών του μη αναγώγιμου συστήματος και της ελάχιστης πραγμάτωσης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

Πραγματώσεις

Ορισμός. Δεδομένου ενός $p \times m$ πίνακα $G(s)$ κανονικών ρητών συναρτήσεων $g_{ij}(s)$:

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1m}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdots & g_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1}(s) & g_{p2}(s) & \cdots & g_{pm}(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$$

$$g_{ij}(s) = \frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)} \mathbb{R}_{pr}(s) \Leftrightarrow deg d_{ij}(s) \geq deg n_{ij}(s)$$

τότε μία τετράδα πινάκων $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ονομάζεται **πραγμάτωση** του $G(s)$ αν

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$$

Ελάχιστη (minimal) πραγμάτωση

Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

Ορισμός. Αν το σύστημα (1) είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο, τότε ονομάζεται **μη αναγώγιμο** (**irreducible**). Στην περίπτωση αυτή η τριάδα πινάκων

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$$

ονομάζεται **ελάχιστη** (**minimal**) **πραγμάτωση** της συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$ του συστήματος.

Πρόταση (1)

Πρόταση. Αν το σύστημα (1) είναι μη αναγώγιμο, τότε οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς ταυτίζονται με τους πόλους του συστήματος (ιδιοτιμές του πίνακα A).

Έχουμε δει ότι η συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$$

ενός συστήματος (1) παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς ομοιότητας.

Δηλαδή αν ορίσουμε την τετράδα πινάκων

Πρόταση (2)

$$\begin{cases} \tilde{A} \coloneqq QAQ^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ \tilde{B} \coloneqq QB \in \mathbb{R}^{n\times m} \\ \tilde{C} \coloneqq CQ^{-1} \in \mathbb{R}^{p\times n} \\ \widetilde{D} \coloneqq D \in \mathbb{R}^{p\times m} \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

όπου $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **αυθαίρετος** και **ομαλός** πίνακας ($|Q| \neq 0$), τότε

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s) &= \tilde{C}\left(sI_n - \tilde{A}\right)^{-1}\tilde{B} + \widetilde{D} \\ &= CQ^{-1}(sQQ^{-1} - QAQ^{-1})^{-1}QB + D = \\ &= CQ^{-1}(Q(sI_n - A)Q^{-1})^{-1}QB + D \\ &= CQ^{-1}Q(sI_n - A)^{-1}Q^{-1}QB + D \end{aligned}$$

Πρόταση (3)

$$= C(sI_n - A)^{-1}B + D = G(s)$$

Δηλαδή αν

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

είναι μία πραγμάτωση του πίνακα κανονικών ρητών συναρτήσεων $G(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times m}$, τότε όλα τα μέλη της κλάσης ισοδυναμίας ομοιότητας που δίνονται από τετράδες πινάκων (2) αποτελούν πραγματώσεις του $G(s)$.

Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης και είναι ένα από τα πλέον βασικά θεωρήματα της Μαθηματικής Θεωρίας Συστημάτων.

Θεώρημα 1 (1)

Θεώρημα. Αν δύο πραγματώσεις

$$A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, B_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}, C_1 \in \mathbb{R}^{p\times n}, D_1 \in \mathbb{R}^{p\times m} \quad \textbf{(3)}$$

$$A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, B_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}, C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n}, D_2 \in \mathbb{R}^{p\times m} \quad \textbf{(4)}$$

ενός πίνακα πραγματικών (κανονικών) ρητών συναρτήσεων $G(s)$:

$$G(s) = C_1(sI_n - A_1)^{-1}B_1 + D_1 = C_2(sI_n - A_2)^{-1}B_2 + D_2 \quad \textbf{(5)}$$

είναι ελάχιστες, δηλαδή μη αναγώγιμες (ελέγξιμες και παρατηρήσιμες), τότε είναι όμοιες, υπάρχει δηλαδή

Θεώρημα 1 (2)

πίνακας $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ομαλός τέτοιος ώστε οι δύο πραγματώσεις να συνδέονται μέσω των

$$\begin{cases} A_1 \coloneqq Q_1^{-1}A_2Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ B_1 \coloneqq Q_1^{-1}B_2 \in \mathbb{R}^{n\times m} \\ C_1 \coloneqq C_2Q_1 \in \mathbb{R}^{p\times n} \\ D_1 \coloneqq D_2 \in \mathbb{R}^{p\times m} \end{cases}$$

Απόδειξη. Έστω

$$M_i = [B_i \quad A_iB_i \quad \dots \quad A_i^{n-1}B_i], \qquad W_i = \begin{bmatrix} C_i \\ C_iA_i \\ \vdots \\ C_iA_i^{n-1} \end{bmatrix}, i = 1,2$$

Θεώρημα 1 (3)

Από την (5), εφόσον για $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ο πίνακας $(sI_n - A_1)^{-1}$ αναπτύσσεται σε σειρά Laurent ως

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{s}I_n + \frac{1}{s^2}A + \frac{1}{s^3}A^2 + \cdots$$

έχουμε ότι ο πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς αναπτύσσεται σε σειρά Laurent ως

$$\begin{aligned} G(s) &= C_1(sI_n - A_1)^{-1}B_1 + D_1 \\ &= D_1 + \frac{1}{s}C_1B_1 + \frac{1}{s^2}C_1A_1B_1 + \frac{1}{s^3}C_1A_1^2B_1 + \cdots \\ &= C_2(sI_n - A_2)^{-1}B_2 + D_2 \\ &= D_2 + \frac{1}{s}C_2B_2 + \frac{1}{s^2}C_2A_2B_2 + \frac{1}{s^3}C_2A_2^2B_2 + \cdots \end{aligned}$$

Θεώρημα 1 (4)

Η (5) συνεπάγεται τις

$$D_1 = D_2$$
$$C_1 A_1^k B_1 = C_2 A_2^k B_2, k = 0,1,2,3,\ldots$$

Οι (6) συνεπάγονται την

$$\begin{bmatrix} C_1 B_1 & C_1 A_1 B_1 & \ldots & C_1 A_1^{n-1} B_1 \\ C_1 A_1 B_1 & C_1 A_1^2 B_1 & \ldots & C_1 A_1^n B_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1 A_1^{n-1} B_1 & C_1 A_1^n B_1 & \ldots & C_1 A_1^{2n-2} B_1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} C_2 B_2 & C_2 A_2 B_2 & \ldots & C_2 A_2^{n-1} B_2 \\ C_2 A_2 B_2 & C_2 A_2^2 B_2 & \ldots & C_2 A_2^n B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_2 A_2^{n-1} B_2 & C_2 A_2^n B_2 & \ldots & C_2 A_2^{2n-2} B_2 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα 1 (5)

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \dots & A_1^{n-1} B_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A_2 \\ \vdots \\ C_2 A_2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 & A_2 B_2 & \dots & A_2^{n-1} B_2 \end{bmatrix}$$

ή

$$\boxed{W_1 M_1 = W_2 M_2} \quad \textbf{(7)}$$

Εφόσον οι πραγματώσεις είναι μη αναγώγιμες, οι σχέσεις

Θεώρημα 1 (6)

$$rankM_i = rank[B_i \quad A_iB_i \quad \dots \quad A_i^{n-1}B_i] = n, i = 1,2$$

$$rankW_i = rank\begin{bmatrix} C_i \\ C_iA_i \\ \vdots \\ C_iA_i^{n-1} \end{bmatrix} = n, i = 1,2$$

συνεπάγονται τις

$$rank(M_1M_1^T) = n$$
$$rank(W_1^TW_1) = n$$

Ορίζουμε τους πίνακες:

$$Q_1 := M_2M_1^T(M_1M_1^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Θεώρημα 1 (7)

και

$$Q_2 \coloneqq (W_1^T W_1)^{-1} W_1^T W_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

και έχουμε ότι

$$Q_2 Q_1 = (W_1^T W_1)^{-1} W_1^T \boldsymbol{W_2 M_2} M_1^T (M_1 M_1^T)^{-1}$$
$$\underset{(7)}{=} (W_1^T W_1)^{-1} W_1^T \boldsymbol{W_1 M_1} M_1^T (M_1 M_1^T)^{-1} = I_n \Rightarrow$$

$$Q_2 = Q_1^{-1} \quad \textbf{(8)}$$

Επιπλέον

$$Q_2 M_2 = (W_1^T W_1)^{-1} W_1^T \boldsymbol{W_2 M_2} = (W_1^T W_1)^{-1} W_1^T \boldsymbol{W_1 M_1} = M_1$$

Θεώρημα 1 (8)

ή

$$Q_2 M_2 = M_1 \quad \textbf{(9)}$$

$$\overset{(8)}{\Rightarrow} M_2 = Q_1 M_1 \quad \textbf{(10)}$$

Η (9) γράφεται

$$Q_2[B_2 \quad A_2B_2 \quad \dots \quad A_2^{n-1}B_2] = [B_1 \quad A_1B_1 \quad \dots \quad A_1^{n-1}B_1]$$

από την οποία έχουμε ότι

$$Q_2B_2 = B_1 \Rightarrow B_1 = Q_1^{-1}B_2 \in \mathbb{R}^{n\times m} \quad \textbf{(11)}$$

Επίσης έχουμε ότι

$$W_2Q_1 = \boldsymbol{W_2 M_2} M_1^T(M_1M_1^T)^{-1} = \boldsymbol{W_1 M_1} M_1^T(M_1M_1^T)^{-1} = W_1$$

Θεώρημα 1 (9)

ή

$$W_2 Q_1 = W_1 \qquad \textbf{(12)}$$

$$\overset{(8)}{\Rightarrow} W_2 Q_2^{-1} = W_1 \ \textbf{(13)}$$

Ομοίως, μέσω της (13), μπορούμε να δείξουμε ότι

$$C_2 Q_2^{-1} = C_1 \Rightarrow C_1 = C_2 Q_1 \in \mathbb{R}^{p \times n} \ \textbf{(14)}$$

Τέλος, οι σχέσεις

$$C_1 A_1^k B_1 = C_2 A_2^k B_2, k = 0,1,2,3, \ldots$$

συνεπάγονται την σχέση

Θεώρημα 1 (10)

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{n-1} \end{bmatrix} A_1 \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \dots & A_1^{n-1} B_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A_2 \\ \vdots \\ C_2 A_2^{n-1} \end{bmatrix} A_2 \begin{bmatrix} B_2 & A_2 B_2 & \dots & A_2^{n-1} B_2 \end{bmatrix}$$

$$W_1 A_1 M_1 = W_2 A_2 M_2 \underset{(12),(10)}{=} W_1 Q_1^{-1} A_2 Q_1 M_1$$

η οποία τελικά συνεπάγεται την

$$A_1 = Q_1^{-1} A_2 Q_1 \quad \textbf{(15)}$$

Οι σχέσεις (15), (11), (14) δείχνουν ότι οι πραγματώσεις (3) και (4) είναι όμοιες.

Θεώρημα (Kalman)

Γενικά, κάθε σύστημα της μορφής του χώρου των καταστάσεων είναι όμοιο με ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a(t) \\ \dot{x}_b(t) \\ \dot{x}_c(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} & A_{ac} & A_{ad} \\ 0 & A_{bb} & 0 & A_{bd} \\ 0 & 0 & A_{cc} & A_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & A_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & C_b & 0 & C_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix} + Du(t)$$

και

$$G(s) = C_b(sI_n - A_{bb})^{-1}B_d + D$$

Παράδειγμα (1)

Έστω το γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \Lambda z(t) + Eu(t) \\ y(t) = \Gamma z(t) + Du(t) \end{cases}$$

Έστω $n = 4, m = p = 1$ (με μία είσοδο, μία έξοδο) και $D = 0$.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \dot{z}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (2)

Το σύστημα είναι αναγώγιμο (δηλαδή είναι μη ελέγξιμο και μη παρατηρήσιμο).

Οι πόλοι του συστήματος είναι: $\{-1,2,3,-4\}$

Η τάξη του συστήματος είναι: $n = 4$

Το σύστημα έχει:

- δύο αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου: $\{,3,-4\}$,
- δύο αποσυζευκτικά μηδενικά εξόδου: $\{2,-4\}$,
- ένα αποσυζευκτικό μηδενικό εισόδου-εξόδου (το οποίο είναι αποσυζευκτικό μηδενικό εισόδου **και** αποσυζευκτικό μηδενικό εξόδου): $\{3,-4\} \cap \{2,-4\} = \{-4\}$.

Παράδειγμα (3)

{αποσυζευκτικά μηδενικά του συστήματος}=
{αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου}∪{αποσυζευκτικά μηδενικά εξόδου} –{αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου–εξόδου}

||

$$\{2,3,-4\} = \{3,4\} \cup \{2,-4\} - \{-4\}$$

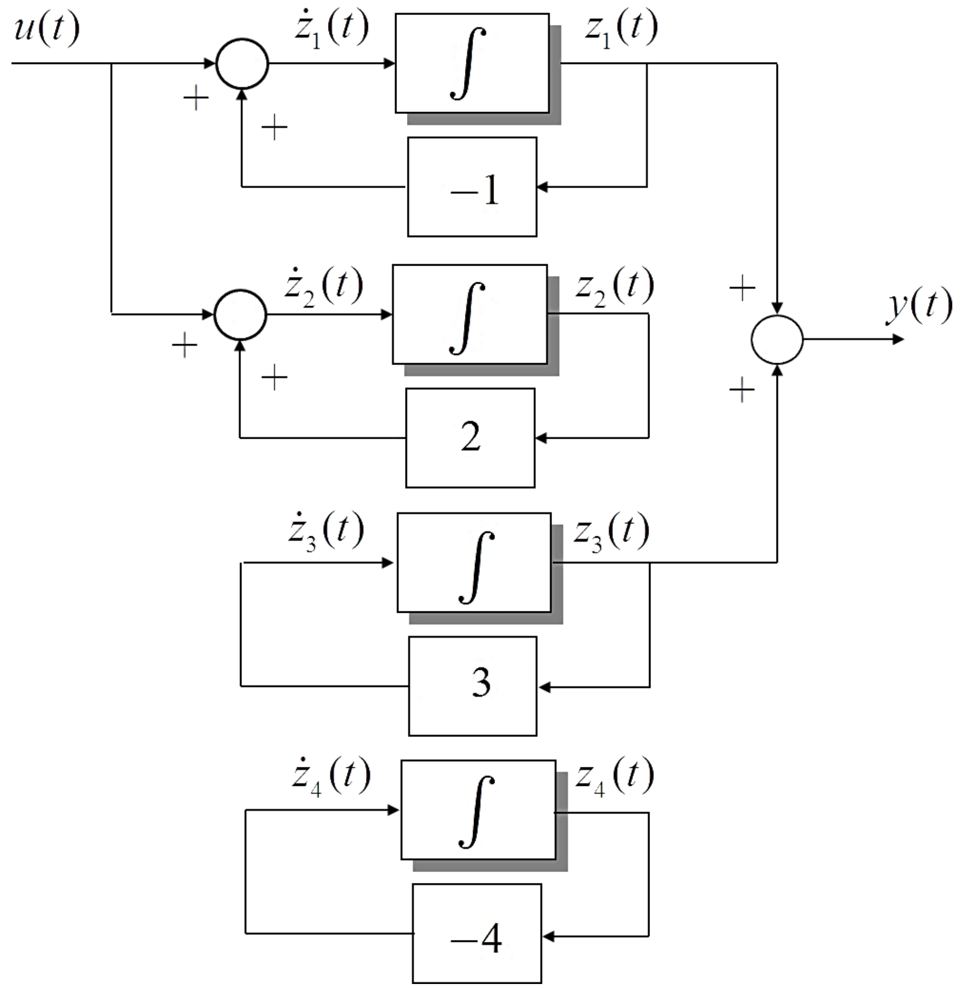
{πόλοι του συστήματος}=
{πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς}∪{αποσυζευκτικά μηδενικά του συστήματος}

||

$$\{1,2,3,-4\} = \{1\} \cup \{2,3,-4\}$$

Παράδειγμα (4)

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = -z_1(t) + u(t) \\ \dot{z}_2(t) = 2z_2(t) + u(t) \\ \dot{z}_3(t) = 3z_3(t) \\ \dot{z}_4(t) = -4z_4(t) \\ y(t) = z_1(t) + z_2(t) \end{cases}$$



Παράδειγμα (5)

Παρατηρούμε ότι:

- η είσοδος $u(t)$ **δεν επηρεάζει** τις καταστάσεις $z_3(t), z_4(t)$,
- η έξοδος $y(t)$ **δεν επηρεάζεται** από τις καταστάσεις $z_2(t), z_4(t)$.

Έχουμε οτι

$$sI_4 - \Lambda = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+4 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (6)

οπότε

$$(sI_4 - \Lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix}$$

και

Παράδειγμα (7)

$$(sI_4 - \Lambda)^{-1}E = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s-2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

έτσι ώστε η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος να είναι η

Παράδειγμα (8)

$$G(s) = \Gamma(sI_4 - \Lambda)^{-1}E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{1}{s-2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

Μία **ελάχιστη πραγμάτωση** της συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$ είναι:

$$A = -1, B = 1, C = 1, D = 0$$

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D = 1(s+1)^{-1}1 = \frac{1}{s+1}$$

Το παραπάνω αποτελεί παράδειγμα για το

Θεώρημα 2 (1)

Θεώρημα. Αν στον πίνακα των συναρτήσεων μεταφοράς $G(s)$ ενός συστήματος δεν εμφανίζονται ως πόλοι του $G(s)$ όλοι οι πόλοι του συστήματος, δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές του A, τότε το σύστημα είναι:

(α) ή μη ελέγξιμο,

(β) ή μη παρατηρήσιμο,

(γ) ή μη ελέγξιμο και μη παρατηρήσιμο.

Θεώρημα 2 (2)

Απόδειξη.

Θεωρήστε ένα σύστημα στη διαγώνια κανονική μορφή

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \Lambda z(t) + Bu(t) \\ y(t) = \Gamma z(t) \end{cases} \quad \textbf{(16)}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1^T \\ B_2^T \\ B_3^T \\ B_4^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \Gamma = [\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \dots \quad \Gamma_n] \in \mathbb{R}^{p\times n}$$

όπου $B_i^T \in \mathbb{R}^{1\times m}, i = 1,2,..,n$ οι γραμμές του $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ και $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{p\times 1}, i = 1,2,\dots,n$ οι στήλες του $\Gamma \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

Θεώρημα 2 (3)

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace τις (16) έχουμε

$$sz_i(s) = \lambda_i z_i(s) + B_i^T u(s) \Rightarrow z_i(s) = \frac{1}{s-\lambda_i} B_i^T u(s),$$

$$i = 1,2,\dots,n$$

$$y(s) = \Gamma z(s) = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \dots & \Gamma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \\ \vdots \\ z_n(s) \end{bmatrix}$$

$$= \Gamma_1 z_1(s) + \Gamma_2 z_2(s) + \cdots + \Gamma_n z_n(s) = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i B_i^T \frac{1}{s-\lambda_i} u(s)$$

Θεώρημα 2 (4)

Άρα ο πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς του συστήματος θα δίνεται από την

$$G(s) = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i B_i^T \frac{1}{s-\lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} G_i \frac{1}{s-\lambda_i}$$

όπου $G_i := \Gamma_i B_i^T \in \mathbb{R}^{p\times m}, i = 1,2,\ldots,n.$

Αν στην έκφραση του $G(s)$ δεν εμφανίζεται ως πόλος του $G(s)$ η ιδιοτιμή λ_i του A (μηδενικό του $sI_n - A$: πόλος του συστήματος) θα πρέπει

$$G_i := \Gamma_i B_i^T = 0_{p,m}$$

Θεώρημα 2 (5)

ή ισοδύναμα θα πρέπει

$$rankG_i = rank\left(\Gamma_i B_i^T\right) = 0$$

η οποία ικανοποιείται αν και μόνο αν

(α) ή $B_i^T = 0_{1,m}$ ⇔ το σύστημα είναι μη ελέγξιμο.

(β) ή $\Gamma_i = 0_{p,1}$ ⇔ το σύστημα είναι μη παρατηρήσιμο.

(γ) ή $B_i^T = 0_{1,m}$ και $\Gamma_i = 0_{p,1}$ ⇔ το σύστημα είναι μη ελέγξιμο και μη παρατηρήσιμο.

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012*, Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου.* Εκδόσεις Τζιόλα*.*
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης