ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 22. Ανατροφοδότηση εξόδου

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Ανατροφοδότηση εξόδου γραμμικών συστημάτων.

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη της διαδικασίας ανατροφοδότησης εξόδου γραμμικών συστημάτων.

Άσκηση (1)

Άσκηση. Δείξτε ότι ένα συνεχές γραμμικό σύστημα είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν το υπό ανάδραση κατάστασης σύστημα είναι ελέγξιμο.

Απόδειξη. Ο πίνακας ελεγξιμότητας του κλειστού συστήματος θα είναι:

$$\mathcal{C}_k = [B \quad (A-BK)B \quad (A-BK)^2B \quad \dots \quad (A-BK)^{n-1}B]$$

όπου:

$$(A-BK)B = B(-KB) + AB = [B \quad AB]\begin{bmatrix} -KB \\ I \end{bmatrix}$$

$$(A-BK)^2B = (A-BK)(A-BK)B =$$
$$= B(KBKB - KAB) + AB(-KB) + A^2B =$$

Άσκηση (2)

$$= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K(A-BK)B \\ -KB \\ I \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}(A-BK)^3B &= AB[-K(A-BK)B] + A^2B(-KB) + A^3B \\ &- B\{K[-K(A-BK)B]\} - B[KAB(-KB)] - B[KA^2B] \\ &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K(A-BK)^2B \\ -K(A-BK)B \\ -KB \\ I \end{bmatrix}\end{aligned}$$

....

Άσκηση (3)

$$\mathcal{C}_k = \mathcal{C}\begin{bmatrix} I & -KB & -K(A-BK)^2B & \dots & -K(A-BK)^{n-1}B \\ 0 & I & -KB & \dots & -K(A-BK)^{n-2}B \\ 0 & 0 & I & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\boxed{rank\mathcal{C}_k = rank\mathcal{C}}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να πάρουμε παρατηρώντας ότι:

$$rank[sI_n - A \quad B] = rank[sI_n - A + BK \quad B]$$

Ανάδραση εξόδου συνεχών και διακριτών γραμμικών συστημάτων (1)

Πρόβλημα. Θεωρείστε ένα γραμμικό σύστημα Σ που η περιγραφή του στον χώρο των καταστάσεων είναι η παρακάτω:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad \textbf{(Σ)}$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$,

$u(t): \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m$ το διάνυσμα εισόδου, $u(t) \in C_p^i$,

$x(t): \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα ψευδοκατάστασης και
$y(t): \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^p$ είναι το διάνυσμα εξόδου.

Ανάδραση εξόδου συνεχών και διακριτών γραμμικών συστημάτων (2)

Έστω επίσης η ανατροφοδότηση εξόδου:

$u(t) = Ky(t) + Nv(t)$ όπου $K \in \mathbb{R}^{m\times p}$ και $N \in \mathbb{R}^{m\times w}$.

Να βρεθούν οι πίνακες εκείνοι K και N που θα μετατοπίσουν τις ιδιοτιμές του Σ από $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ σε $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n$.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[Ky(t) + Nv(t)] \Rightarrow$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\big[K\big(Cx(t)\big) + Nv(t)\big]$$

$$= (A + BKC)x(t) + BNv(t)$$

και συνεπώς θα πρέπει οι ιδιοτιμές του πίνακα:

$$A + BKC$$

να είναι οι ζητούμενες δηλαδή

$$\det(sI_n - A - BKC) = \left(s - \bar{\lambda}_1\right)\left(s - \bar{\lambda}_2\right)\dots\left(s - \bar{\lambda}_n\right).$$

Παράδειγμα (1)

Παράδειγμα. Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Να μετατοπίσετε τις ιδιοτιμές του παραπάνω συστήματος

από $\{1, -1\}$ σε $\{-1, -1\}$

μετά από ανάδραση εξόδου της μορφής:

$u(t) = Ky(t)$ όπου $K \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.

Παράδειγμα (2)

Έχουμε ότι

$$A + BKC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ \beta + 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\hat{\alpha}(s) = \det \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ \beta + 1 & 0 \end{bmatrix} = s(s - a) - (\beta + 1)$$
$$= s^2 - as - (\beta + 1)$$

θα πρέπει να είναι ίσο με:

Παράδειγμα (3)

$$\hat{\alpha}(s) \coloneqq (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

Άρα

$$-\alpha = 2,$$

και

$$-(\beta + 1) = 1.$$

Οπότε

$$\alpha = -2, \qquad \beta = -2$$

και

$$K = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012, *Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου.* Εκδόσεις Τζιόλα.
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.
- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 22. Ανατροφοδότηση εξόδου». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης