ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 15. Ευστάθεια Συστημάτων (Ευστάθεια Lyapunov - Ασυμπτωτική Ευστάθεια)

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Κατάσταση ισορροπίας.
- Ευσταθής κατάσταση ισορροπίας.
- Είδη ευστάθειας.
- Ευστάθεια της κατάστασης ισορροπίας γραμμικών και χρονικά αναλλοίωτων ελεύθερων συστημάτων.
- Θετικά ημι-ορισμένες, ορισμένες συναρτήσεις.
- Τετραγωνικές μορφές.
- Συνάρτηση Lyapunov.
- Θεώρημα Lyapunov.

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη της έννοιας της κατάστασης ισορροπίας και της ευσταθούς κατάστασης ισορροπίας.
- Μελέτη των είδων ευστάθειας:
  - Ευσταθής κατά Lyapynov.
  - Ομοιόμορφη ευστάθεια.
  - Ασυμπτωτική ευστάθεια.
  - Εκθετικά ευσταθής.
  - Ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής.
  - Ολικά εκθετικά ευσταθής.

Κατάσταση ισορροπίας

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t),$$
$$t \geq t_0, x(t_0) := x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Ορισμός. Μια κατάσταση $x_e := x(t_e) \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **κατάσταση ισορροπίας** κατά την χρονική στιγμή t_e αν για κάθε $t \geq t_e, f(x_e, t) = 0$.

$$\dot{x} = Ax, Ax_e = 0 \Rightarrow x_e = 0 \text{ αν A αντιστρέψιμος}$$

Παράδειγμα 1

Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0,1,-1 \end{cases}$$

$$x_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

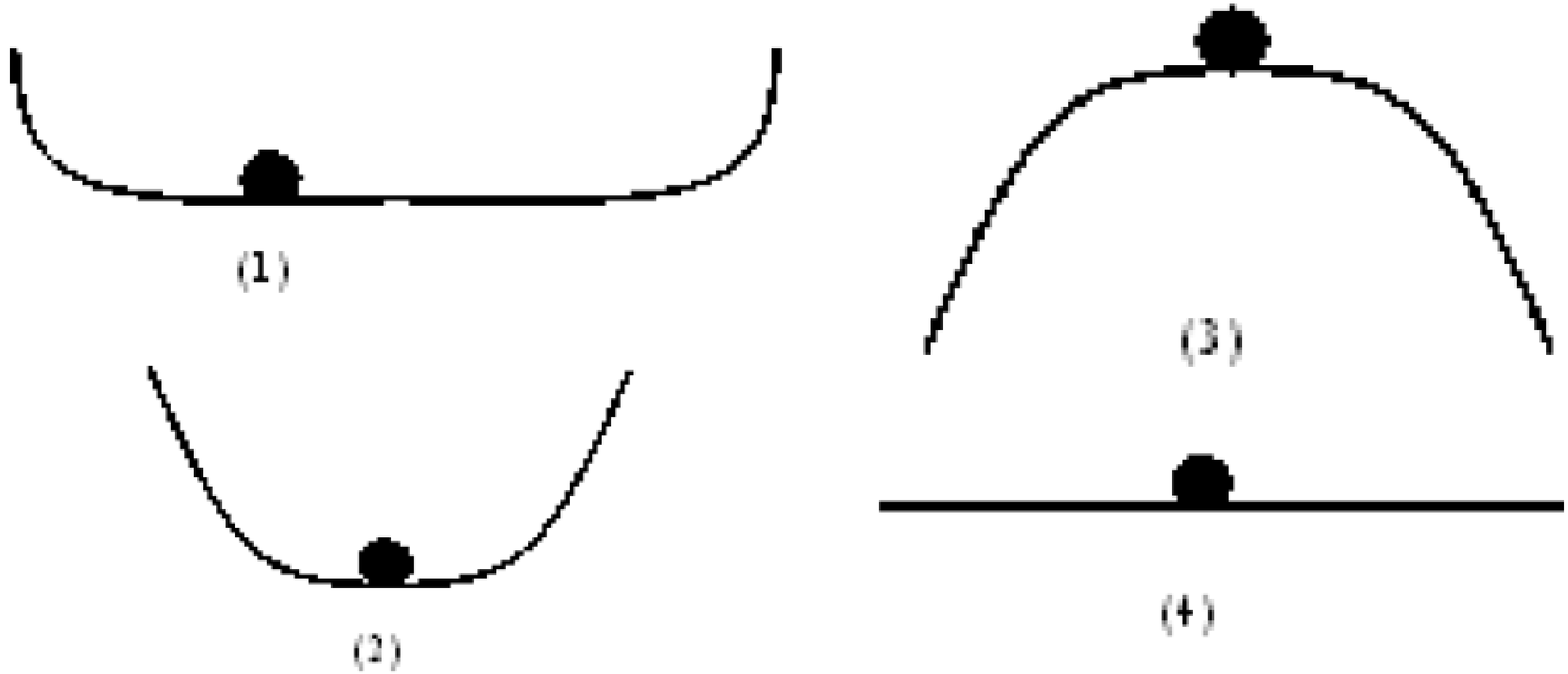
$$\dot{x}_2(t) = ksin(x_1(t))$$

$$\begin{cases} x_2(t) = 0 \\ ksin(x_1(t)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{e_2} = 0 \\ x_{e_{1n}} = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

$$n = 0 \rightarrow x_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

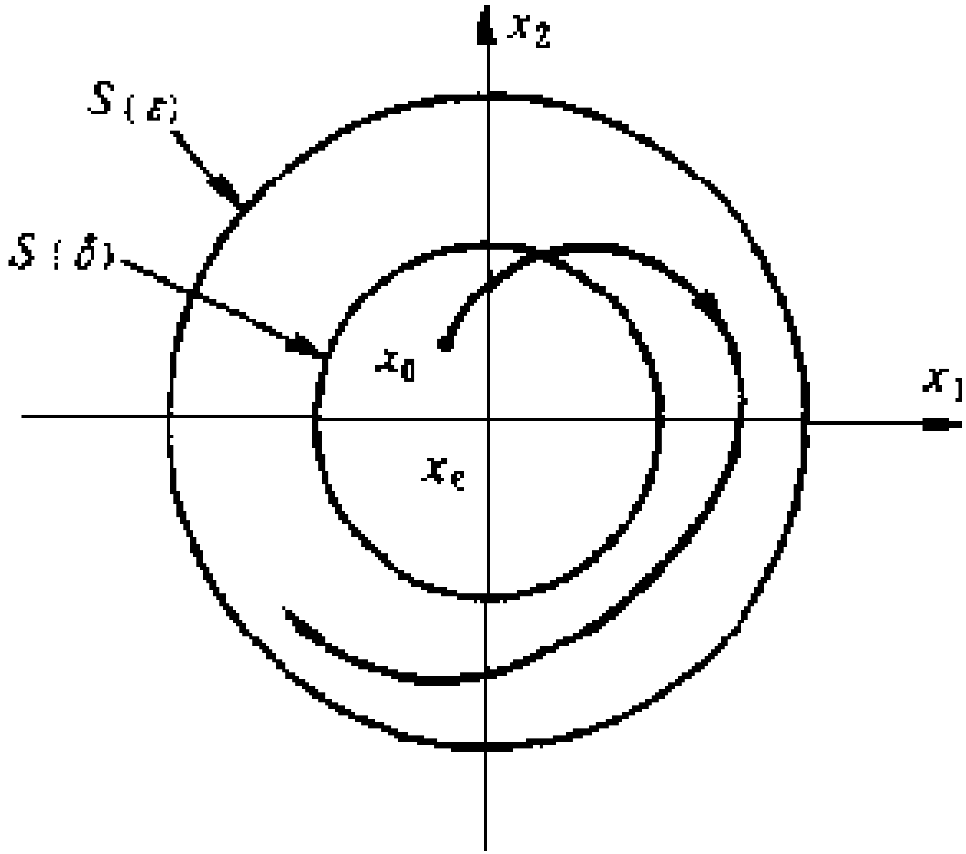
$$n = \pm 1 \rightarrow x_{e_2} = \begin{bmatrix} \pm\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ευσταθής κατάσταση ισορροπίας



Σχήμα 1. Διαισθητική ερμηνεία ευσταθούς κατάστασης ισορροπίας (κατά (1), ασυμπτωτικά ευσταθούς κατάστασης ισορροπίας (2), ασταθούς κατάστασης ισορροπίας (3) και ουδέτερης κατάστασης ισορροπίας (4))

Ευσταθής κατάσταση ισορροπίας (κατά Lyapunov)



Ευσταθής (κατά Lyapynov) (1)

Μία **ανοικτή περιοχή** $\boldsymbol{S_\varepsilon(x_e)}$ της κατάστασης ισορροπίας x_e ακτίνας $\varepsilon > 0$ (ή μια ε-γειτονιά του x_e) είναι το σύνολο των καταστάσεων $x(t)$ μέσα στη «μπάλα» με κέντρο x_e και ακτίνα $\varepsilon > 0$:

$$S_\varepsilon(x_e) \coloneqq \{x(t) \colon \|x(t) - x_e\| < \varepsilon\}$$

Ευσταθής (κατά Lyapynov) (2)

Ορισμός. Η κατάσταση ισορροπίας x_e ή ισοδύναμα η λύση ισορροπίας $x(t) = x(t; x_e, t_0)$ ενός ελεύθερου συστήματος $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ ονομάζεται **ευσταθής** (**κατά Lyapynov**) (κατά τον χρόνο t_0) (Lyapunov stable at time t_0) αν για κάθε δεδομένο χρόνο t_0 και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει σταθερά $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ τέτοια ώστε με $x_0 = x(t_0)$ αν

$$\|x_0 - x_e\| < \delta(\varepsilon, t_0)$$

τότε

$$\|x(t; x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon$$

για κάθε $t \geq t_0$.

Ομοιόμορφα ευσταθής

Ο αριθμός δ εξαρτάται από τον αριθμό ε και γενικά εξαρτάται επίσης από τον χρόνο t_0.

Αν ο δ **δεν εξαρτάται** από τον t_0, τότε η κατάσταση ισορροπίας x_e ονομάζεται **ομοιόμορφα ευσταθής**.

Αν μια κατάσταση ισορροπίας x_e είναι ομοιόμορφα ευσταθής, τότε είναι και ευσταθής.

Ασυμπτωτική ευστάθεια (1)

Ορισμός. Η κατάσταση ισορροπίας x_e ή ισοδύναμα η λύση ισορροπίας $x(t; x_e, t_0) = x_e$ ενός ελεύθερου συστήματος $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ ονομάζεται **ασυμπτωτικά ευσταθής** (asymptotically stable), αν

α) είναι ευσταθής (κατά τον χρόνο t_0) (κατά Lyapunov) και

β) για κάθε t_0 υπάρχει αριθμός $\delta(t_0)$ τέτοιος αν

$$\|x_0 - x_e\| < \delta(\, t_0)$$

τότε

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} x(t; x_0, t_0) = x_e}$$

ή

Ασυμπτωτική ευστάθεια (2)

ισοδύναμα για κάθε $\varepsilon_1 > 0$ υπάρχει χρόνος $T(\varepsilon_1, x_0, t_0)$ τέτοιος αν

$$\|x_0 - x_e\| < \delta(\, t_0)$$

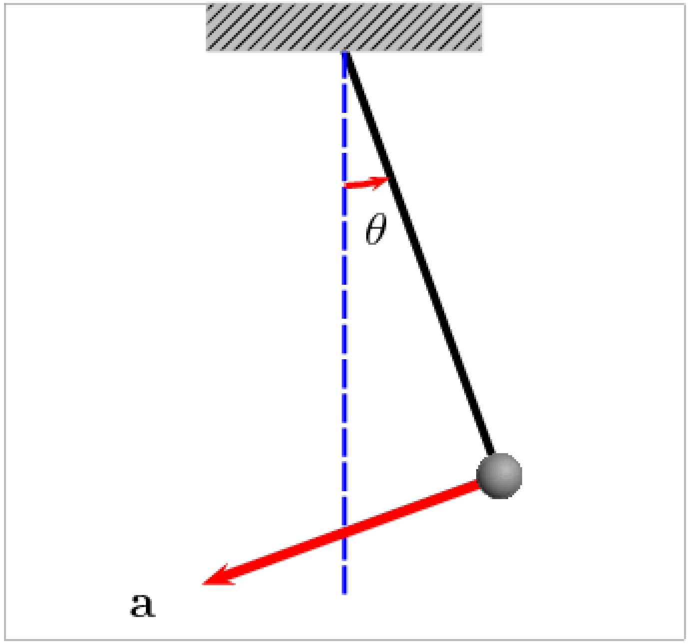
τότε

$$\|x(t; x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon_1$$

για κάθε $t > t_0 + T$.

Το σύνολο όλων των αρχικών καταστάσεων $x(t_0) =: x_0 \in \mathbb{R}^n$ για τις οποίες $\lim_{t\to\infty} x(t; x_0, t_0) = x_e$ ονομάζεται **περιοχή έλξης** της κατάστασης ισορροπίας x_e.

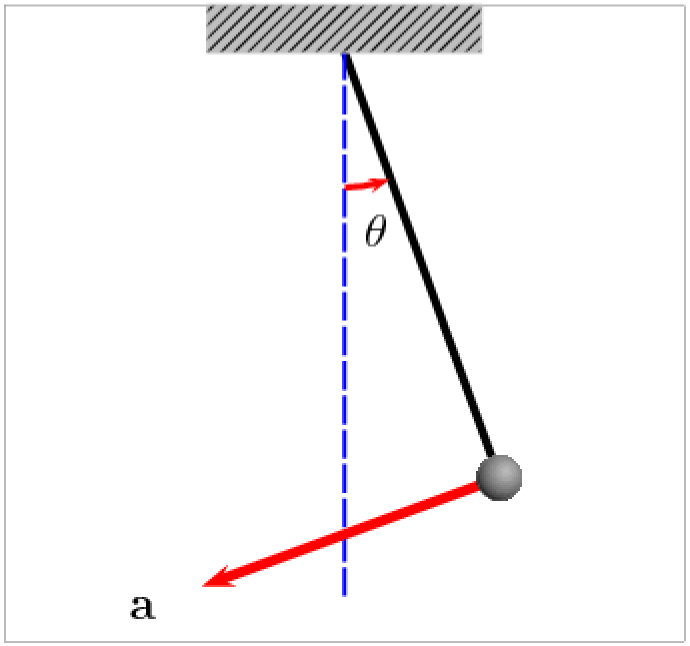
Παράδειγμα 3 (1)



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sin\theta = 0$$

- $x_1(t) = \theta(t)$
- $x_2(t) = \dot{\theta}(t) \Rightarrow$
  $$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
- $\dot{x}_2(t) = \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l}\sin\big(\theta(t)\big)$
  $$\Rightarrow$$
  $$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin(x_1(t))$$

Παράδειγμα 3 (2)



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sin\theta = 0$$

- $y(t) = \theta(t) = x_1(t)$
- $g = 9.81 \frac{m}{sec^2}, l = 1m$
- $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$
- $\dot{x}_2(t) = -9.81 \sin(x_1(t))$

Παράδειγμα 3 (3)

In[151]:=

```
s = NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == -9.81 Sin[x[t]], x[0] == 0.1,
   y[0] == 0}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 10}]
```

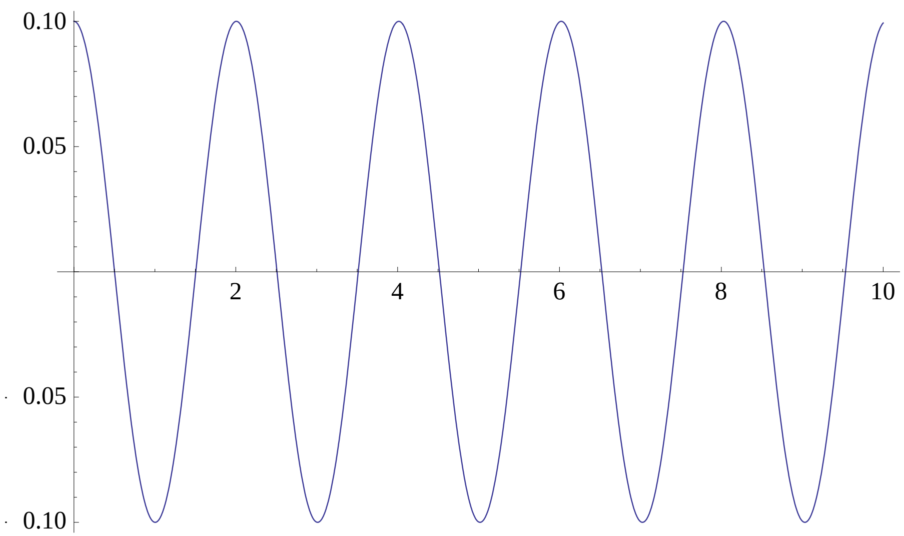
Out[151]=

```
{{x[t] -> InterpolatingFunction[{{0., 10.}}, <>][t],
  y[t] -> InterpolatingFunction[{{0., 10.}}, <>][t]}}
```

In[152]:=

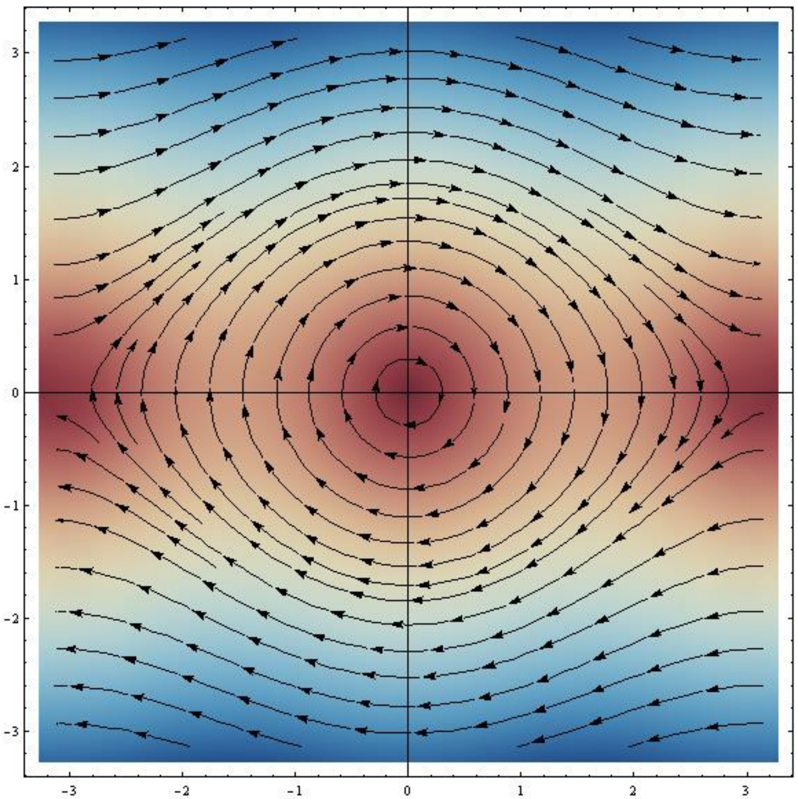
```
Plot[Evaluate[x[t] /. s], {t, 0, 10}]
```

Out[152]=



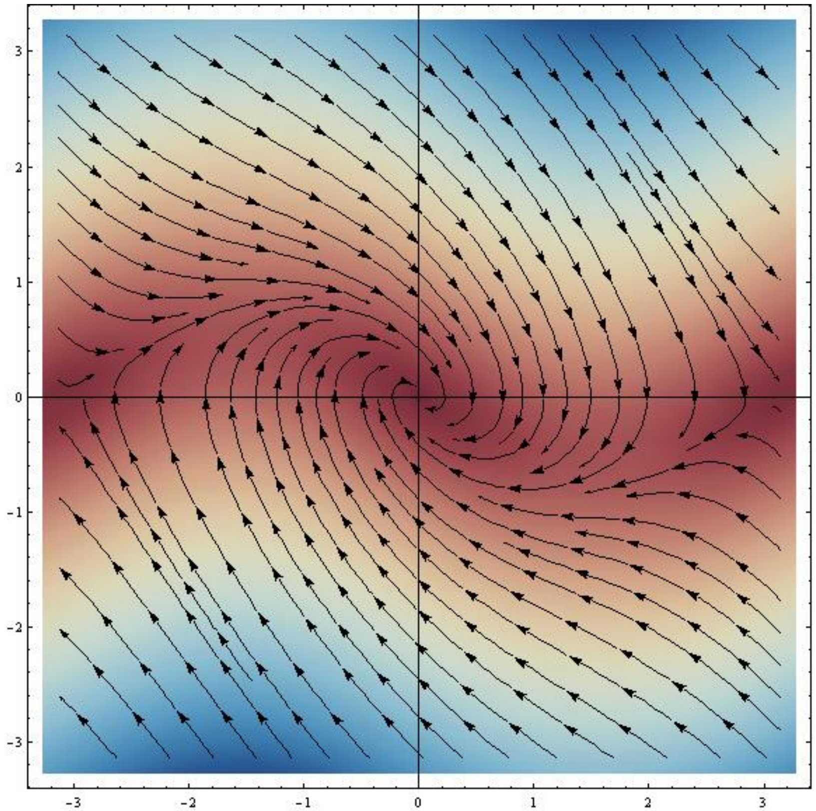
Παράδειγμα 3 (4)

```
In[18]:= StreamDensityPlot[{x2, -Sin[x1]}, {x1, -3.14, 3.14}, {x2, -3.14, 3.14},
  ColorFunction -> "RedBlueTones", StreamStyle -> Black, Axes -> True, ImageSize -> Large,
  AspectRatio -> Automatic]
```

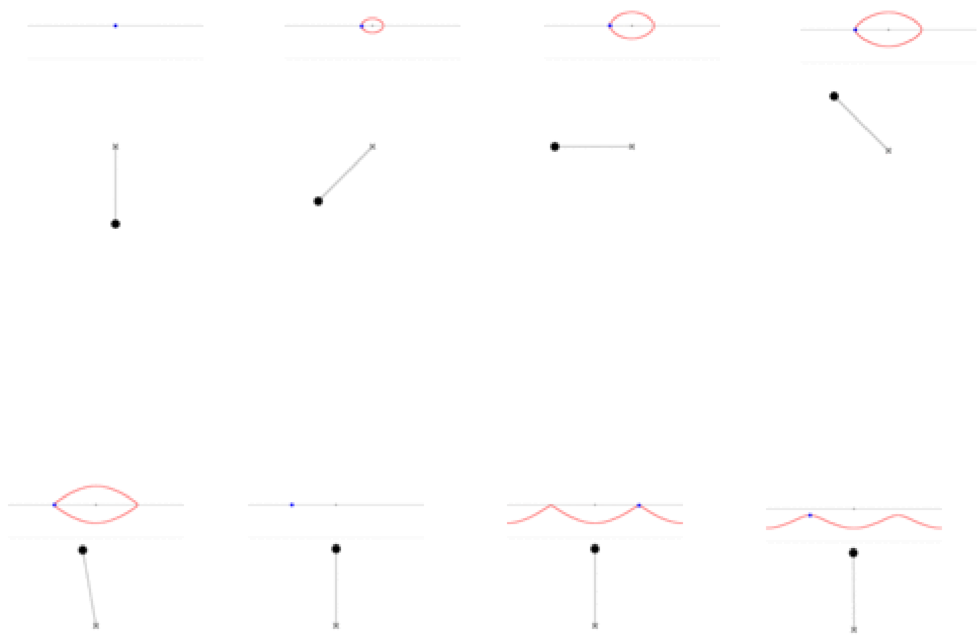


Παράδειγμα 3 (5)

```
In[19]:= StreamDensityPlot[{x2, -Sin[x1] - x2}, {x1, -3.14, 3.14}, {x2, -3.14, 3.14},
  ColorFunction -> "RedBlueTones", StreamStyle -> Black, Axes -> True, ImageSize -> Large,
  AspectRatio -> Automatic]
```



Παράδειγμα 3 (6)



Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια

Ορισμός. Η κατάσταση ισορροπίας x_e ενός ελεύθερου συστήματος ονομάζεται **ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής** (asymptotically stable in the large), αν είναι ευσταθής (κατά Lyapunov) και για κάθε αρχική κατάσταση $x_0 \in \mathbb{R}^n$ η λύση $x(t; x_0, t_0)$ συγκλίνει στην κατάσταση ισορροπίας x_e, καθώς ο χρόνος $t \to \infty$.

Ορισμός. Η κατάσταση ισορροπίας x_e ενός ελεύθερου συστήματος ονομάζεται **ασταθής**, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κανένα δ δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες ευστάθειας κατά Lyapunov.

Αλλαγή του σημείου ισορροπίας

Αρχικό Σύστημα $\dot{x}(t) = f(x(t), t), t \geq t_0$

$$f(x_e, t) = 0 \; \gamma\iota\alpha \; x_e \neq 0$$

$$\hat{x}(t) \coloneqq x(t) - x_e \Rightarrow x(t) = \hat{x}(t) + x_e$$

$$\downarrow \quad \boldsymbol{\dot{x}_e = 0}$$

$$\dot{x}(t) = \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t) + x_e, t), t \geq t_0$$

$$f_1(\hat{x}(t), t) \coloneqq f(\hat{x}(t) + x_e, t)$$

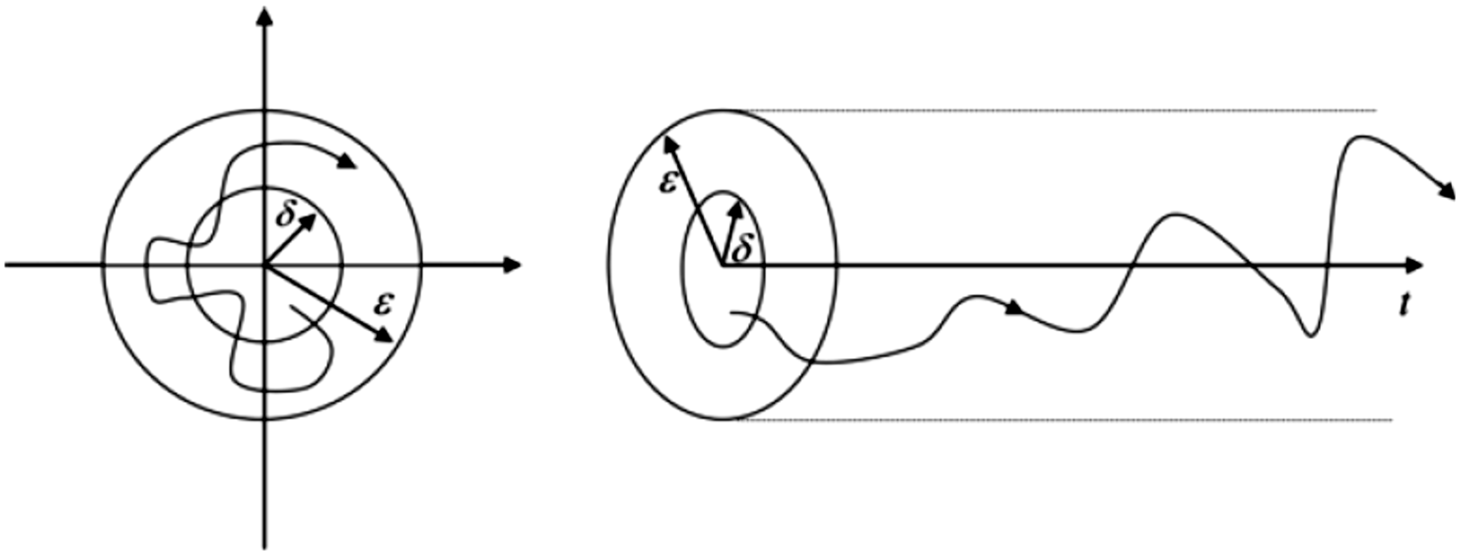
$\dot{\hat{x}}(t) = f_1(\hat{x}(t), t)$ **Τελικό Σύστημα**

$$f_1(0, t) = f(0 + x_e, t) = f(x_e, t) = 0$$

$\hat{x}_e = 0$ είναι κατάσταση ισορροπίας

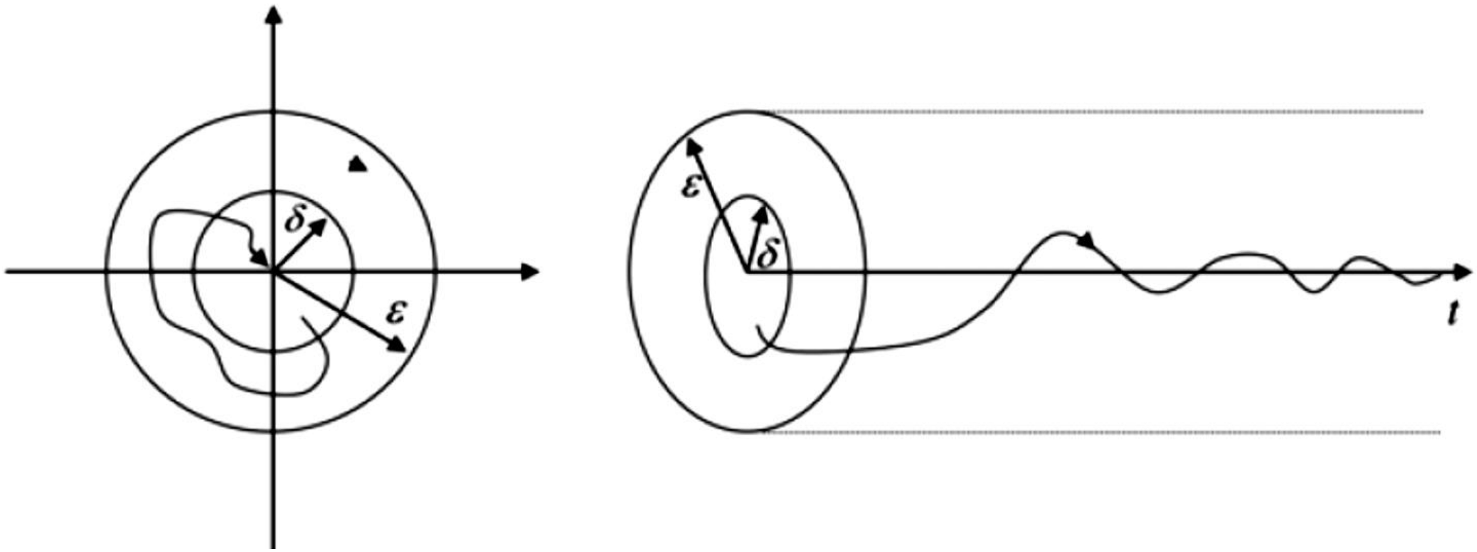
Ευσταθής (κατά Lyapunov) (2)

Ορισμός. Η κατάσταση ισορροπίας $x(t; x_0, t_0) = x_e = 0$ ονομάζεται **ευσταθής** (κατά Lyapunov) αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε αν $\|x_0\| < \delta$, τότε $\|x(t; x_0, t_0)\| < \varepsilon$ για κάθε $t \geq 0$.



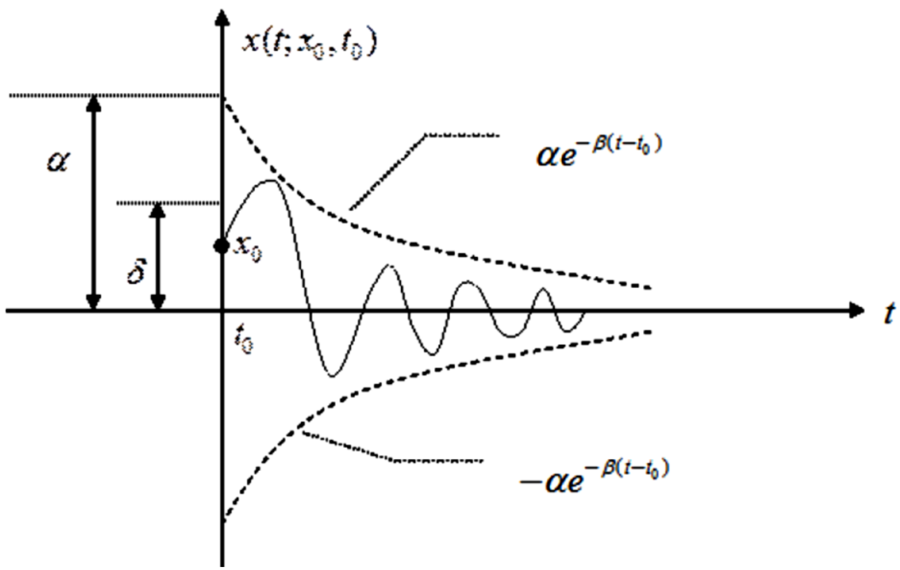
Ασυμπτωτικά ευσταθής

Ορισμός. Η κατάσταση ισορροπίας $x(t; x_0, t_0) = x_e = 0$ ονομάζεται **ασυμπτωτικά ευσταθής** αν είναι ευσταθής κατά Lyapunov και υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε αν $\|x_0\| < \delta$, τότε $\lim_{t\to\infty} x(t; x_0, t_0) = 0$.



Εκθετικά ευσταθής

Ορισμός. Η κατάσταση ισορροπίας $x(t; x_0, t_0) = x_e = 0$ ονομάζεται **εκθετικά ευσταθής** αν υπάρχουν σταθερές $\alpha > 0, \beta > 0, \delta > 0$ τέτοιες ώστε αν $\|x_0\| < \delta$, τότε $\|x(t; x_0, t_0)\| < \alpha e^{-\beta t}, t \geq 0$.



Ολικά ασυμπτωτικά/εκθετικά ευσταθής

Ορισμός. Η κατάσταση ισορροπίας $x(t; x_0, t_0) = x_e = 0$ ονομάζεται **ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής** αν είναι ευσταθής (κατά Lyapunov) και για όλες τις αρχικές συνθήκες $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t \to \infty} x(t; x_0, t_0) = 0$.

Ορισμός. Η κατάσταση ισορροπίας $x(t; x_0, t_0) = x_e = 0$ ονομάζεται **ολικά εκθετικά ευσταθής** αν υπάρχουν σταθερές $\alpha > 0, \beta > 0, \delta > 0$ τέτοιες ώστε αν $\|x_0\| < \delta$, τότε $\|x(t; x_0, t_0)\| < ae^{-\beta t}, t \geq 0$για όλες τις αρχικές συνθήκες $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Ορισμός. Η κατάσταση ισορροπίας $x(t; x_0, t_0) = x_e = 0$ ονομάζεται **ασταθής** αν δεν είναι ευσταθής (κατά Lyapunov).

Θετικά ημι-ορισμένες συναρτήσεις

$$V(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$S_\varepsilon(x_e) \coloneqq \{x(t): \|x(t) - x_e\| < \varepsilon\}$$

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

$$S_k(0) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \le k\}$$

Ορισμός. Η συνάρτηση $V(x)$ ονομάζεται **θετικά ημιορισμένη** στην $S_k(0)$, αν για όλα τα $x \in S_k(0)$

1. η $V(x)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς τις συνταταγμένες $x_i, i = 1,2, \dots, n$ του x.

2. $V(0) = 0$.

3. $V(x) \ge 0$.

Θετικά ορισμένες συναρτήσεις

Ορισμός. Η συνάρτηση $V(x)$ ονομάζεται **θετικά ορισμένη** στην $S_k(0)$, αν για όλα τα $x \in S_k(0)$

1. η $V(x)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς τις συνταταγμένες $x_i, i = 1,2, \dots, n$ του x.
2. $V(0) = 0$
3. $V(x) > 0$.

Ορισμός. Η συνάρτηση $V(x)$ ονομάζεται **αόριστη** αν για $x \in S_k(0)$ λαμβάνει θετικές και αρνητικές τιμές.

Παράδειγμα 4

$V(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ θετικά ορισμένη

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

θετικά ορισμένη μόνο αν $n = 2$ εφόσον για $x_1 = x_2 = 0, V(x) = 0$

$V(x) = (x_1 + x_2)^2$ θετικά ημι-ορισμένη

$$x = [-x_2 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T \neq 0 \rightarrow V(x) = 0$$

Τετραγωνικές μορφές

$$V(x) = x^T R x$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= r_{11}x_1^2 + (r_{12} + r_{21})x_1x_2 + \cdots + (r_{1n} + r_{n1})x_1x_n + r_{22}x_2^2 + (r_{23} + r_{32})x_2x_3 + \cdots + r_{nn}x_n^2$$

όπου $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός πίνακας.

Θεώρημα Sylvester

Θεώρημα Sylvester

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η τετραγωνική μορφή $V(x) = x^T R x$ θετικά ορισμένη είναι: οι πρωτεύουσες ορίζουσες του R είναι μεγαλύτερες του μηδενός ή

$$\det[r_{11}] > 0, \det\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} > 0, \det\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} > 0, \dots$$

$$\dots, detR > 0$$

Αν οποιαδήποτε από τις παραπάνω ορίζουσες ισούται με μηδέν, η συνάρτηση $V(x)$ είναι θετικά ημι-ορισμένη.

Παράδειγμα 5

$$V(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$$

$V(x)$ **είναι θετικά ορισμένη**

$$V(x) = x^T R x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- $\det[r_{11}] = det2 = 2 > 0,$
- $\det \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 7 > 0,$
- $\det \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 19 > 0$

Παράδειγμα 6

$$V(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2$$

$V(x)$ **είναι θετικά ορισμένη**

$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x^T R x > 0$ θετικά ορισμένη.

$$V(x) = x_1^2$$

$V(x)$ **είναι θετικά ημι-ορισμένη**

$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x^T R x \geq 0$ θετικά ημι-ορισμένη.

Μπορούμε να πάρουμε *R* συμμετρικό στην μορφή x’*R*x ;

$$V(x) = x^T R x = V(x)^T = (x^T R x)^T = x^T R^T x$$

$$x^T R x = \frac{1}{2} x^T R x + \frac{1}{2} x^T R x = \frac{1}{2} x^T R x + \frac{1}{2} x^T R^T x$$

$$= x^T \left(\frac{R + R^T}{2} \right) x = x^T R_s x$$

$R_s := \frac{R+R^T}{2}$ είναι συμμετρικός πίνακας

$$R_s^T = \left(\frac{R + R^T}{2} \right)^T = \frac{R + R^T}{2} = R_s$$

Θεώρημα του Schur

Αν $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι συμμετρικός, αν δηλαδή $R = R^T$, τότε οι ιδιοτιμές του R είναι πραγματικοί αριθμοί.

Έστω $\lambda = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}, \sigma, \omega \in \mathbb{R}$ και

$$u = x + jy \in \mathbb{C}^{n\times 1}, x, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

$$Ru = \lambda u \to \bar{u}^T R u = \lambda \bar{u}^T u$$

Έχουμε ότι $\bar{\lambda} = \sigma - j\omega \in \mathbb{C}, \sigma, \omega \in \mathbb{R}$ και

$$\bar{u} = x - jy \in \mathbb{C}^{n\times 1}, x, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

$$R\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u} \to u^T R \bar{u} = \bar{\lambda} u^T \bar{u}$$

$$\bar{\lambda} u^T \bar{u} = \bar{\lambda}(u^T \bar{u})^T = \bar{\lambda}\bar{u}^T u = (u^T R \bar{u})^T = \bar{u}^T R^T u = \bar{u}^T R u$$
$$= \lambda \bar{u}^T u = \lambda u^T \bar{u}$$

$$u \neq 0 \Rightarrow \bar{u}^T u \neq 0 \to \bar{\lambda} = \lambda \to \lambda = \sigma \in \mathbb{R}$$

Θεώρημα (1)

- **Θεώρημα.** Η τετραγωνική μορφή $V(x) = x^T R x$ όπου $R = R^T$ είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_i, i = 1,2, \dots, n$ του R είναι θετικοί αριθμοί.
- **Θεώρημα** Η τετραγωνική μορφή $V(x) = x^T R x$ όπου $R = R^T$ είναι θετικά ημι-ορισμένη αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_i, i = 1,2, \dots, n$ του R είναι μη αρνητικοί αριθμοί.

Παράδειγμα 7

Έστω $V(x) = x^T R x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$

$$= 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2$$

$$V(x) = x^T R x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \left(\frac{R + R^T}{2} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ είναι 5,-1.

Η $2x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2$ είναι αόριστη.

Απλή-Κλειστή επιφάνεια

$$V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n: V(x) = K \; \gamma\iota\alpha \; K > 0\}$$

Το σύνολο S ονομάζεται επιφάνεια στον $\mathbb{R}^n$.

Απλή επιφάνεια S στον $\mathbb{R}^n$ δεν τέμνει τον εαυτό της

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow V(x_1) \neq V(x_2)$$

Κλειστή επιφάνεια

- Τέμνει όλες τις καμπύλες που ξεκινούν από το σημείο $x = 0$ και καταλήγουν στο άπειρο.

Απλή κλειστή επιφάνεια (1)

Αν η βαθμωτή συνάρτηση $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη και $V(x) \to \infty$, όταν $\|x\| \to \infty$ τότε το σύνολο των σημείων

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = K \; \gamma\iota\alpha \; K > 0\}$$

αποτελεί **απλή κλειστή επιφάνεια**.

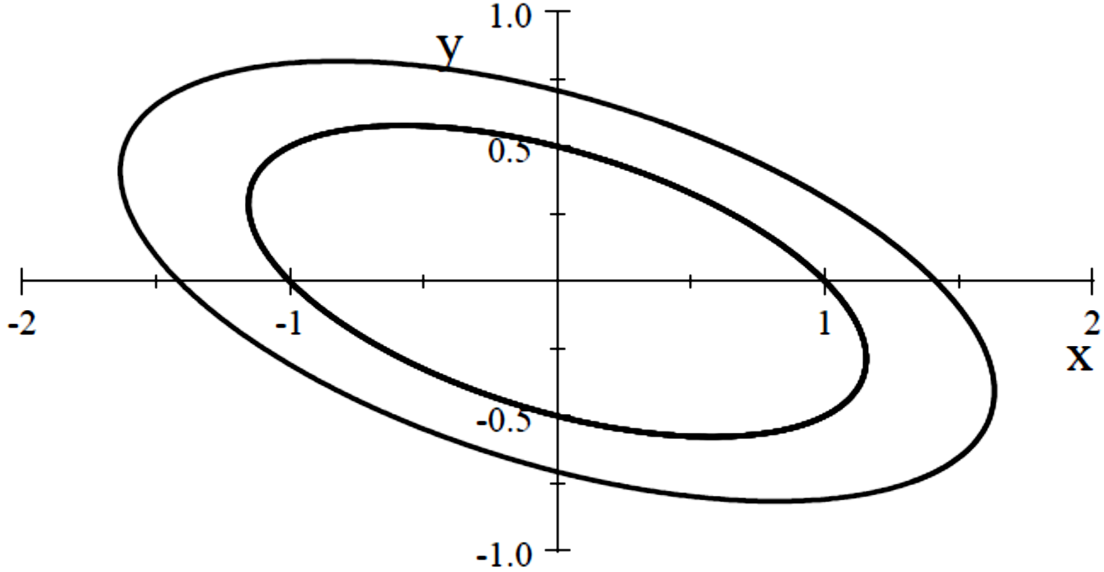
Επιπλέον, αν $0 < K_1 < K_2$ η επιφάνεια $V(x) = K_2$ πλήρως περιβάλλει την επιφάνεια $V(x) = K_1$.

Παράδειγμα:

$$V(x) = x^T R x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$$

Απλή κλειστή επιφάνεια (2)

- $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon V(x) = 2\}$
- $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon V(x) = 1\}$



Συνάρτηση Lyapunov

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big)\ \textbf{(1)}$$

Μία θετικά ορισμένη βαθμωτή συνάρτηση $V(x)$ ονομάζεται **συνάρτηση του Lyapunov** αν το διάνυσμα x είναι λύση της (1) και έχει συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους ως προς τις συντεταγμένες $x_i(t), i = 1,2, \dots, n$ της λύσης $x(t)$ της (1).

$$\dot{V}(x) \coloneqq \frac{dV\big(x(t)\big)}{dt} = \frac{\partial V\big(x(t)\big)}{dx_1}\frac{dx_1(t)}{dt} + \cdots + \frac{\partial V\big(x(t)\big)}{dx_n}\frac{dx_n(t)}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V\big(x(t)\big)}{dx_i}\dot{x}_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V\big(x(t)\big)}{dx_i} f_i(x)$$

- $\dot{x}(t) = Ax(t), V(x) = x^T x$
- $\dot{V}(x) = \frac{dx^T}{dt}x + x^T\frac{dx}{dt} = x^T A^T x + x^T A x = x^T(A^T + A)x$

Θεώρημα (2)

Θεώρημα. Η κατάσταση ισορροπίας στην αρχή των συντεταγμένων του $\mathbb{R}^n$ ή η μηδενική λύση $x(t; x_e, t_0) = x_e = 0$ του συστήματος (1), είναι **ευσταθής** (κατά Lyapunov) αν σε μία περιοχή $S_k(0) = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq k, k > 0\}$ της αρχής των συντεταγμένων του $\mathbb{R}^n$ υπάρχει μία συνάρτηση Lyapunov $V(x)$ τέτοια ώστε η παράγωγος της $\dot{V}(x)$ υπολογισμένη επάνω στις λύσεις $x(t; x_e, t_0)$ της (1) είναι αρνητικά ημι-ορισμένη, αν δηλαδή

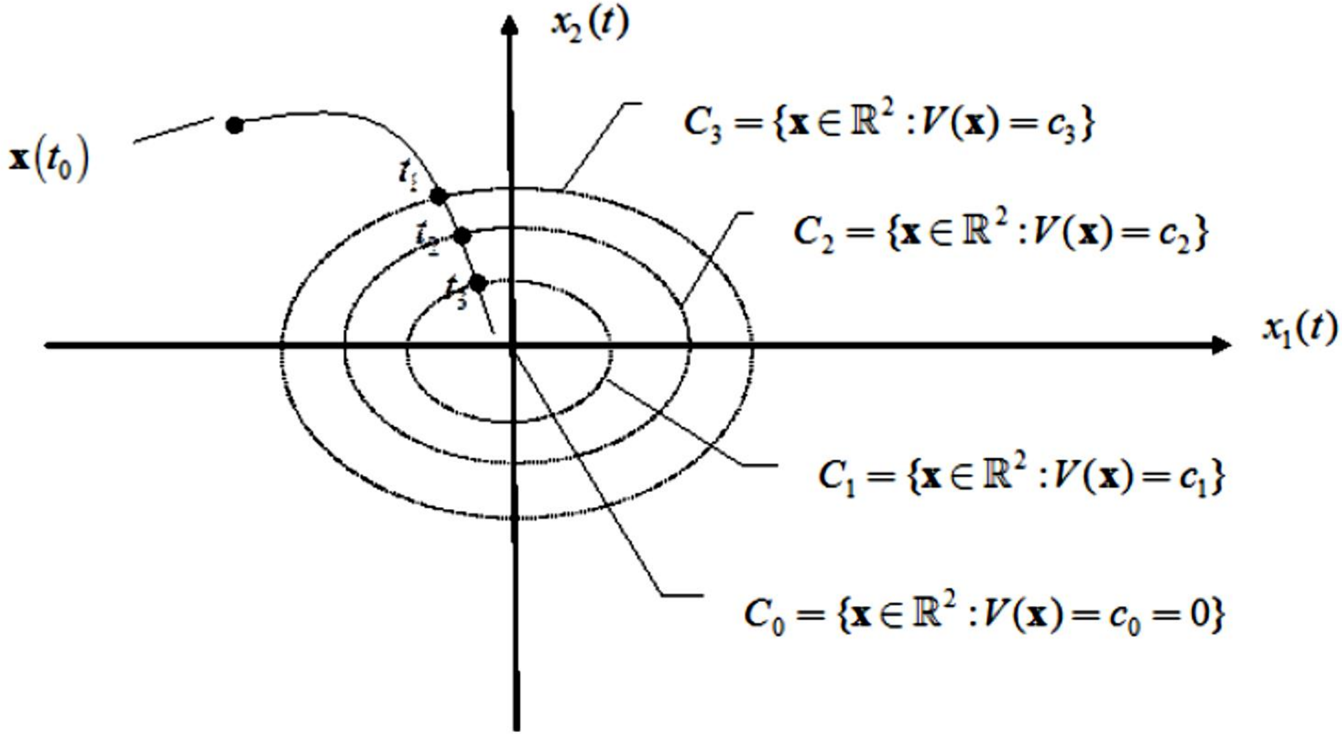
$$\frac{dV\big(x(t)\big)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V\big(x(t)\big)}{dx_i} f_i(x) \leq 0.$$

Θεώρημα (3)

Θεώρημα. Η κατάσταση ισορροπίας στην αρχή των συντεταγμένων του $\mathbb{R}^n$ ή η μηδενική λύση $x(t; x_e, t_0) = x_e = 0$ του συστήματος (1), είναι **ασυμπτωτικά ευσταθής** (κατά Lyapunov) αν σε μία περιοχή $S_k(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq k, k > 0\}$ της αρχής των συντεταγμένων του $\mathbb{R}^n$ υπάρχει μία συνάρτηση Lyapunov $V(x)$ τέτοια ώστε η παράγωγος της $\dot{V}(x)$ υπολογισμένη επάνω στις λύσεις $x(t; x_e, t_0)$ της (1) είναι αρνητικά ορισμένη, αν δηλαδή

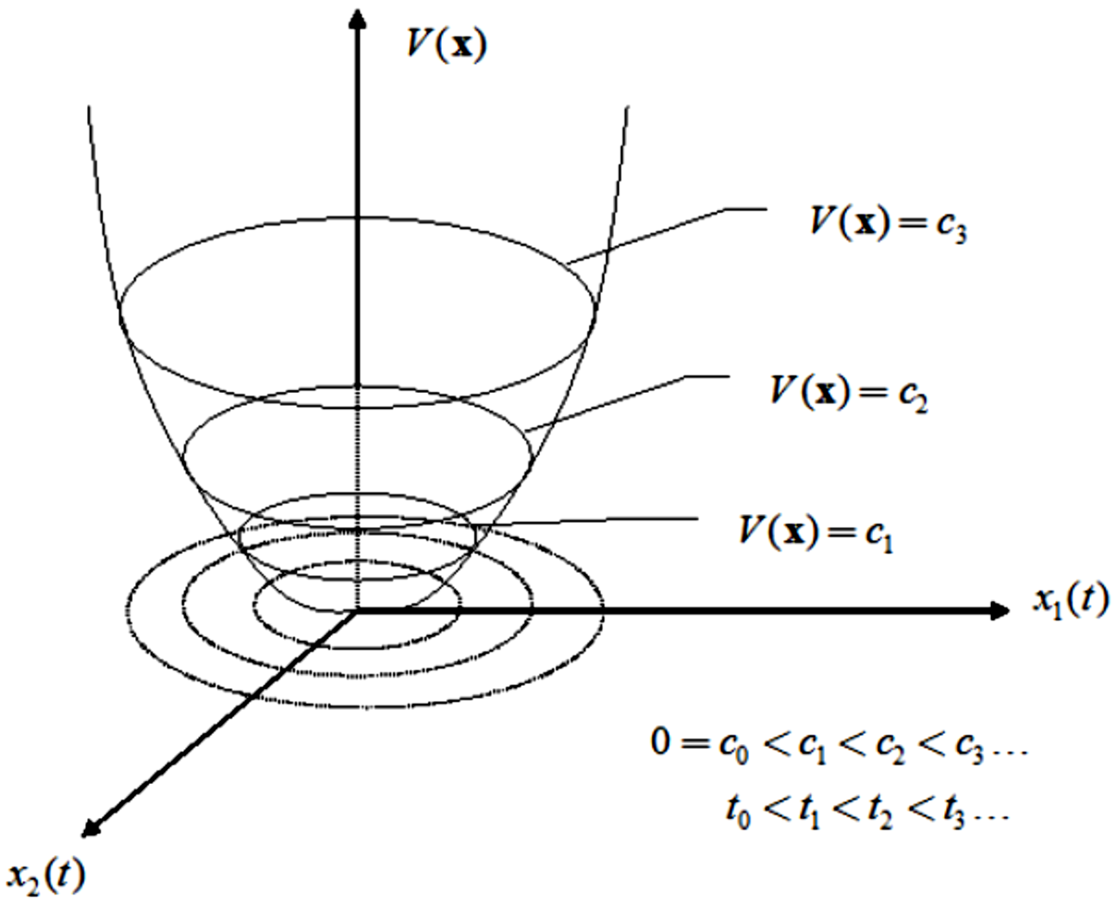
$$\frac{dV\big(x(t)\big)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V\big(x(t)\big)}{dx_i} f_i(x) < 0.$$

Ασυμπτωτική ευσταθεια της κατάστασης ισορροπίας στην αρχή των αξόνων (1)



Ασυμπτωτική ευσταθεια της κατάστασης ισορροπίας στην αρχή των αξόνων στον $\mathbb{R}^2$.

Ασυμπτωτική ευσταθεια της κατάστασης ισορροπίας στην αρχή των αξόνων (2)



Παράδειγμα 8

Έστω το σύστημα

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$x_e = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V(x) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x_1(t)\dot{x}_1(t) + 2x_2(t)\dot{x}_2(t) \\ &= 2x_1(t)x_2(t) - 2x_2(t)x_1(t) = 0 \end{aligned}$$

Ευσταθής κατά Lyapunov.

Παράδειγμα 9

Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) - x_2^3(t) \end{cases}$$

$$x_e = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V(x) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$$

$$\dot{V}(x) = 2x_1(t)\dot{x}_1(t) + 2x_2(t)\dot{x}_2(t) =$$

$$= 2x_1(t)[-x_1(t) + x_2(t)] + 2x_2(t)[-x_1(t) - x_2(t) - x_2^3(t)]$$

$$= -2x_1^2(t) - 2x_2^2(t) - 2x_2^4(t)$$

$$= -2x_1^2(t) - 2x_2^2(t)[1 + x_2^2(t)]$$

$$\dot{V}(0) = 0 \; x(t) \neq 0, \dot{V}(x) < 0$$

$\dot{V}(x)$ είναι αρνητικά ημι-ορισμένη.

Ευσταθής κατά Lyapunov

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$
$$x(t) = x(t; x_0, 0) = e^{At}x_0$$

Ευσταθής κατά Lyapunov

Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \xrightarrow{\forall t \geq t_0} \|x(t; x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon$$

Κατάσταση ισορροπίας $x_e \rightarrow x_e = e^{At}x_e$

Θεώρημα 4 (1)

Θεώρημα. Κάθε κατάσταση ισορροπίας x_e της (1) είναι ευσταθής (κατά Lyapunov) αν και μόνο αν ο πίνακας e^{At} είναι φραγμένος ή ισοδύναμα αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά k τέτοια ώστε $\|e^{At}\| \leq k < \infty, \forall t \geq 0.$

(⇒) Έστω ότι υπάρχει σταθερά k τέτοια ώστε

$$\|e^{At}\| \leq k \leq \infty$$

x_e μία κατάσταση ισορροπίας

$$x(t) - x_e = e^{At}(x_0 - x_e)$$

$$\|x(t) - x_e\| = \|e^{At}(x_0 - x_e)\| \leq \|e^{At}\|\|x_0 - x_e\|$$

$$\leq k\|x_0 - x_e\| \leq k\delta = \varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon > 0, \delta = \frac{\varepsilon}{k}.$

Θεώρημα 4 (2)

$(\Leftarrow) x_e$ είναι ευσταθής

ο e^{At} δεν είναι φραγμένος

τουλάχιστον ένα στοιχείο $\psi_{ij}(t)$ του e^{At} δεν είναι φραγμένο

$$\lim_{t \to \infty} \left| \psi_{ij}(t) \right| \to \infty$$

x_0 έτσι ώστε

$$x_0 - x_e = [0 \quad 0 \quad \dots \quad a_j \quad \dots \quad 0]^T, a_j \neq 0$$

$$x(t) - x_e = [\psi_{1j}(t) \quad \psi_{2j}(t) \quad \dots \quad \psi_{ij}(t) a_j \quad \dots \quad \psi_{nj}(t)]^T$$

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t) - x_e\| \to \infty \to x_e \text{ δεν είναι ευσταθής}$$

Νόρμα του e^{At} (1)

$J = Q^{-1}AQ$ κανονική μορφή Jordan

$$J := block\ diag[J_1 \quad J_2 \quad \dots \quad J_r] \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$J_i := block\ diag[J_{i1} \quad J_{i2} \quad \dots \quad J_{in}] \in \mathbb{R}^{m_i\times m_i}$$

$$m_i := m_{i1} + m_{i2} + \cdots + m_{in}, \qquad i = 1,2,\dots,r$$

ιδιοτιμή λ_i

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_{ij}\times m_{ij}}$$

$$\boxed{e^{At} = Qe^{Jt}Q^{-1}}$$

Νόρμα του e^{At} (2)

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_r t} \end{bmatrix}$$

$$e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{J_{i1} t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_{i2} t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_{ir} t} \end{bmatrix}$$

Νόρμα του e^{At} (3)

$$e^{J_{ij}t} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1!}t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots & \frac{1}{(m_{ij}-1)!}t^{m_{ij}-1} \\ 0 & 1 & \frac{1}{1!}t & \dots & \frac{1}{(m_{ij}-2)!}t^{m_{ij}-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(m_{ij}-3)!}t^{m_{ij}-3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{1!}t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_i t}$$

$$\boxed{\|e^{Jt}\| = \|Q^{-1}e^{At}Q\| = \|Q^{-1}\|\|e^{At}\|\|Q\|}$$

Νόρμα του e^{At} (4)

$$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \to t^k e^{\sigma_i t + j\omega_i t}$$

όπου $k = 0,1,2,\ldots,m_{ij} - 1$.

- $Re(\lambda_i) = \sigma_i < 0 \to t^k e^{\sigma_i t + j\omega_i t}$ είναι φραγμένη.
- $Re(\lambda_i) = \sigma_i = 0 \to t^k e^{\sigma_i t + j\omega_i t}$ είναι φραγμένη αν και μόνο αν $k = 0$.

Θεώρημα 5 (1)

Θεώρημα. Κάθε κατάσταση ισορροπίας x_e της (1) είναι ευσταθής (κατά Lyapunov), αν και μόνο αν

- όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_i, i = 1,2,..,r$ του A έχουν πραγματικό μέρος $Re(\lambda_i) \leq 0$ και
- οι ιδιοτιμές λ_i με πραγματικό μέρος $Re(\lambda_i) = 0, i = 1,2, \dots, q$

αποτελούν απλές ρίζες του ελάχιστου πολυωνύμου $\psi_n(s)$ του Α, έχουν δηλαδή πολλαπλότητες $m_{ij} = 1$ για $i = 1,2, \dots, q$.

Ισοδύναμα η κατάσταση ισορροπίας x_e της (1) είναι ευσταθής (κατά Lyapunov) αν και μόνο αν το <u>ελάχιστο πολυώνυμο $\psi_n(s)$</u> του Α έχει τη μορφή

Θεώρημα 5 (2)

$$\psi_n(s) = (s-\lambda_1)^{m_{1n}}(s-\lambda_2)^{m_{2n}} \dots (s-\lambda_r)^{m_{rn}}$$
$$= s^{m_{1n}} \prod_{i=2}^{q} (s-j\omega_i)^{m_{in}} \prod_{i=r-q}^{r} (s-\lambda_i)^{m_{in}}$$

όπου $m_{1n} = 0{,}1, m_{in} = 0{,}1, i = 2{,}3, \dots, q\ και\ Re(\lambda_i) < 0,$
$i = r-q, r-q+1, .., r.$

Ισοδύναμα, αν J είναι η κανονική μορφή Jordan του A τότε τα Jordan blocks που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_i με $Re(\lambda_i) = 0$ έχουν όλα διαστάσεις 1×1 και όλα τα Jordan blocks που έχουν διαστάσεις ίσες ή μεγαλύτερες με 2×2 αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές λ_i με $Re(\lambda_i) < 0$.

Παράδειγμα 10 (1)

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

- $sI_3 - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}$

Ιδιοτιμές:

- $\lambda_1 = 0$ με πολλαπλότητα 2
- $\lambda_2 = -1$

Παράδειγμα 10 (2)

- $m_0(s) := 1, m_1(s) = MK\Delta\{s, s, s+1,0,0,0,0,0,0\} = 1$

$$\psi_1(s) = \frac{m_1(s)}{m_0(s)} = 1$$

- $m_2(s) = MK\Delta\{s^2, 0,0,0, s(s+1), s(s+1), 0\} = s$

$$\psi_2(s) = \frac{m_2(s)}{m_1(s)} = s$$

- $m_3(s) = det(sI_3 - A) = s^2(s+1)$

$$\psi_3(s) = \frac{m_3(s)}{m_2(s)} = s(s+1)$$

Παράδειγμα 10 (3)

$$J_1 = \begin{bmatrix} J_{12} & 0 \\ 0 & J_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $e^{J_1 t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $J_{23} = J_2 = -1, e^{J_2 t} = e^{-t}$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Ευσταθής κατά Lyapunov.

Παράδειγμα 11

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

$$\psi_1(s) = \psi_2(s) = 1, \psi_3(s) = s^2(s+1)$$

- $J_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = J_1,\ e^{J_{13}t} = e^{J_1 t} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $J_{23} = -1 = J_2, e^{J_2 t} = e^{-t}$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Θεώρημα 6 (1)

Θεώρημα. Η κατάσταση ισορροπίας $x_e = 0$ της (1) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_i, i = 1,2,..,r$ του $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, αν δηλαδή $Re(\lambda_i) < 0, i = 1,2,..,r$.

Ορισμός. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ του οποίου όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_i, i = 1,2,..,r$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος ονομάζεται ασυμπτωτικά ευσταθής.

$$V(x) = x^T R x, \qquad R = R^T > 0$$

$$\dot{V}\big(x(t)\big) < 0$$

Θεώρημα 6 (2)

$$\dot{V}\big(x(t)\big) = \dot{x}^T(t)Rx(t) + x^T(t)R\dot{x}(t) =$$
$$= x^T(t)A^TRx(t) + x^T(t)RAx(t) = x^T(t)(A^TR + RA)x(t)$$

Αν ορίσουμε

$$A^TR + RA := -Q$$

τότε

$$\dot{V}\big(x(t)\big) = \frac{d}{dt}V\big(x(t)\big) = -x^T(t)Qx(t)$$

όπου $Q = Q^T > 0$.

Θεώρημα (Lyapunov) (1)

Θεώρημα (Lyapunov)

Όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i, i = 1,2,\ldots,n$ του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος

$$Re(\lambda_i) = \sigma_i < 0, i = 1,2,\ldots,n$$

(ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής) αν και μόνο αν για κάθε συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (δηλαδή για κάθε $Q = Q^T > 0$) η λύση $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ της εξίσωσης Lyapunov

$$A^T R + RA := -Q$$

είναι συμμετρική και θετικά ορισμένη.

Θεώρημα (Lyapunov) (2)

1. Διαλέγουμε ένα αυθαίρετο αλλά συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα Q π.χ. τον μοναδιαίο πίνακα I_n.
2. Λύνουμε την εξίσωση Lyapunov $A^T R + RA := -Q$ ως προς R.
3. Αν ο πίνακας R είναι θετικά ορισμένος, τότε ο πίνακας A είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Αν ο πίνακας R δεν είναι θετικά ορισμένος τότε ο πίνακας A δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Παράδειγμα 12 (1)

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Έχει ιδιοτιμές: -1,-1, είναι ασυμπτωτικά ευσταθής

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = -(A^T R + RA) = -\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ο Q είναι αόριστος

Παράδειγμα 12 (2)

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = -(A^T R + RA) \to R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \end{bmatrix}$$

R είναι θετικά ορισμένος

Παράδειγμα 12 (3)

In[5]:= `a = {{-1, 3}, {0, -1}};`

In[6]:= `p = {{`r_{11}, r_{12}`}, {`r_{21}, r_{22}`}}`

Out[6]= $\{\{r_{11}, r_{12}\}, \{r_{21}, r_{22}\}\}$

In[7]:= `Reduce[Transpose[a].p + p.a == -IdentityMatrix[2], {`r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}`}]`

Out[7]= $r_{11} == \frac{1}{2}\ \&\&\ r_{12} == \frac{3}{4}\ \&\&\ r_{21} == \frac{3}{4}\ \&\&\ r_{22} == \frac{11}{4}$

Θεώρημα (Lyapunov) (3)

Θεώρημα (Lyapunov)

Όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i, i = 1,2, \dots, n$ του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος

$$Re(\lambda_i) = \sigma_i < 0, i = 1,2, \dots, n$$

(ο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής) αν και μόνο αν για κάθε συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (δηλαδή για κάθε $Q = Q^T > 0$) η λύση $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ της εξίσωσης Lyapunov

$$A^T R + RA := -Q$$

είναι συμμετρική και θετικά ορισμένη.

Θεώρημα (Lyapunov) (4)

Λύση

$$R = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

Το ολοκλήρωμα είναι **καλά ορισμένο** (πεπερασμένο) δεδομένου ότι ο πίνακας A είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και συνεπώς η νόρμα του πίνακα μέσα στο ολοκλήρωμα συγκλίνει στο μηδέν εκθετικά καθώς ο χρόνος πάει στο άπειρο. Συνεπώς το ολοκλήρωμα συγκλίνει απολύτως.

Ο πίνακας R ικανοποιεί την εξίσωση:

Θεώρημα (Lyapunov) (5)

$$A^T R + RA = A^T \left[\int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt\right] + \left[\int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt\right] A =$$

$$= \int_0^\infty A^T e^{A^T t} Q e^{At} dt + \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} A dt =$$

$$= \int_0^\infty \left[A^T e^{A^T t} Q e^{At} + e^{A^T t} Q e^{At} A\right] dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[e^{A^T t} Q e^{At}\right] dt =$$

$$= \left[e^{A^T t} Q e^{At}\right]_0^{+\infty} = \lim_{t\to\infty} e^{A^T t} Q e^{At} - \left[e^{A^T \times 0} Q e^{A \times 0}\right] = -Q$$

Θεώρημα (Lyapunov) (6)

Ο πίνακας R είναι συμμετρικός:

$$R^T = \int_0^{+\infty} \left[e^{A^T t} Q e^{At}\right]^T dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[[e^{At}]^T Q^T \left[e^{A^T t}\right]^T\right]^T dt \xrightarrow{Q=Q^T} \int_0^{+\infty} \left[e^{A^T t} Q e^{At}\right]^T dt = R$$

Ο πίνακας R είναι θετικά ορισμένος:

- $z^T R z = \int_0^{+\infty} z^T e^{A^T t} Q e^{At} z dt = \int_0^{+\infty} w^T(t) Q w(t) dt \geq 0, Q > 0$
- $z^T R z = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} w^T(t) Q w(t) dt = 0 \Rightarrow w(t) = 0 \Rightarrow e^{At} z = 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow z = 0$

Θεώρημα (Lyapunov) (7)

Η λύση R είναι μοναδική:

$$A^T R_1 + R_1 A = -Q$$

$$A^T R_2 + R_2 A = -Q$$

$$A^T (R_1 - R_2) + (R_1 - R_2) A = 0$$

$$e^{A^T t} A^T (R_1 - R_2) e^{At} + e^{A^T t} (R_1 - R_2) A e^{At} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[e^{A^T t}(R_1 - R_2)e^{At}\right] = 0 \Rightarrow e^{A^T t}(R_1 - R_2)e^{At} = c \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{t\to\infty} e^{A^T t}(R_1 - R_2)e^{At} = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$R_1 = R_2$$

Παράδειγμα 13

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = I_2, R = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

```
In[2]:= a = {{-1, 3}, {0, -1}};

In[5]:= r = Integrate[MatrixExp[Transpose[a] t].IdentityMatrix[2].
          MatrixExp[a t], {t, 0, Infinity}]
```

Out[5]= $\left\{\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}, \left\{\frac{3}{4}, \frac{11}{4}\right\}\right\}$

```
In[4]:= Det[r]
```

Out[4]= $\frac{13}{16}$

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012*, Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου.* Εκδόσεις Τζιόλα*.*
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 15. Ευστάθεια Συστημάτων (Ευστάθεια Lyapunov - Ασυμπτωτική Ευστάθεια)». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης