Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 19. Επανατοποθέτηση πόλων σε συστήματα πολλών εισόδων

Νίκος Καραμπετάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Μετατροπή σε ελέγξιμη μορφή.
- Υπολογισμός ελεγκτή.

Σκοποί Ενότητας

- Περιγραφή της διαδικασίας επανατοποθέτησης πόλων σε συστήματα πολλών εισόδων (κατασκευή ελεγκτή).

Μετατροπή σε ελέγξιμη μορφή (1)

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Βήμα 1. Ορίζουμε μετασχηματισμό:

$$\tilde{x}(t) = T^{-1}x(t) \Rightarrow x(t) = T\tilde{x}(t),$$

τέτοιον ώστε να πάρουμε το σύστημα στην ελέγξιμη μορφή:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t)$$

Μετατροπή σε ελέγξιμη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -9 & 0 & 0 \\ 11 & 5 & -17 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -14 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & -7 & -1 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Μετατροπή σε ελέγξιμη μορφή (2)

- $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, rank b_1 = 1$
- $Ab_1 = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -9 & 0 & 0 \\ 11 & 5 & -17 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -14 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & -7 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$rank[b_1 \quad Ab_1] = rank \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right] = 2$$

Μετατροπή σε ελέγξιμη μορφή (3)

- $$A^2 b_1 = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -9 & 0 & 0 \\ 11 & 5 & -17 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -14 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & -7 & -1 & 5 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$rank[b_1 \quad Ab_1 \quad A^2 b_1] = rank \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] = 3$$

Μετατροπή σε ελέγξιμη μορφή (4)

- $A^3 b_1 = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -9 & 0 & 0 \\ 11 & 5 & -17 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -14 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & -7 & -1 & 5 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 8 \\ 42 \\ 18 \end{bmatrix}$

$$rank[b_1 \quad Ab_1 \quad A^2 b_1 \quad A^3 b_1] = rank \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 11 & 42 \\ 0 & 1 & 5 & 18 \end{array}\right] = 3$$

Άρα $\boldsymbol{\mu_1 = 3}$.

Μετατροπή σε ελέγξιμη μορφή (5)

- $b_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- $rank[b_1 \quad Ab_1 \quad A^2b_1 \quad b_2] = rank\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right] = 4$

Μετατροπή σε ελέγξιμη μορφή (6)

- $Ab_2 = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -9 & 0 & 0 \\ 11 & 5 & -17 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -14 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & -7 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $rank[b_1 \quad Ab_1 \quad A^2b_1 \quad b_2 \quad Ab_2] = rank \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 8 & 5 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 11 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \end{array}\right] = 5$

Άρα $\mu_2 = 2$.

Μετατροπή σε ελέγξιμη μορφή (7)

Ορίζουμε τον πίνακα

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 8 & 5 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 11 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 8 & 5 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 11 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 & 6 & -14 \\ 6 & 2 & -10 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -6 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Μετατροπή σε ελέγξιμη μορφή (8)

Επιλέγουμε την 3η γραμμή ($\mu_1 = 3$) έστω e_3 και την 5η γραμμή ($\mu_1 + \mu_2 =5$) έστω e_5 και σχηματιζούμε τον πίνακα

$$T = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_3A \\ e_3A^2 \\ e_5 \\ e_5A \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 & -1 & 3 \\ 8 & -8 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Μετατροπή σε ελέγξιμη μορφή (9)

- $e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
- $e_3 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -9 & 0 & 0 \\ 11 & 5 & -17 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -14 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & -7 & -1 & 5 \end{bmatrix} =$

  $= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$
- $e_3 A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -9 & 0 & 0 \\ 11 & 5 & -17 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -14 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & -7 & -1 & 5 \end{bmatrix}^2 =$

  $= \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{-7} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$

Μετατροπή σε ελέγξιμη μορφή (10)

- $e_5 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $e_5 A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -9 & 0 & 0 \\ 11 & 5 & -17 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -14 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & -7 & -1 & 5 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Μετατροπή σε ελέγξιμη μορφή (11)

- $\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
- $\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Υπολογισμός ελεγκτή (1)

Βήμα 2. Υπολογίζουμε τον ελεγκτή (controller) για το σύστημα στην κανονική μορφή

$$u(t) = \bar{K}\bar{x}(t)$$

$$F = \tilde{A} + \tilde{B}\widetilde{K} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{24} & k_{25} \end{bmatrix}$$

$$=$$

Υπολογισμός ελεγκτή (2)

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_{11}+8 & k_{12}-12 & k_{13}+6 & 2k_{24} & 2k_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k_{24}-1 & k_{25}+2 \end{bmatrix}
$$

$$
\equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -f_{1,0} & -f_{1,1} & -f_{1,2} & x & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -f_{2,0} & -f_{2,1} \end{bmatrix}
$$

Υπολογισμός ελεγκτή (3)

Επιθυμητά πολυώνυμα:

$$(s-5+2i)(s-5-2i)=s^2-10s+29$$
$$=s^2+f_{2,1}s+f_{2,0}$$

$$(s+3)(s+2-i)(s+2+i)=s^3+7s^2+17s+15$$
$$=s^3+f_{1,2}s^2+f_{1,1}s+f_{1,0}$$

$$\boxed{\begin{cases}-f_{1,0}=-15=k_{11}+8\\ -f_{1,1}=-17=k_{12}-12\\ -f_{1,2}=-7=k_{13}+6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_{11}=-23\\ k_{12}=-5\\ k_{13}=-13\end{cases}}$$

Υπολογισμός ελεγκτή (4)

$$\boxed{\begin{cases} -f_{2,0} = -29 = k_{24} - 1 \\ -f_{2,1} = 10 = k_{25} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_{24} = -28 \\ k_{25} = 8 \end{cases}}$$

$$\widetilde{K} = \begin{bmatrix} -23 & -5 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -28 & 8 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός ελεγκτή (5)

Επιθυμητά πολυώνυμα:

$$(s-5+2i)(s-5-2i)=s^2-10s+29$$

$$(s+3)(s+2-i)(s+2+i)=s^3+7s^2+17s+15$$

- $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -12 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -23 & -5 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -28 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & -17 & -7 & -56 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -29 & 10 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός ελεγκτή (6)

Βήμα 3. Ο ελεγκτής που ψάχνουμε έχει την μορφή:

$$u(t) = Kx(t) + v(t) = \underbrace{KT}_{\widetilde{K}}\,\tilde{x}(t) + v(t)$$

$$K = \widetilde{K}T^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -23 & -5 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -28 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$K = \begin{bmatrix} 52 & -26 & 91 & -28 & -1 \\ 68 & 20 & -108 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός ελεγκτή (7)

Βήμα 3. Ο ελεγκτής που ψάχνουμε έχει την μορφή:

$$u(t) = \underbrace{\widetilde{K}T^{-1}}_{K} x(t) + v(t)$$

$$K = \widetilde{K}T^{-1} = \begin{bmatrix} 52 & -26 & 91 & -28 & -1 \\ 68 & 20 & -108 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση

Άσκηση. Προσπαθήστε να επανατοποθετήσετε τους πόλους του παρακάτω συστήματος (αν αυτό είναι εφικτό), με ανάδραση κατάστασης στο -1 με αλγεβρική πολλαπλότητα 3.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012*, Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου.* Εκδόσεις Τζιόλα*.*
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977*, Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Chen C.T., 1970*, Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980*, Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 19. Επανατοποθέτηση πόλων σε συστήματα πολλών εισόδων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης