ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 21. Επανατοποθέτηση πολών με ανάδραση εκτιμώμενης κατάστασης

Νίκος Καραμπετάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Χρήση του παρατηρητή κατάστασης για επανατοποθέτηση των πόλων του συστήματος μέσω ανάδρασης του ανύσματος ***της εκτιμώμενης κατάστασης***.

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη της χρήσης του παρατηρητή κατάστασης για επανατοποθέτηση πόλων συστήματος μέσω ανάδρασης του ανύσματος της εκτιμώμενης κατάστασης.

Χρήση παρατηρητή για επανατοποθέτηση ιδιοτιμών μέσω ανάδρασης του ανύσματος κατάστασης (1)

Έστω σύστημα Σ:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

όπου

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times 1}, C \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

και του οποίου το άνυσμα κατάστασης $x(t)$ *δεν είναι δεκτό μετρήσεων*.

Έστω ότι

- το παραπάνω σύστημα είναι **ελέγξιμο** και **παρατηρήσιμο**

και

- οι ιδιοτιμές του πίνακα A δεν είναι οι **επιθυμητές**.

Χρήση παρατηρητή για επανατοποθέτηση ιδιοτιμών μέσω ανάδρασης του ανύσματος κατάστασης (2)

Έστω τέλος ότι το άνυσμα ανάδρασης $F \in \mathbb{R}^{1\times n}$ έχει επιλεγεί έτσι ώστε ο πίνακας $A - BF$ να έχει δεδομένες επιθυμητές ιδιοτιμές

$$\lambda_1^{ob}, \lambda_2^{ob}, \ldots, \lambda_n^{ob} \in \mathbb{C}^- \coloneqq \{s \in \mathbb{C}, Re(s) < 0\}$$

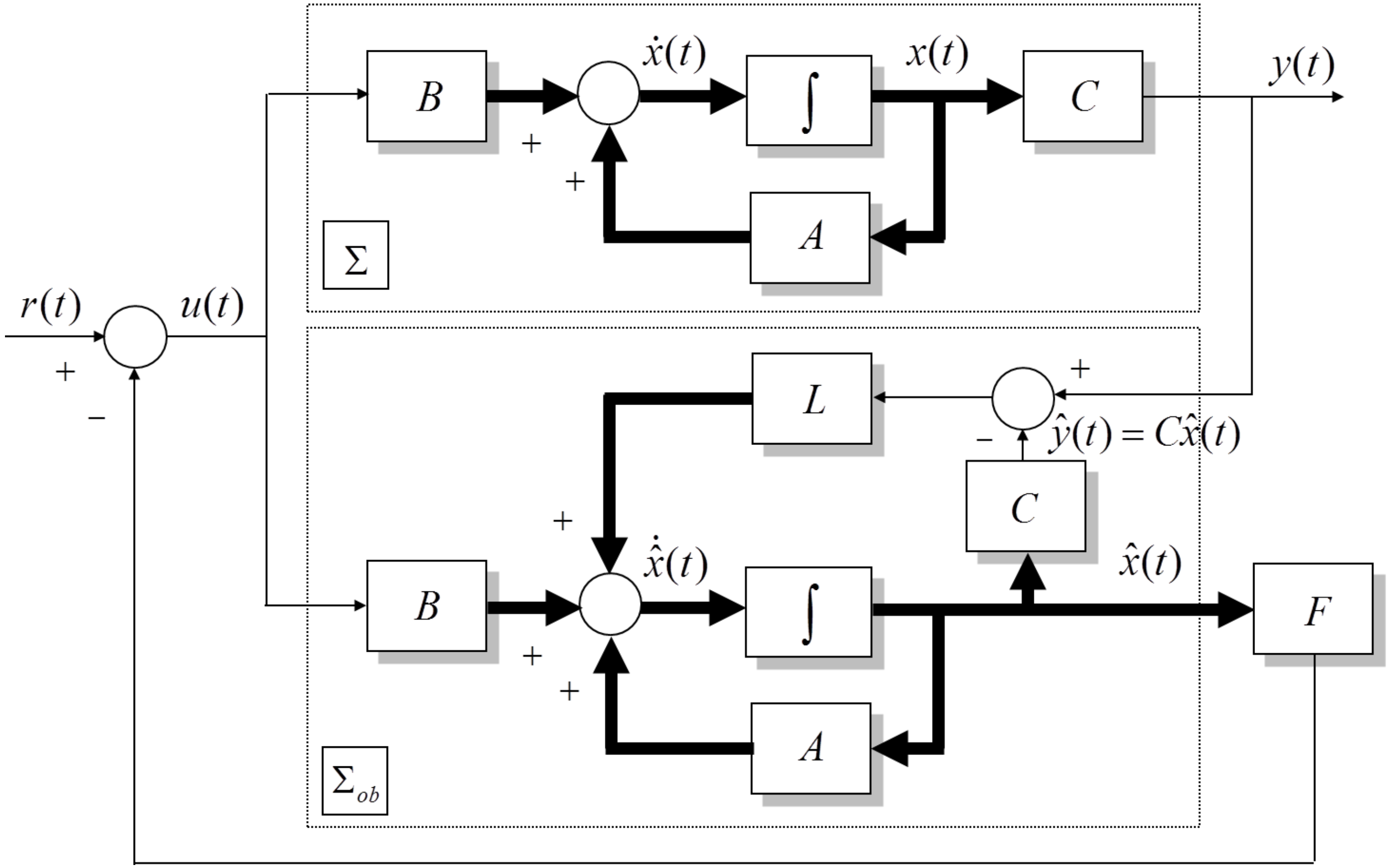
Εφόσον το άνυσμα κατάστασης $x(t)$ του συστήματος Σ δεν είναι δεκτό μετρήσεων, ορίζουμε **ανατροφοδότηση της εκτίμησης** $\hat{x}(t)$ της κατάστασης $x(t)$ του συστήματος Σ σύμφωνα με την

$$u(t) = r(t) - F\hat{x}(t)$$

όπου $\hat{x}(t)$ το άνυσμα κατάστασης του παρατηρητή Σ_{ob}.

Χρήση παρατηρητή για επανατοποθέτηση ιδιοτιμών μέσω ανάδρασης του ανύσματος κατάστασης (3)

Το διάγραμμα ροής του κλειστού συστήματος θα είναι το



Χρήση παρατηρητή για επανατοποθέτηση ιδιοτιμών μέσω ανάδρασης του ανύσματος κατάστασης (4)

Το κλειστό σύστημα το οποίο προκύπτει από το παραπάνω διάγραμμα διέπεται από τις εξισώσεις

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[r(t) - F\hat{x}(t)\,] = Ax(t) + Br(t) - BF\hat{x}(t) \quad \textbf{(1)}$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + B[r(t) - F\hat{x}(t)\,] + LCx(t) - LC\hat{x}(t)\\ &= A\hat{x}(t) + Br(t) - BF\hat{x}(t) + LCx(t) - LC\hat{x}(t)\\ &= LCx(t) + (A - BF - LC)\hat{x}(t) + Br(t) \qquad \textbf{(2)}\end{aligned}$$

Χρήση παρατηρητή για επανατοποθέτηση ιδιοτιμών μέσω ανάδρασης του ανύσματος κατάστασης (5)

Κάνοντας χρήση πινάκων και του ανύσματος κατάστασης

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 1}$$

του κλειστού συστήματος, οι εξισώσεις (1) και (2) γράφονται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BF \\ LC & A - BF - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Άρα οι ιδιοτιμές/πόλοι του κλειστού συστήματος είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$det \begin{bmatrix} sI_n - A & BF \\ -LC & sI_n - A + BF + LC \end{bmatrix} = 0$$

Χρήση παρατηρητή για επανατοποθέτηση ιδιοτιμών μέσω ανάδρασης του ανύσματος κατάστασης (6)

ή της

$$\det\left(\begin{bmatrix} sI_n - A & BF \\ -LC & sI_n - A + BF + LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix}\right) = 0$$

ή της

$$det\begin{bmatrix} sI_n - A + BF & BF \\ sI_n - A + BF & sI_n - A + BF + LC \end{bmatrix} = 0$$

ή της

$$\det\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sI_n - A + BF & BF \\ sI_n - A + BF & sI_n - A + BF + LC \end{bmatrix}\right) = 0$$

ή της

$$det\begin{bmatrix} sI_n - A + BF & BF \\ 0 & sI_n - A + LC \end{bmatrix} =$$

$$= \det(sI_n - A + BF)\det(sI_n - A + LC) = 0$$

Χρήση παρατηρητή για επανατοποθέτηση ιδιοτιμών μέσω ανάδρασης του ανύσματος κατάστασης (6)

Άρα οι ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος δίνονται από την ένωση των ιδιοτιμών των πινάκων $A - BF$ και $A - LC$, των οποίων οι ιδιοτιμές μπορούν να εκλεγούν αυθαίρετα με κατάλληλη επιλογή των ανυσμάτων $F \in \mathbb{R}^{1\times n}$ και $L \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Παράδειγμα (Ανάστροφο εκκρεμές) (1)

Το σύστημα στη μορφή του χώρου των καταστάσεων είδαμε ότι είναι

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \textbf{(3)}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix}$$

Αν $F = [a \quad b]$, τότε η ανάδραση του ανύσματος κατάστασης είναι

$$u(t) = -a\varphi(t) - b\dot{\varphi}(t) = -[a \quad b]\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = -Fx(t) \quad \textbf{(4)}$$

Παράδειγμα (Ανάστροφο εκκρεμές) (2)

Αντικαθιστώντας την (4) στην (3) παίρνουμε την εξίσωση του χώρου των καταστάσεων του κλειστού συστήματος

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = Ax(t) - BFx(t) = (A - BF)x(t)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}\right) x(t) =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}\right) x(t) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - a & -b \end{bmatrix} x(t)$$

Παράδειγμα (Ανάστροφο εκκρεμές) (3)

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - a & -b \end{bmatrix}$$

του κλειστού συστήματος είναι

$$\psi_F(s) = \det(sI_2 - A + BF) = det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 + a & s + b \end{bmatrix}$$
$$= s^2 + bs + a - 1$$

Αν λ_1, λ_2 είναι οι επιθυμητές ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος, τότε θα πρέπει

$$\psi_F(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 + (-\lambda_1 - \lambda_2)s + \lambda_1\,\lambda_2 \Rightarrow$$

$$b = -\lambda_1 - \lambda_2, \qquad a = \lambda_1\,\lambda_2 + 1$$

Παράδειγμα (Ανάστροφο εκκρεμές) (4)

Αν επιλέξουμε ως ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος τις

$$\lambda_1 = -0.5 + j0.5, \lambda_2 = -0.5 - j0.5$$

τότε

$$b = -\lambda_1 - \lambda_2 = 1$$

και

$$a = \lambda_1 \, \lambda_2 + 1 = 1.5$$

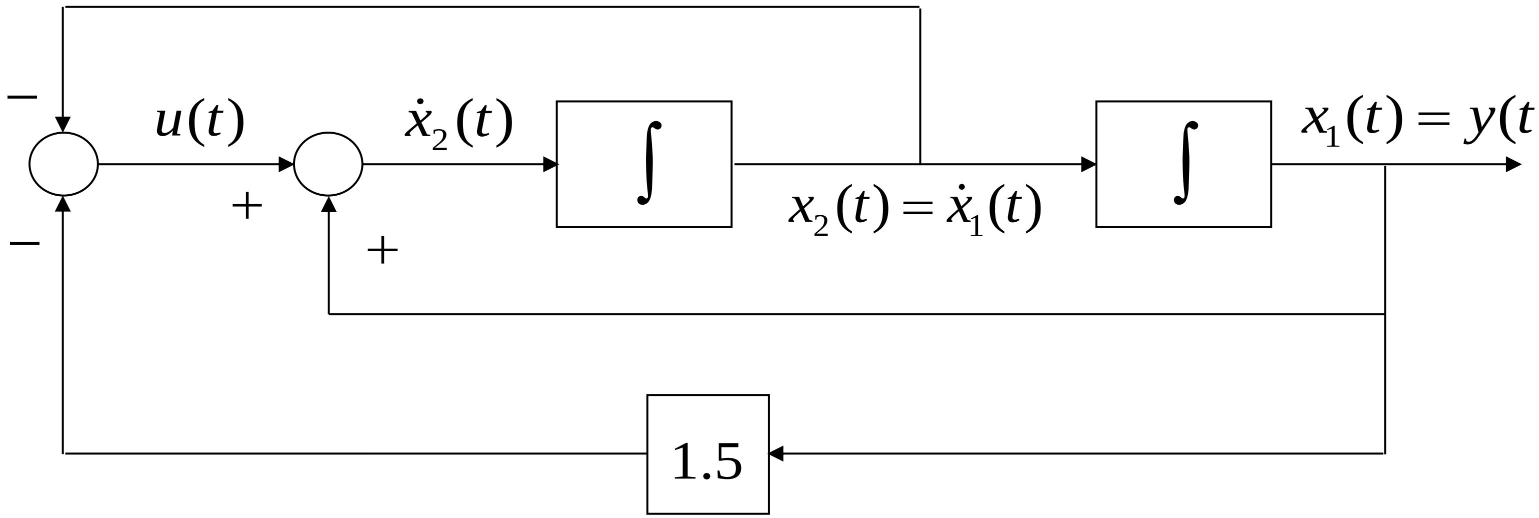
Άρα

$$F = [a \quad b] = [1.5 \quad 1]$$

Παράδειγμα (Ανάστροφο εκκρεμές) (5)

Οι εξισώσεις που διέπουν το κλειστό σύστημα είναι οι

$$\begin{cases} u(t) = -1.5x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$



Παράδειγμα (Ανάστροφο εκκρεμές) (6)

Έστω ότι το άνυσμα κατάστασης

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix}$$

δεν είναι μετρήσιμο, έτσι ώστε η επανατοποθέτηση των ιδιοτιμών του ανάστροφου κκρεμούς μέσω ανάδρασης του ανύσματος κατάστασης να μην είναι δυνατή.

Κατασκευάζουμε έναν κλειστό παρατηρητή.

Αν ως ιδιοτιμές του παρατηρητή επιλεχθούν οι

$$\lambda_1^{ob} = -1 + j, \qquad \lambda_2^{ob} = -1 - j$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παρατηρητή θα είναι

$$[s - (-1 + j)][s - (-1 - j)] = s^2 + 2s + 2$$

Παράδειγμα (Ανάστροφο εκκρεμές) (7)

$$A - LC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & 0 \end{bmatrix}$$

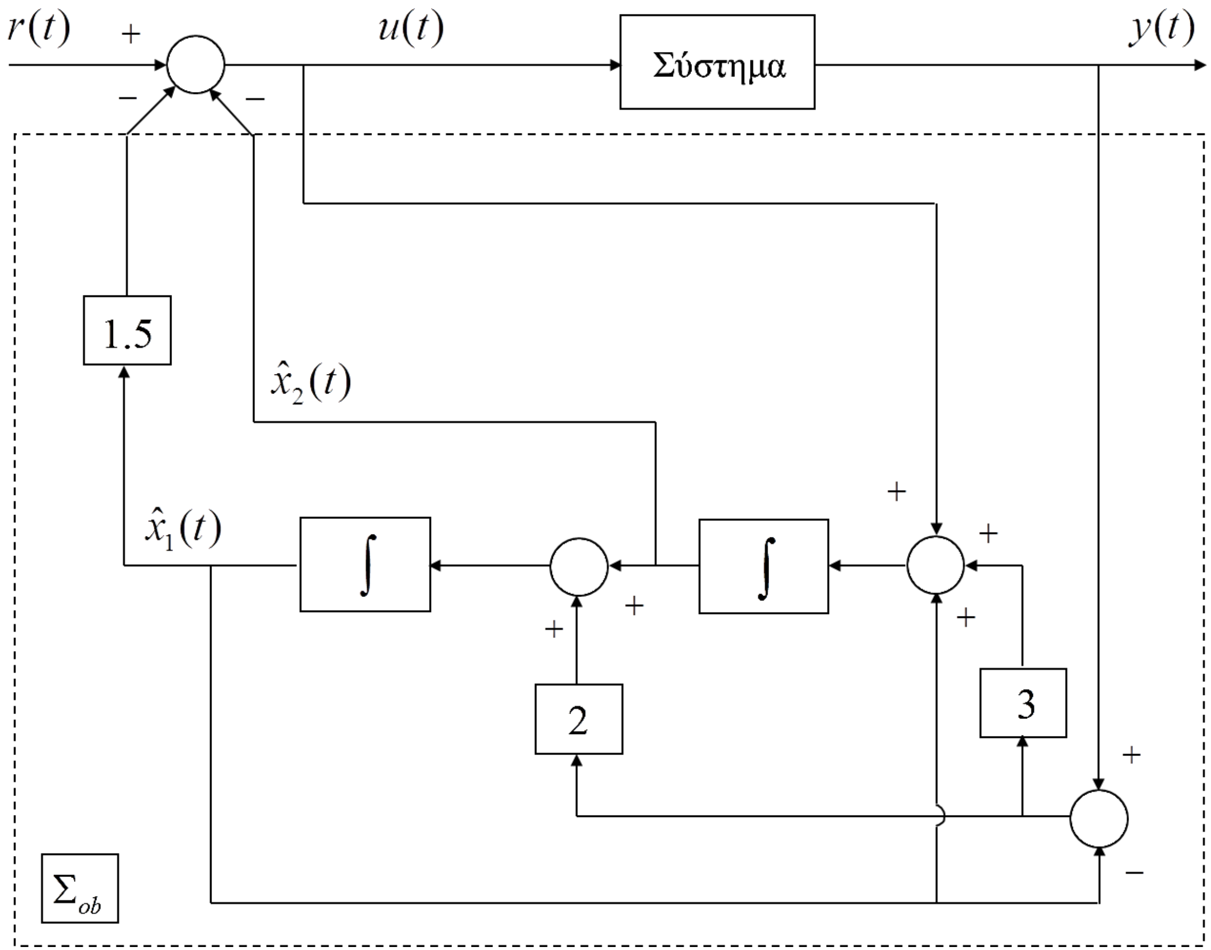
$$= \begin{bmatrix} -l_1 & 0 \\ 1 - l_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$sI_2 - A + LC = \begin{bmatrix} s + l_1 & -1 \\ -1 + l_2 & s \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} s + l_1 & -1 \\ -1 + l_2 & s \end{bmatrix} = s^2 + l_1 s + l_2 - 1 \equiv s^2 + 2s + 2 \Rightarrow$$

$$l_1 = 2, \qquad l_2 = 3$$

Παράδειγμα (Ανάστροφο εκκρεμές) (8)



Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012, *Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου.* Εκδόσεις Τζιόλα.
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 21. Επανατοποθέτηση πολών με ανάδραση εκτιμώμενης κατάστασης». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης