ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 20. Παρατηρητής Κατάστασης

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Παρατήρηση του ανύσματος κατάστασης.
- Παρατηρητές ή εκτιμητές του ανύσματος κατάστασης γραμμικού συστήματος.
- Ανοικτός παρατηρητής.
- Κλειστός εκτιμητής ή παρατηρητής του Luenberger.
- Σφάλμα στον προσδιορισμό της αρχικής συνθήκης του ανύσματος κατάστασης.

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη της κατασκευής ενός ανοικτού παρατηρητή ή εκτιμητή του ανύσματος κατάστασης.
- Μελέτη της κατασκευής ενός κλειστού εκτιμητή ή παρατηρητή του Luenberger.

Παρατήρηση του ανύσματος κατάστασης (State observation) (1)

Θεωρούμε ένα γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα Σ μίας εισόδου και μίας εξόδου του οποίου η χρονική συμπεριφορά περιγράφεται από τις εξισώσεις του χώρου των καταστάσεων:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \textbf{(1)}$$

$$y(t) = Cx(t) \quad \textbf{(2)}$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times 1}, C \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

Θεωρούμε ότι η είσοδος $u(t)$ είναι γνωστή συνάρτηση για $t > 0$ και $u(t) = 0$ για $t \leq 0$.

Θεωρούμε ότι η έξοδος $y(t)$ μπορεί να μετρηθεί και είναι γνωστή για κάθε $t \geq 0$.

Παρατήρηση του ανύσματος κατάστασης (State observation) (2)

Τέλος θεωρούμε ότι το άνυσμα κατάστασης

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, t \geq 0$$

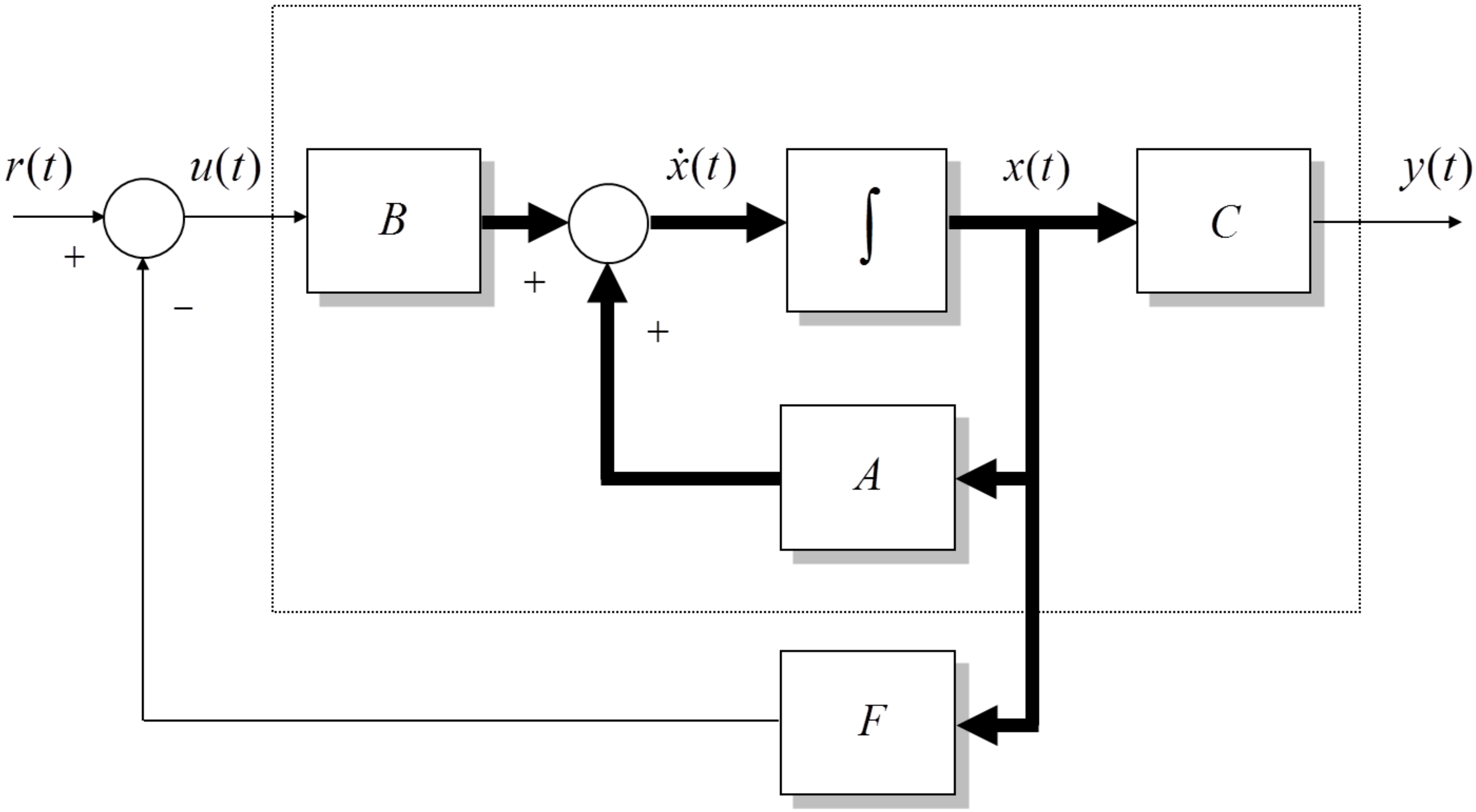
του Σ είναι άγνωστο (δηλαδή οι καταστάσεις $x_i(t), i = 1,2, \dots n$ δεν μπορούν όλες να μετρηθούν για κάθε $t \geq 0$).

Σε μια τέτοια περίπτωση και προκειμένου να εφαρμόσουμε ανατροφοδότηση του ανύσματος κατάστασης $x(t)$ με βάση την

$$u(t) = r(t) - Fx(t)$$

(βλέπε σχήμα 1)

Παρατήρηση του ανύσματος κατάστασης (State observation) (3)



Σχήμα 1

Παρατήρηση του ανύσματος κατάστασης (State observation) (4)

έτσι ώστε (επιλέγοντας τον πίνακα F) να μπορέσουμε να επιλέξουμε αυθαίρετα τις ιδιοτιμές του πίνακα $A - BF$ του κλειστού συστήματος Σ_F που θα προκύψει, αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα του προσδιορισμού του ανύσματος κατάστασης $x(t)$ για $t > 0$ κάνοντας χρήση των γνωστών πινάκων A, B, C και των $u(t), y(t)$ για $t > 0$.

Παρατηρητές ή εκτιμητές του ανύσματος κατάστασης (State observers)

Ποιος ο σκοπός του ***παρατηρητή ή εκτιμητή του ανύσματος κατάστασης*** ενός γραμμικού συστήματος ;

Ο προσδιορισμός μιας εκτίμησης (παρατήρησης) $\hat{x}(t)$ του ανύσματος κατάστασης $x(t)$ του Σ κάνοντας χρήση των γνωστών ποσοτήτων A , B , C, $u(t)$ και $y(t)$ για $t \geq 0$.

Ανοικτός παρατηρητής (Open loop observer) (1)

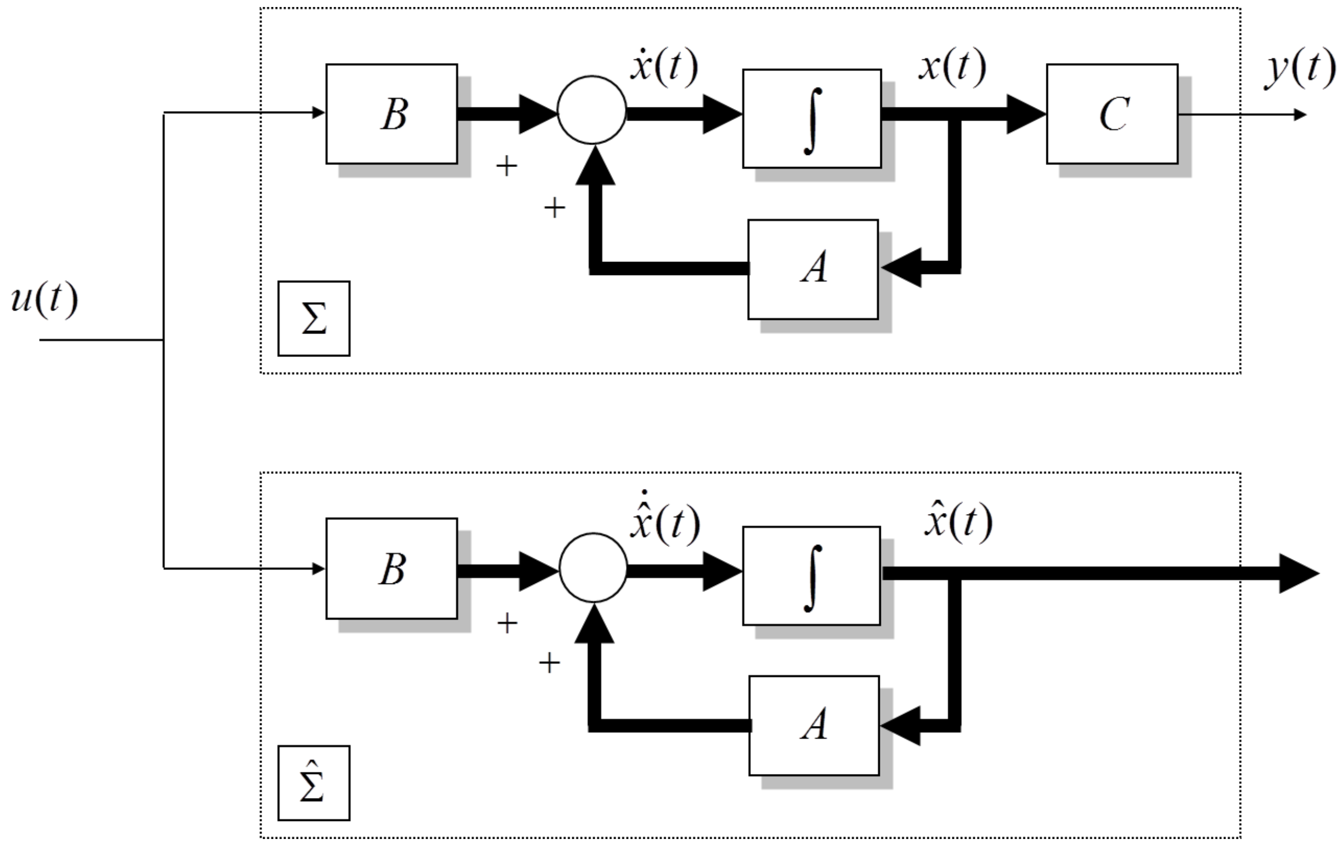
Γνώση των πινάκων A , B , C που περιγράφουν το σύστημα Σ συνεπάγεται τη δυνατότητα, μέσω προσομοίωσης (simulation), κατασκευής ενός νέου συστήματος $\hat{\Sigma}$ του οποίου η είσοδος ταυτίζεται με την είσοδο $u(t)$ του συστήματος Σ και του οποίου η χρονική συμπεριφορά περιγράφεται από την εξίσωση

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \quad \textbf{(3)}$$

Λόγω της (3), η κατάσταση $\hat{x}(t)$ του $\hat{\Sigma}$ αποτελεί εκτίμηση της κατάστασης $x(t)$ του Σ, δηλαδή

$$\hat{x}(t) = x(t), t \geq 0$$

Ανοικτός παρατηρητής (Open loop observer) (2)



Σχήμα 2

Ανοικτός παρατηρητής (Open loop observer) (3)

αν η αρχική κατάσταση $\hat{x}(0)$ του $\hat{\Sigma}$ ισούται με την αρχική κατάσταση $x(0)$ του Σ.

Για το λόγο αυτό το σύστημα $\hat{\Sigma}$ ονομάζεται **ανοικτός παρατηρητής** ή **ανοικτός εκτιμητής** (**open loop observer**).

Άρα το πρόβλημα της παρατήρησης ή της εκτίμησης $\hat{x}(t)$ της κατάστασης $x(t)$ του Σ, περιορίζεται στον προσδιορισμό της αρχικής κατάστασης $x(0)$ του Σ.

Παραγωγίζοντας την (2) $n-1$ φορές και λαμβάνοντας υπόψη την (1) έχουμε διαδοχικά

Ανοικτός παρατηρητής (Open loop observer) (4)

- $y(t) = Cx(t)$
- $\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = C[Ax(t) + Bu(t)] = CAx(t) + CBu(t)$
- $\ddot{y}(t) = CA\dot{x}(t) + CB\dot{u}(t) = CA[Ax(t) + Bu(t)] + CB\dot{u}(t) =$
$$= CA^2x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t)$$
- $\dddot{y}(t) = CA^2\dot{x}(t) + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t) =$
$$= CA^2[Ax(t) + Bu(t)] + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t) =$$
$$= CA^3x(t) + CA^2Bu(t) + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t)$$
$$\vdots$$

Ανοικτός παρατηρητής (Open loop observer) (5)

- $y(t)^{(n-1)} = CA^{n-1}x(t) + CA^{n-2}Bu(t) + \cdots + CABu(t)^{(n-3)} + CBu(t)^{(n-2)}$

Γράφοντας τις παραπάνω εξισώσεις υπό μορφή πινάκων έχουμε

Ανοικτός παρατηρητής (Open loop observer) (6)

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \dddot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(t) +$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CB & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ CA^{n-2}B & CA^{n-3}B & CA^{n-4}B & \dots & CB & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ \ddot{u}(t) \\ \\ u^{(n-2)}(t) \\ u^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Ανοικτός παρατηρητής (Open loop observer) (7)

Εφόσον $u(t) = 0$ για $t \leq 0$, η παραπάνω εξίσωση για $t = 0$ δίνει την

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \\ \dddot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0)$$

Ανοικτός παρατηρητής (Open loop observer) (8)

Αν το Σ είναι παρατηρήσιμο, αν δηλαδή

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

τότε η αρχική κατάσταση $x(0)$ μπορεί να προσδιοριστεί από την

$$x(0) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}$$

αν η έξοδος $y(t)$ και οι παράγωγοι της μέχρι της τάξης $n - 1$

$\dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ είναι γνωστές για $t = 0$.

Ανοικτός παρατηρητής (Open loop observer) (9)

Η παραπάνω ανάλυση δείχνει ότι η γνώση:

- των πινάκων A, B, C,
- της εισόδου $u(t)$ για $t \geq 0$ και
- των τιμών της εξόδου και των παραγώγων της (μέχρι την παράγωγο $n-1$ τάξης) για $t = 0$:

$$y(0), \dot{y}(0), \ddot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$$

επιτρέπει την κατασκευή ενός ανοικτού παρατηρητή $\hat{\Sigma}$ με αρχική κατάσταση ίση με την αρχική κατάσταση $x(0)$ του συστήματος του οποίου το άνυσμα κατάστασης επιθυμούμε να εκτιμήσουμε, δηλαδή:

$$\hat{x}(0) = x(0)$$

Ανοικτός παρατηρητής (Open loop observer) (10)

και άρα επιτρέπει τον προσδιορισμό μιας εκτίμησης $\hat{x}(t)$ της κατάστασης $x(t)$ του συστήματος Σ.

Ας σημειωθεί ότι, αν και υποθέσαμε ότι η έξοδος $y(t)$ μπορεί να μετρηθεί και άρα είναι γνωστή για κάθε $t \geq 0$, κατά τον προσδιορισμό της εκτίμησης $\hat{x}(t)$ της κατάστασης $x(t)$ του συστήματος Σ μέσω του ανοικτού παρατηρητή, δεν κάναμε χρήση της $y(t)$ για $t > 0$ και αυτό έχει επιπτώσεις.

Σφάλμα στον προσδιορισμό της $x(0)$ (1)

Έστω μικρό σφάλμα στον προσδιορισμό της αρχικής κατάστασης $x(0)$, έστω δηλαδή ότι αντί της $x(0)$ έχουμε προσδιορίσει ως αρχική κατάσταση την

$$\hat{x}(0) = x(0) - \varepsilon_0$$

όπου ε_0 είναι το σφάλμα στον προσδιορισμό της $x(0)$ και όπου υποθέτουμε ότι $\|\varepsilon_0\| \ll \|x(0)\|$.

Η επίδραση του σφάλματος αυτού κατά τον προσδιορισμό της $x(0)$ έχει επιπτώσεις στον προσδιορισμό της εκτίμησης $\hat{x}(t)$ για $t > 0$.

Σφάλμα στον προσδιορισμό της $x(0)$ (2)

Λόγω του σφάλματος στον προσδιορισμό της αρχικής κατάστασης $x(0)$, η κατάσταση $\hat{x}(t)$ του ανοικτού παρατηρητή $\hat{\Sigma}$ διαφέρει από την κατάσταση $x(t)$ του συστήματος Σ. Έστω

$$\varepsilon(t) \coloneqq x(t) - \hat{x}(t) \quad \textbf{(4)}$$

το σφάλμα κατά την χρονική στιγμή $t > 0$ μεταξύ της κατάστασης $x(t)$ του συστήματος Σ και της κατάστασης $\hat{x}(t)$ του ανοικτού παρατηρητή $\hat{\Sigma}$.

Σφάλμα στον προσδιορισμό της $x(0)$ (3)

Παραγωγίζοντας την (4) βλέπουμε ότι το σφάλμα $\varepsilon(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) =$$
$$= A[x(t) - \hat{x}(t)] = A\varepsilon(t) \quad \textbf{(5)}$$

με αρχική συνθήκη την

$$\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0) = x(0) - x(0) + \varepsilon_0 = \varepsilon_0$$

Η λύση της (5) είναι

$$\varepsilon(t) = e^{At}\varepsilon_0$$

και αν ο πίνακας A έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή στο ανοικτό θετικό ημι-επίπεδο $\mathbb{C}^+$ (αν δηλαδή το σύστημα Σ είναι ασταθές), τότε

$$\lim\|\varepsilon(t)\| \to \infty$$

Σφάλμα στον προσδιορισμό της $x(0)$ (4)

Άρα το σφάλμα $\varepsilon(t)$ μεταξύ της κατάστασης $x(t)$ του συστήματος Σ και της κατάστασης $\hat{x}(t)$ του ανοικτού παρατηρητή $\hat{\Sigma}$ αυξάνεται με τον χρόνο οσοδήποτε μικρό και αν είναι το σφάλμα ε_0 στον προσδιορισμό της αρχικής κατάστασης $x(0)$ του Σ.

Συμπέρασμα

- *Ένας ανοικτός παρατηρητής της κατάστασης $x(t)$ ενός ασταθούς συστήματος Σ δίνει λάθος εκτίμηση $\hat{x}(t)$ της $x(t)$ της οποίας η διαφορά $\varepsilon(t)$ από την $x(t)$ συνεχώς αυξάνει με τον χρόνο t.*

Παράδειγμα (1)

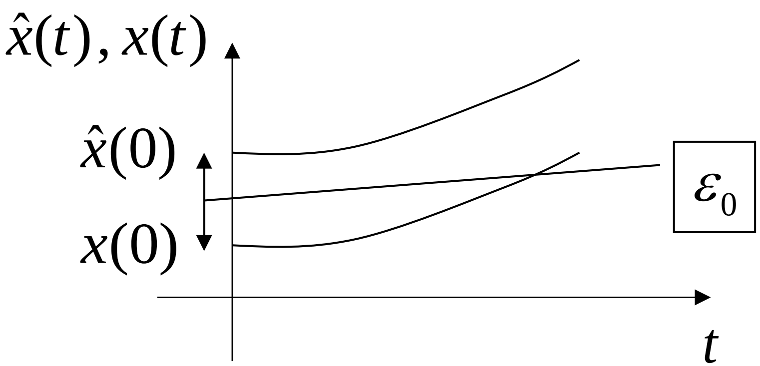
Έστω το ασταθές σύστημα με μια μόνο κατάσταση $(n = 1)$

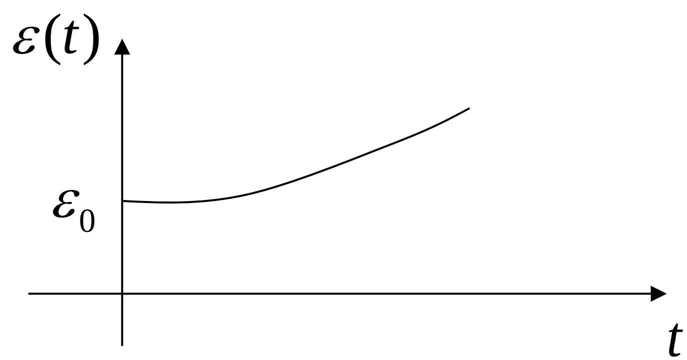
$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$$

$(A = 1 \in \mathbb{R}^{1\times 1} = \mathbb{R})$ του οποίου ζητάμε μία εκτίμηση $\hat{x}(t)$ της κατάστασης $x(t)$. Έστω $x(0) \neq \hat{x}(0)$ και $\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0) = \varepsilon_0$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = [x(t) - \hat{x}(t)] = \varepsilon(t) \Rightarrow$$

$$\varepsilon(t) = e^{t}\varepsilon_0$$





Παράδειγμα (2)

Άρα το σφάλμα $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ μεταξύ της κατάστασης $x(t)$ και της εκτίμησης $\hat{x}(t)$ της κατάστασης αυξάνει συνεχώς με την πάροδο του χρόνου.

Κλειστός εκτιμητής ή παρατηρητής του Luenberger (1)

Θεωρούμε ένα γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα Σ μίας εισόδου και μίας εξόδου του οποίου η χρονική συμπεριφορά περιγράφεται από τις εξισώσεις του χώρου των καταστάσεων:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times 1}, C \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

Θεωρούμε ότι η είσοδος $u(t)$ είναι γνωστή συνάρτηση για $t > 0$ και $u(t) = 0$ για $t \leq 0$.

Θεωρούμε ότι η έξοδος $y(t)$ μπορεί να μετρηθεί και είναι γνωστή για κάθε $t \geq 0$.

Κλειστός εκτιμητής ή παρατηρητής του Luenberger (2)

Τέλος θεωρούμε ότι το άνυσμα κατάστασης

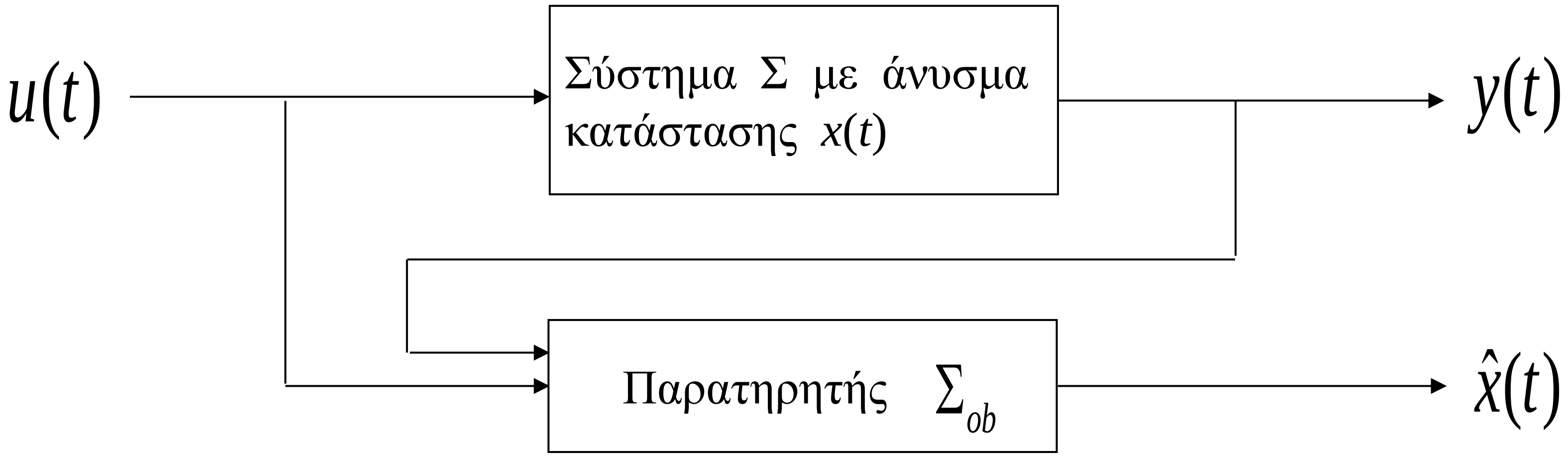
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, t \geq 0$$

του Σ είναι άγνωστο (δηλαδή οι καταστάσεις $x_i(t), i = 1,2,\dots,n$ δεν μπορούν όλες να μετρηθούν για κάθε $t \geq 0$).

Επιθυμούμε **τον προσδιορισμό ενός συστήματος** Σ_{ob} το οποίο

- έχει ως εισόδους τις $u(t)$ και $y(t)$,
- έχει ως έξοδο μία εκτίμηση $\hat{x}(t)$ του ανύσματος κατάστασης $x(t)$ του Σ,
- $\lim_{t\to\infty} \hat{x}(t) = x(t)$.

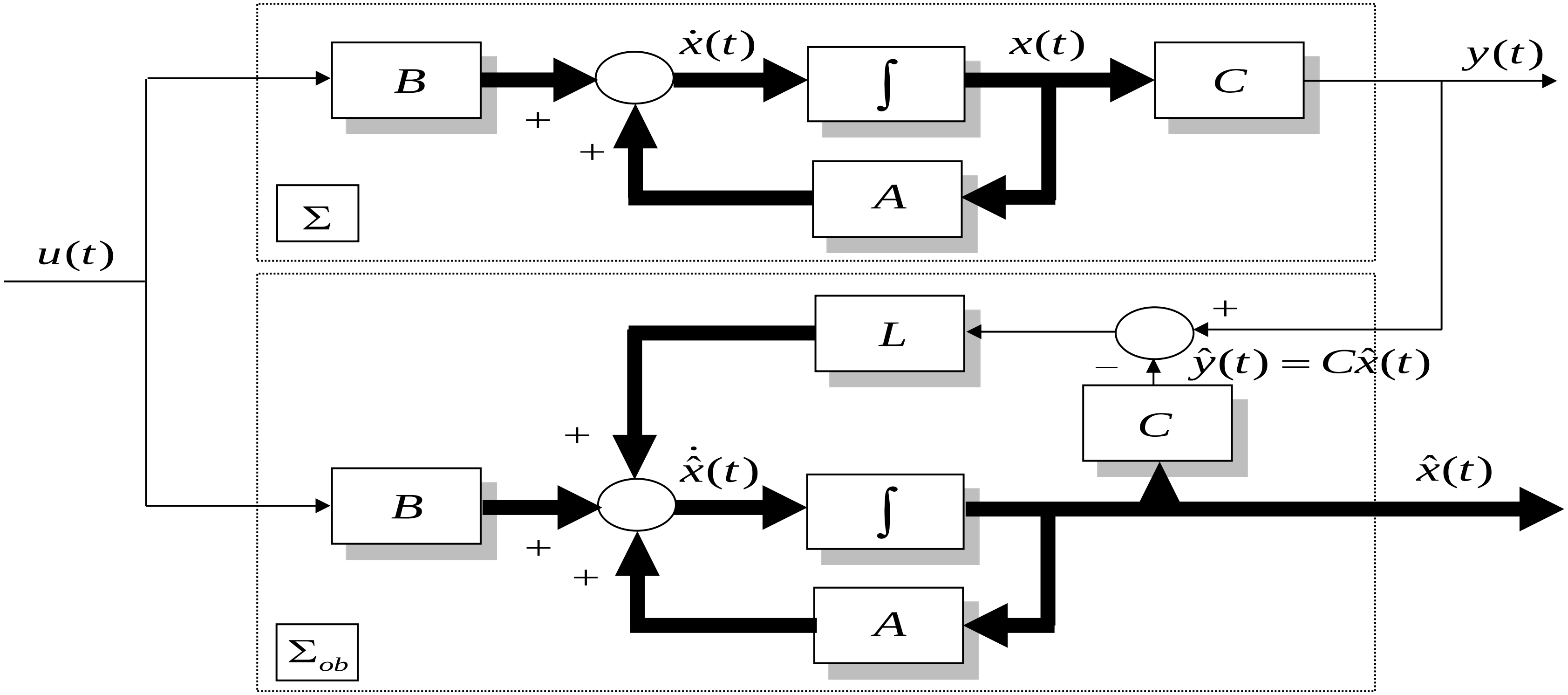
Κλειστός εκτιμητής ή παρατηρητής του Luenberger (3)



Σχήμα 3

Κλειστός εκτιμητής ή παρατηρητής του Luenberger (4)

Έστω ότι το σύστημα Σ_{ob} έχει τη δομή που προκύπτει από το διάγραμμα ροής του παρακάτω σχήματος.



Κλειστός εκτιμητής ή παρατηρητής του Luenberger (5)

Από το παραπάνω διάγραμμα ροής προκύπτει ότι ο **κλειστός παρατηρητής** Σ_{ob} περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + L[y(t) - \hat{y}(t)] + Bu(t) =$$

$$= A\hat{x}(t) + L[y(t) - C\hat{x}(t)] + Bu(t)$$

$$= A\hat{x}(t) - LC\hat{x}(t) + Ly(t) + Bu(t)$$

ή

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + LCx(t) + Bu(t) \quad \textbf{(6)}$$

όπου $L \in \mathbb{R}^{n\times1}$ άγνωστο για την ώρα άνυσμα.

Κλειστός εκτιμητής ή παρατηρητής του Luenberger (6)

Έστω $\varepsilon(t)$ το σφάλμα μεταξύ της κατάστασης $x(t)$ του συστήματος Σ και της κατάστασης $\hat{x}(t)$ του Σ_{ob}:

$$\varepsilon(t) := x(t) - \hat{x}(t) \quad \textbf{(7)}$$

Αν

$$\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0) = \varepsilon_0 \neq 0$$

και

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$$

τότε

$$\lim_{t\to\infty} \hat{x}(t) = x(t)$$

και το άνυσμα κατάστασης $\hat{x}(t)$ του Σ_{ob} αποτελεί πράγματι παρατήρηση ή εκτίμηση του ανύσματος κατάστασης $x(t)$ του συστήματος Σ.

Κλειστός εκτιμητής ή παρατηρητής του Luenberger (7)

Από τις (6) και (7) έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\
&= Ax(t) + Bu(t) - (A - LC)\hat{x}(t) - Ly(t) - Bu(t) \\
&= Ax(t) - A\hat{x}(t) + LC\hat{x}(t) - LCx(t) \\
&= A[x(t) - \hat{x}(t)] - LC[x(t) - \hat{x}(t)] \\
&= A\varepsilon(t) - LC\varepsilon(t) = (A - LC)\varepsilon(t)
\end{aligned}
$$

ή

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A - LC)\varepsilon(t) \quad \textbf{(8)}$$

Κλειστός εκτιμητής ή παρατηρητής του Luenberger (8)

Για αυθαίρετη αρχική κατάσταση

$$\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0) = \varepsilon_0 \neq 0$$

η λύση της (8) είναι η

$$\varepsilon(t) = e^{(A-LC)t}\varepsilon_0$$

Αν ο πίνακας $A - LC$ έχει ιδιοτιμές $\lambda_1^{ob}, \lambda_2^{ob}, \dots, \lambda_n^{ob}$ με

$$Re\left(\lambda_i^{ob}\right) < 0, i = 1,2, \dots, n$$

τότε

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0_{n\times 1}$$

και άρα

$$\lim_{t\to\infty} \hat{x}(t) = x(t).$$

Κλειστός εκτιμητής ή παρατηρητής του Luenberger (9)

Σε μια τέτοια περίπτωση το σύστημα Σ_{ob} αποτελεί παρατηρητή της κατάστασης του συστήματος Σ.

Παραμένει βέβαια το πρόβλημα της επιλογής του πίνακα $L \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ έτσι ώστε ο πίνακας $A - LC$ να έχει επιθυμητές ιδιοτιμές $\lambda_1^{ob}, \lambda_2^{ob}, \dots, \lambda_n^{ob}$ με αρνητικό πραγματικό μέρος.

Οι ιδιοτιμές του $A - LC$ ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές του ανάστροφού του

$$(A - LC)^T = A^T - (LC)^T = A^T - C^T L^T$$

Κλειστός εκτιμητής ή παρατηρητής του Luenberger (10)

Από τη θεωρία του προσδιορισμού του ανύσματος ανάδρασης $F \in \mathbb{R}^{1\times n}$ έτσι ώστε ο πίνακας $A - BF$ να έχει δεδομένες ιδιοτιμές, γνωρίζουμε ότι η επιλογή του $F \in \mathbb{R}^{1\times n}$ είναι δυνατή αν και μόνο αν το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο ή ισοδύναμα αν και μόνο αν

$$rank\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

Κατ' αναλογία, η επιλογή του ανύσματος $L \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ έτσι ώστε ο πίνακας $A^T - C^T L^T$ να έχει επιθυμητές ιδιοτιμές $\lambda_1^{ob}, \lambda_2^{ob}, \dots, \lambda_n^{ob}$ με $Re\left(\lambda_i^{ob}\right) < 0, i = 1,2, \dots, n$ είναι δυνατή αν και μόνο αν

$$rank\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1}C^T \end{bmatrix} = n$$

Κλειστός εκτιμητής ή παρατηρητής του Luenberger (11)

ή ισοδύναμα αν και μόνο αν

$$rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

ή ισοδύναμα αν και μόνο αν το ζεύγος (C, A) είναι παρατηρήσιμο.

Πρόταση

Πρόταση. Η κατασκευή ενός κλειστού παρατηρητή Σ_{ob} της κατάστασης $x(t)$ ενός γραμμικού συστήματος του χώρου των καταστάσεων

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times 1}, C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, είναι δυνατή αν και μόνο αν το παραπάνω σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012, *Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου.* Εκδόσεις Τζιόλα.
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 20. Παρατηρητής Κατάστασης». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης