ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 4: Υπολογισμός του εκθετικού πίνακα

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Υπολογισμός του εκθετικού πίνακα e^{At} μέσω ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.
- Υπολογισμός του εκθετικού πίνακα e^{At} μέσω μετασχηματισμού Laplace.
- Υπολογισμός του εκθετικού πίνακα e^{At} μέσω συναρτήσεων πινάκων.

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη των τρόπων υπολογισμού του εκθετικού πίνακα e^{At}:
  - ✓ Μέσω ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.
  - ✓ Μέσω μετασχηματισμού Laplace.
  - ✓ Μέσω συναρτήσεων πινάκων.

- **Υπολογισμός του εκθετικού πίνακα exp(At) μέσω ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων**

Μέσω ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων (1)

- **Υπολογισμός exp(At)**

$$e^{At} = I + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots$$

Υπάρχει πίνακας U (πίνακας δεξιών ιδιοδιανυσμάτων) τέτοιος ώστε:

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{J}$$

$$\Rightarrow A = UJU^{-1}$$

Μέσω ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων (2)

και συνεπώς

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= I + \frac{1}{1!}(UJU^{-1})t + \frac{1}{2!}(UJU^{-1})^2 t^2 + \cdots = \\
&= I + \frac{1}{1!}UJU^{-1}t + \frac{1}{2!}UJ^2U^{-1}t^2 + \cdots \\
&= Ue^{Jt}U^{-1}
\end{aligned}
$$

όπου:

$$
e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \text{ όταν } J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}
$$

Μέσω ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων (3)

και

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \frac{1}{1!}te^{\lambda_1 t} & \dots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & \dots & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

όταν $J=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα 1 (1)

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Υπάρχει πίνακας U (πίνακας δεξιών ιδιοδιανυσμάτων) τέτοιος ώστε:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{J} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{U^{-1}} \Rightarrow$$

Παράδειγμα 1 (2)

$$e^{At} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{U^{-1}}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-3t} + e^{-t}) & \frac{1}{2}(-e^{-3t} + e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(-e^{-3t} + e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{-3t} + e^{-t}) \end{bmatrix}$$

Συνεπώς το ομογενές σύστημα

Παράδειγμα 1 (3)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

έχει ως λύση την παρακάτω

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) \\ &= \begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^{-3t}+e^{-t}) & \frac{1}{2}(-e^{-3t}+e^{-t})\\ \frac{1}{2}(-e^{-3t}+e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{-3t}+e^{-t})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}-e^{-3t}\\ e^{-3t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2 (1)

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -9 \\ -2 & 9 & -8 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Υπάρχει πίνακας *U* (πίνακας δεξιών ιδιοδιανυσμάτων); **ΟΧΙ**

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\det(sI_3 - A) = \det\begin{pmatrix} s+1 & -9 & 9 \\ 2 & s-9 & 8 \\ 1 & -4 & s+3 \end{pmatrix}$$
$$= s^3 - 5s^2 + 8s - 4 = (s-1)(s-2)^2$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι οι: 1 και 2

Παράδειγμα 2 (2)

Ιδιοτιμή: 1 $\begin{pmatrix} 1+1 & -9 & 9 \\ 2 & 1-9 & 8 \\ 1 & -4 & 1+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

Ιδιοτιμή: 2 $\begin{pmatrix} 2+1 & -9 & 9 \\ 2 & 2-9 & 8 \\ 1 & -4 & 2+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

Γενικευμένα ιδιοανύσματα (1)

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\det(sI_3 - A) = \det\begin{pmatrix} s-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & s-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & s-\lambda \end{pmatrix} = (s-\lambda)^3$$

Ιδιοτιμή: λ $\begin{pmatrix} \lambda-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$$

Γενικευμένα ιδιοανύσματα (2)

$$A\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}}_{J}$$

$$\begin{cases} Au_1 = \lambda u_1 \\ Au_2 = u_1 + \lambda u_2 \\ Au_3 = u_2 + \lambda u_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (A-\lambda I_3)u_1 = 0 \\ (A-\lambda I_3)u_2 = u_1 \\ (A-\lambda I_3)u_3 = u_2 \end{cases}$$

Άρα

$$u_2 = (A-\lambda I_3)u_3$$
$$u_1 = (A-\lambda I_3)u_2 = (A-\lambda I_3)^2 u_3$$
$$(A-\lambda I_3)^3 u_3 = 0$$

Γενικευμένα ιδιοανύσματα (3)

Ορισμός. Ένα διάνυσμα u_m καλείται **γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα** τάξης m όπου $m \in \{1,2,\ldots\}$, για την ιδιοτιμή λ του πίνακα $A \in M_n, n \in \mathbb{N}$, αν

$$(A-\lambda I_n)^m u_m = 0 \; \kappa\alpha\iota \; (A-\lambda I_n)^{m-1} u_m \neq 0.$$

Γενικευμένα ιδιοανύσματα (4)

Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Τότε το $x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης 3

για την ιδιοτιμή $\lambda = 2$ αφού

$$(A - 2I_3)^3 x_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; \kappa\alpha\iota$$

$$(A - 2I_3)^2 x_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Γενικευμένα ιδιοανύσματα (5)

Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Τότε το $x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης 2 για την ιδιοτιμή $\lambda = 2$ αφού

$$(A - 2I_3)^2 x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ \kappa\alpha\iota$$

$$(A - 2I_3)^1 x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Γενικευμένα ιδιοανύσματα (6)

Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Τότε το $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης 1

για την ιδιοτιμή $\lambda = 2$ αφού

$$(A - 2I_3)^1 x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ \kappa\alpha\iota$$

$$(A - 2I_3)^0 x_1 = \mathrm{I} x_1 = x_1 \neq 0.$$

Παράδειγμα 3 (1)

Να υπολογιστεί ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τύπου 3 για τον παρακάτω πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A - 5I_4)^3 x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ \kappa\alpha\iota$$

$$(A - 5I_3)^2 x_3 \neq 0$$

Παράδειγμα 3 (2)

$$(A-5I_4)^3x_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14z \\ -4z \\ 3z \\ -z \end{bmatrix} \kappa\alpha\iota$$

$$(A-5I_4)^2x_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y-8z \\ 4z \\ -3z \\ z \end{bmatrix} \neq 0$$

$$z = 0 \; \kappa\alpha\iota \; y \neq 0 \; \text{και} \; x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τύπου 2 για τον παρακάτω πίνακα που να αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ=2

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστεί ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τύπου 2 για τον παρακάτω πίνακα που να αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ=4

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Αλυσίδες ιδιοδιανυσμάτων (1)

Έστω ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα x_m τύπου m της ιδιοτιμής λ για τον πίνακα A. Η αλυσίδα που παράγεται από το x_m είναι ένα σύνολο διανυσμάτων $\{x_m, x_{m-1}, \dots, x_1\}$ τα οποία δίνονται από

$$x_{m-1} = (A - \lambda I)x_m$$
$$x_{m-2} = (A - \lambda I)^2 x_m = (A - \lambda I)x_{m-1}$$
$$x_{m-3} = (A - \lambda I)^3 x_m = (A - \lambda I)x_{m-2}$$
$$\vdots$$
$$x_1 = (A - \lambda I)^{m-1} x_m = (A - \lambda I)x_2$$

$$\boxed{x_j = (A - \lambda I)^{m-j} x_m = (A - \lambda I)x_{j+1} \; (j = 1, 2, \dots, m-1)} \quad (\mathbf{1})$$

Αλυσίδες ιδιοδιανυσμάτων (2)

Θεώρημα: Το διάνυσμα x_j της (1) είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τύπου j για την ιδιοτιμή λ αφού

$$(A-\lambda I)^j x_j = (A-\lambda I)^j (A-\lambda I)^{m-j} x_m = (A-\lambda I)^m x_m = 0$$

και

$$(A-\lambda I)^{j-1} x_j = (A-\lambda I)^{j-1} (A-\lambda I)^{m-j} x_m =$$
$$= (A-\lambda I)^{m-1} x_m \neq 0$$

Παράδειγμα 4 (1)

Το $x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τύπου 3 για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Το $x_2 = (A - 5I_4)x_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τύπου 2 για την ιδιοτιμή λ=5.

Παράδειγμα 4 (2)

Το

$$x_1 = (A - 5I_4)^2 x_3 = (A - 5I_4)x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τύπου 1 για την ιδιοτιμή λ=5.

Παράδειγμα 4 (3)

Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

το σύνολο $\{x_3, x_2, x_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ είναι μία αλυσίδα ιδιοδιανυσμάτων που παράγετει από το x_3.

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα - γραμμικά ανεξάρτητα

Θεώρημα: Μία αλυσίδα ιδιοδιανυσμάτων είναι ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων.

Έστω $\{x_m, x_{m-1}, \dots, x_1\}$ μία αλυσίδα ιδιοδιανυσμάτων που παράγεται από το x_m.

$$c_m x_m + c_{m-1} x_{m-1} + \cdots + c_1 x_1 = 0$$

$j = 1,2, \dots, (m-1)$

$$(A - \lambda I_n)^{m-1} c_j x_j = c_j (A - \lambda I_n)^{m-j-1} (A - \lambda I_n)^j x_j$$
$$= c_j (A - \lambda I_n)^{m-j-1} 0 = 0$$

$c_m (A - \lambda I_n)^{m-1} x_m = 0$ όμως $(A - \lambda I_n)^{m-1} x_m \neq 0$

Άρα $c_m = 0$

Άσκηση 2

Κατασκευάστε μια αλυσίδα ιδιοδιανυσμάτων για την ιδιοτιμή λ=2 αν γνωρίζετε ότι το ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$ είναι τύπου 3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Κανονική βάση (1)

Theorem 1. *Every $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ possesses n linearly independent generalized eigenvectors, henceforth abbreviated liges. Generalized eigenvectors corresponding to distinct eigenvalues are linearly independent. If λ is an eigenvalue of $\mathbf{A}$ of multiplicity ν, then $\mathbf{A}$ will have ν liges corresponding to λ.*

Definition 1. A set of n liges (linearly independent generalized eigenvectors) is a *canonical basis* for an $n \times n$ matrix if the set is composed entirely of chains.

Κανονική βάση (2)

Έστω λ_i μία ιδιοτιμή του $n \times n$ πίνακα A πολλαπλότητας ν. Αρχικά βρείτε τις βαθμίδες των πινάκων $(\mathrm{A} - \lambda_i \mathrm{I})$, $(\mathrm{A} - \lambda_i \mathrm{I})^2$, …, $(\mathrm{A} - \lambda_i \mathrm{I})^m$. Ο ακέραιος m είναι ο πρώτος ακέραιος για τον οποίο $rank(\mathrm{A} - \lambda_i \mathrm{I})^m = n - \nu$.

Προσδιορίστε το m για την ιδιοτιμή $\lambda_i = 2$ του πίνακα

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$n = 6$ και η ιδιοτιμή $\lambda_i = 2$ έχει πολλαπλότητα ν=5.

$$n - \nu = 1$$

Κανονική βάση (3)

$$(\mathrm{A}-2\mathrm{I})=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, rank(\mathrm{A}-2\mathrm{I})=4$$

$$(\mathrm{A}-2\mathrm{I})^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}, rank(\mathrm{A}-2\mathrm{I})^2=2$$

Κανονική βάση (4)

$$(\mathrm{A}-2\mathrm{I})^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, rank(\mathrm{A}-2\mathrm{I})^3 = 1 = n - \nu.$$

Για αυτό για την ιδιοτιμή $\lambda_i = 2$ το m=3.

Αλυσίδα ιδιοδιανυσμάτων (3)

Ορίζουμε

$$\rho_k = r\left((A-\lambda_i I)^{k-1}\right) - r\left((A-\lambda_i I)^{k}\right), (k = 1,2,\dots,m).$$

ρ_k designates the number of liges of type k corresponding to the eigenvalue λ_i that will appear in a canonical basis for $\mathbf{A}$. Note that $r(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})^0 = r(\mathbf{I}) = n$.

$$r\left((A-\lambda_i I)^0\right) = r(I) = n$$

Κανονική βάση (5)

$$rank(\mathrm{A}-2\mathrm{I}) = 4$$

$$rank(\mathrm{A}-2\mathrm{I})^2 = 2$$

$$rank(\mathrm{A}-2\mathrm{I})^3 = 1 = n-\nu.$$

$$\rho_3 = r\left((A-2I)^2\right) - r\left((A-2I)^3\right) = 2-1 = 1$$

$$\rho_2 = r\left((A-2I)^1\right) - r\left((A-2I)^2\right) = 4-2 = 2$$

$$\rho_1 = r\left((A-2I)^0\right) - r\left((A-2I)^1\right) = 6-4 = 2$$

Για αυτό για την ιδιοτιμή $\lambda_i = 2$ το m=3.

Παράδειγμα 5 (1)

Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

και $x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *είναι γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τύπου 3.*

Παράδειγμα 5 (2)

$$x_2 = (\mathrm{A} - 2\mathrm{I})x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = (\mathrm{A} - 2\mathrm{I})x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_2 = r\left((A - 2I)^3\right) - r\left((A - 2I)^2\right) = 4 - 2 = 2$$

Παράδειγμα 5 (3)

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - c \\ c \\ 0 \\ e \\ f \\ 2f \end{bmatrix}$$

b ή/και e διάφορα του 0,

Παράδειγμα 5 (4)

$$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ f \\ 2f \\ 4f \end{bmatrix}$$

c=f=0

Παράδειγμα 5 (4)

Άρα $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \\ d \\ e \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\{x_3, x_2, x_1\}\,, y_2 = x_2 + x_1$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \\ d \\ e \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b ή/και e διάφορα του 0,

Παράδειγμα 5 (5)

$$y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y_1 = (\mathrm{A} - 2\mathrm{I})y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 5 (6)

$$\lambda_2 = 4, \qquad z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Άρα μία κανονική βάση για τον Α είναι

$$\{x_3, x_2, x_1, y_2, y_1, z_1\}$$

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε μία κανονική βάση για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jordan κανονική μορφή (1)

Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας Α είναι σε Jordan κανονική μορφή εάν είναι διαγώνιος πίνακας ή εάν έχει μία από τις παρακάτω μορφές

$$\begin{bmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_2 \end{bmatrix} \text{ή} \begin{bmatrix} \mathrm{D} & & & 0 \\ & S_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & S_r \end{bmatrix}$$

όπου ο D είναι διαγώνιος πίνακας και

$$S_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Jordan κανονική μορφή (2)

- $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Jordan κανονική μορφή (3)

Definition 2. Let **A** be an $n \times n$ matrix. A *generalized modal matrix* **M** for **A** is an $n \times n$ matrix whose columns, considered as vectors, form a canonical basis for **A** and appear in **M** according to the following rules:

(M1) All chains consisting of one vector (that is, one vector in length) appear in the first columns of **M**.

(M2) All vectors of the same chain appear together in adjacent columns of **M**.

(M3) Each chain appears in **M** in order of increasing type (that is, the generalized eigenvector of type 1 appears before the generalized eigenvector of type 2 of the same chain, which appears before the generalized eigenvector of type 3 of the same chain, etc.).

Παράδειγμα 6 (1)

Έστω ο πίνακας $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(\lambda - 3)^2(\lambda - 2)^2 = 0$

- $\lambda_1 = 3, n - \nu = 2, m = 2, \rho_2 = 1 \; \kappa\alpha\iota \; \rho_1 = 1$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1 = (A - 3I)x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_2 = 2, n - \nu = 2, m = 1 \; \kappa\alpha\iota \; \rho_1 = 2$

Παράδειγμα 6 (2)

$$y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; και \; z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{M} = [y_1 \quad z_1 \quad x_1 \quad x_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{M} = [z_1 \quad y_1 \quad x_1 \quad x_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 6 (3)

- $Ay_1 = \lambda_2 y_1$
- $Az_1 = \lambda_2 z_1$
- $(A - \lambda_1 I)x_1 = 0$
- $(A - \lambda_1 I)x_2 = x_1$

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & z_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}}_{M} = \begin{pmatrix} Ay_1 & Az_1 & Ax_1 & Ax_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_2 y_1 & \lambda_2 z_1 & \lambda_1 x_1 & \lambda_1 x_2 + x_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & z_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}}_{J}$$

Παράδειγμα 6 (4)

$$J = M^{-1}AM, A = MJM^{-1}$$

Θεώρημα: Κάθε τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A είναι όμοιος με έναν πίνακα σε Jordan κανονική μορφή.

Για τον πίνακα $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ έχουμε

$$\mathrm{M} = [z_1 \quad y_1 \quad x_1 \quad x_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 6 (5)

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{J}$$

Άσκηση 4

Υπολογίστε την Jordan κανονική μορφή του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 7 (1)

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -9 \\ -2 & 9 & -8 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\det(A - sI_3) = \det\begin{pmatrix} -1-s & 9 & -9 \\ -2 & 9-s & -8 \\ -1 & 4 & -3-s \end{pmatrix}$$
$$= -s^3 + 5s^2 - 8s + 4 = -(s-1)(s-2)^2$$

Ιδιοτιμή: 1

Για την ιδιοτιμή 1 ισχύει

Παράδειγμα 7 (2)

$$rank\begin{pmatrix} -1-1 & 9 & -9 \\ -2 & 9-1 & -8 \\ -1 & 4 & -3-1 \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} -2 & 9 & -9 \\ -2 & 8 & -8 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} = 2$$

Άρα 3-2=1 ιδιοδιανύσματα αντιστοιχούν στο 1 όσο και η αλγεβρική πολλαπλότητα.

$$\begin{pmatrix} -2 & 9 & -9 \\ -2 & 8 & -8 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

Ιδιοτιμή: 2

Για την ιδιοτιμή 2 ισχύει

Παράδειγμα 7 (3)

$$rank\begin{pmatrix} -1-2 & 9 & -9 \\ -2 & 9-2 & -8 \\ -1 & 4 & -3-2 \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} -3 & 9 & -9 \\ -2 & 7 & -8 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$
$$= 2$$

Άρα 3-2=1 ιδιοδιανύσματα αντιστοιχούν στο 2 παρόλο που η αλγεβρική πολλαπλότητα είναι 2.

- $rank\begin{pmatrix} -3 & 9 & -9 \\ -2 & 7 & -8 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}^2 = rank\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 1$
- $rank\begin{pmatrix} -3 & 9 & -9 \\ -2 & 7 & -8 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}^3 = rank\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 1$

Παράδειγμα 7 (4)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 9 & -9 \\ -2 & 7 & -8 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}^2}_{(A-\lambda I_2)^2} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} x \\ 2z \\ z \end{pmatrix}, x, z \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 9 & -9 \\ -2 & 7 & -8 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}}_{(A-\lambda I_3)} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ 2z \\ z \end{pmatrix}}_{u_2} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x - 9z \\ 2x - 6z \\ x - 3z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} x \\ 2z \\ z \end{pmatrix}, x \neq 3z \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα 7 (5)

$$(x = 1, z = 1) \to u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 9 & -9 \\ -2 & 7 & -8 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}}_{(A-\lambda I_3)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J}$$

$$\Rightarrow$$

Παράδειγμα 7 (6)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 9 & -9 \\ -2 & 9 & -8 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 9 & -9 \\ -2 & 9 & -8 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{U^{-1}}$$

Όμως

$$e^{At} = Ue^{Jt}U^{-1}$$

Παράδειγμα 7 (7)

Άρα

$$e^{At} = Ue^{Jt}U^{-1}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{U^{-1}} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} - 3te^{2t} & 9te^{2t} & -9te^{2t} \\ -2te^{2t} & 2e^{2t} - e^{t} + 6te^{2t} & 2e^{t} - 2e^{2t} - 6te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t} - e^{t} + 3te^{2t} & 2e^{t} - e^{2t} - 3te^{2t} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 8 (1)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- χάνει τάξη 1 -> 1 Jordan Block

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- χάνει τάξη 2 -> 2 Jordan Block

Παράδειγμα 8 (2)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow A - \lambda I_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- χάνει τάξη 2 -> 2 Jordan Block

Παράδειγμα 8 (3)

$$(A-\lambda I_5)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- χάνει τάξη 3 -> μείωση κατά 1 της τάξης (πριν έχανε 2) -> ένα Jordan block τάξης 1 και ένα Jordan block τάξης μεγαλύτερης ή ίσης του 2.

Παράδειγμα 8 (4)

$$(A - \lambda I_5)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- χάνει τάξη 4 -> μείωση κατά 1 της τάξης (πριν έχανε 3) -> ένα Jordan block τάξης 1 και ένα Jordan block τάξης μεγαλύτερης ή ίσης του 3.

Παράδειγμα 8 (5)

$$(A-\lambda I_5)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- χάνει τάξη 5 -> μείωση κατά 1 της τάξης (πριν έχανε 4) -> ένα Jordan block τάξης 1 και ένα Jordan block τάξης 4.

- **Υπολογισμός του εκθετικού πίνακα exp(At) μέσω μετασχηματισμού Laplace.**

Μέσω μετασχηματισμού Laplace (1)

Από τις ιδιότητες του αντίστροφου **μετασχηματισμού Laplace**

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$$

Εάν

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

τότε

- $(sI_2 - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+3)(s+1)} & \frac{1}{(s+3)(s+1)} \\ \frac{1}{(s+3)(s+1)} & \frac{s+2}{(s+3)(s+1)} \end{bmatrix}$

Μέσω μετασχηματισμού Laplace (2)

$$(sI_2 - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s+3)} & \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)} \\ \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)} & \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s+3)} \end{bmatrix}$$

Άρα

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}[(sI_2 - A)^{-1}] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t}) & \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}) \\ \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t}) & \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Πίνακας μετασχηματισμών Laplace

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

- **Υπολογισμός του εκθετικού πίνακα exp(At) μέσω συναρτήσεων πινάκων.**

Συναρτήσεις πινάκων (1)

- $S_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$
- $f(S_k) = \begin{bmatrix} f(\lambda_k) & \frac{f'(\lambda_k)}{1!} & \frac{f''(\lambda_k)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(p)}(\lambda_k)}{p!} \\ 0 & f(\lambda_k) & \frac{f'(\lambda_k)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(p-1)}(\lambda_k)}{(p-1)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda_k) & \cdots & \frac{f^{(p-2)}(\lambda_k)}{(p-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_k) \end{bmatrix}$

Συναρτήσεις πινάκων (2)

- $S_k = \begin{bmatrix} 2t & 1 & 0 \\ 0 & 2t & 1 \\ 0 & 0 & 2t \end{bmatrix}$

$$e^{S_k} = f(S_k) = \begin{bmatrix} f(\lambda_k) & f'(\lambda_k) & \dfrac{f''(\lambda_k)}{2} \\ 0 & f(\lambda_k) & f'(\lambda_\kappa) \\ 0 & 0 & f(\lambda_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_k} & e^{\lambda_k} & \dfrac{e^{\lambda_k}}{2} \\ 0 & e^{\lambda_k} & e^{\lambda_k} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} & \dfrac{e^{2t}}{2} \\ 0 & e^{2t} & e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_k = e^{2t}, f(S_k) = e^{S_k}, f(\lambda_k) = e^{\lambda_k}$

Παράδειγμα 9 (1)

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Βήμα 1. Υπολογίζω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(s) = \det(sI_2 - A) = \det\begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix} = (s+2)^2 - 1$$

$$= s^2 + 4s + 3$$

Βήμα 2. Έστω ένα πολυώνυμο μικρότερου βαθμού κατά ένα από το $p(s)$.

$$g(s) = a_0 + a_1 s$$

Βήμα 3. Θέλω οι συναρτήσεις $g(s)$ και

$$f(s) = e^{st}$$

Παράδειγμα 9 (2)

να έχουν τις ίδιες τιμές για όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα A.

$$e^{-t} = f(-1) = g(-1) = a_0 - a_1$$

$$e^{-3t} = f(-3) = g(-3) = a_0 - 3a_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t} \\ \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Βήμα 4. Υπολογίζω τον εκθετικό πίνακα

$$e^{At}$$

Παράδειγμα 9 (3)

$$e^{At} = a_0 I_2 + a_1 A$$
$$= \left(\frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$+ \left(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}\right)\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t}) & \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})\\ \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t}) & \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t})\end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 10 (1)

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Βήμα 1. Υπολογίζω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(s) = \det(sI_3 - A) = \det\begin{pmatrix} s & -2 & 2 \\ 0 & s-1 & 0 \\ -1 & 1 & s-3 \end{pmatrix}$$

$$= (s-1)^2(s-2)$$

Βήμα 2. Έστω ένα πολυώνυμο μικρότερου βαθμού κατά ένα από το $p(s)$.

$$g(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2$$

Παράδειγμα 10 (2)

Βήμα 3. Θέλω οι συναρτήσεις $g(s)$ και

$$f(s) = e^{st} \to f'(s) = te^{st}$$

να έχουν τις ίδιες τιμές για όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα A.

(λαμβάνοντας υπόψην και την πολλαπλότητα)

$$e^{t} = f(1) = g(1) = a_0 + a_1 + a_2$$

$$te^{t} = f'(1) = g'(1) = a_1 + 2a_2$$

$$e^{2t} = f(2) = g(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2$$

Παράδειγμα 10 (3)

Έχουμε

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t\\ te^t\\ e^{2t}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}e^t\\ te^t\\ e^{2t}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{2t}-2te^t\\ -2e^{2t}+2e^t+3te^t\\ e^{2t}-te^t-e^t\end{pmatrix}$$

Βήμα 4. Υπολογίζω τον εκθετικό πίνακα

$$e^{At}=a_0I_3+a_1A+a_2A^2$$

Παράδειγμα 10 (4)

$$e^{At} = a_0 I_3 + a_1 A + a_2 A^2 = (e^{2t} - 2te^t)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$+(-2e^{2t} + 2e^t + 3te^t)\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$+ (e^{2t} - te^t - e^t)\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{bmatrix}2e^t - e^{2t} & 2te^t & 2e^t - 2e^{2t}\\ 0 & e^t & 0\\ e^{2t} - e^t & -te^t & 2e^{2t} - e^t\end{bmatrix}$$

Ασκήσεις για το σπίτι

- $A = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$,
- $A = \begin{bmatrix} -45 & 121 \\ -16 & 43 \end{bmatrix}$,
- $A = \begin{bmatrix} -11 & 24 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$,
- $A = \begin{bmatrix} -4 & 9 & -9 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,
- $A = \begin{bmatrix} -7 & 18 & -18 \\ -6 & 15 & -14 \\ -3 & 7 & -6 \end{bmatrix}$.

Βιβλιογραφία (1)

- Βαρδουλάκης Α.Ι.Γ., 2012*, Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Β. Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Εκδόσεις Τζιόλα.*
- Βασιλείου Παναγιώτης - Χρήστος, Τσακλίδης Γεώργιος, 2005, Εφαρμοσμένη θεωρία πινάκων, Εκδόσεις Ζήτη.
- Antsaklis P. and Michel A.N., 1977, *Linear Systems*, The McGraw-Hill Companies Inc. New York.
- Charles E., Donald G., James L., Melsa J., Rohrs C., Schultz D., 1996, *Γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου, Εκδόσεις Τζιόλα*.
- Chen C.T., 1970, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Renehart and Winston Inc. New York.

Βιβλιογραφία (2)

- Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice Hall.
- Richard Bronson, 1991, Matrix Methods An Introduction, Second Edition, Academic Press.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 4: Υπολογισμός του εκθετικού πίνακα». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS431/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης