ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Κλασική Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 2: Σήματα Συνεχούς Χρόνου

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

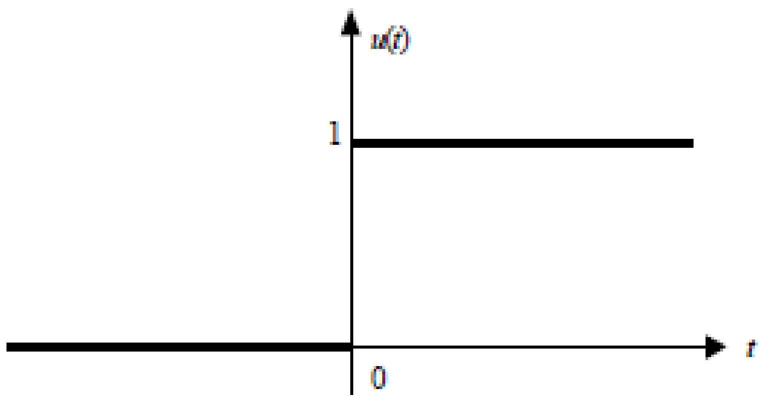
- Σήματα συνεχούς χρόνου.
  - Βηματική συνάρτηση.
  - Ορθογώνιος παλμός.
  - Συνάρτηση ανωφέρειας.
  - Τριγωνικός παλμός.
  - Ημιτονοειδής συνάρτηση.
  - Εκθετική συνάρτηση.
  - Κρουστική συνάρτηση.
  - Σήματα ορισμένα σε διάστημα.
- Η έννοια της γενικευμένης παραγώγου.

Σκοποί Ενότητας

- Εξοικείωση με σήματα συνεχούς χρόνου που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια καθώς και την έννοια της χρονικής μετάθεσης σήματος.
- Παρουσίαση της έννοιας της γενικευμένης παραγώγου.

Μοναδιαία βηματική συνάρτηση (unit step function or Heaviside step function)

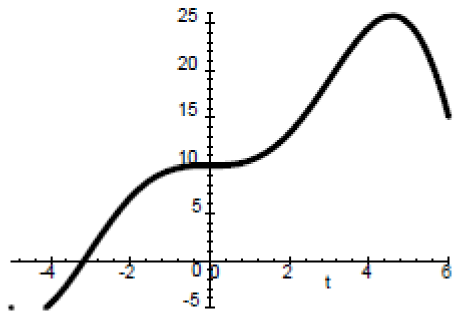
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

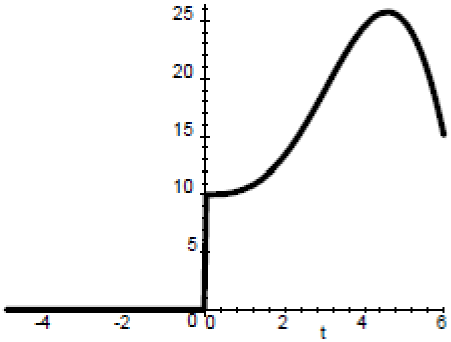


Μοναδιαία βηματική συνάρτηση (unit step function)

Σήμα συνεχούς χρόνου
$x(t) = 10 + t^2 * sin.5t,$
$t \in [-5,6].$

$$x(t)u(t) = \begin{cases} x(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

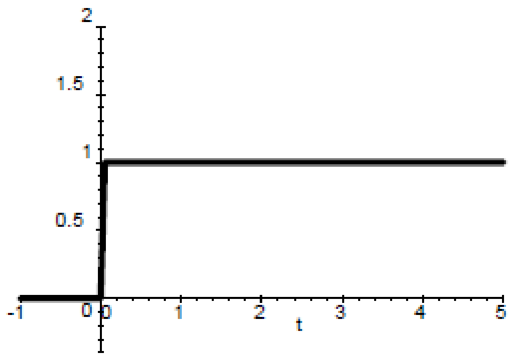




Το σήμα $v(t) = x(t)u(t) t \in [-5,6]$.

Χρονική μετάθεση σήματος προς τα δεξιά

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

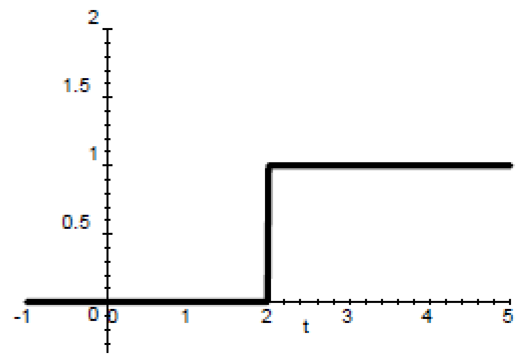


$u(t), t \in [-1{,}5]$

$$u(t-2) = \begin{cases} 1 & t-2 \geq 0 \\ 0 & t-2 < 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$u(t-2) = \begin{cases} 1 & t \geq 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$$



$u(t-2), t \in [-1{,}5]$

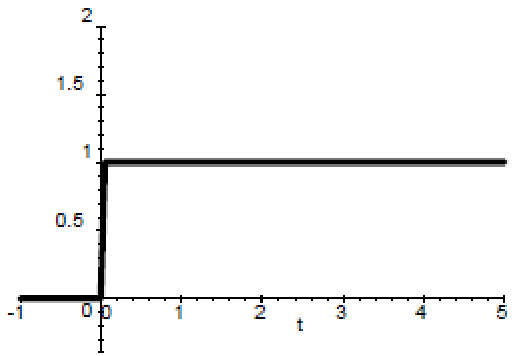
Χρονική μετάθεση σήματος προς τα αριστερά

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

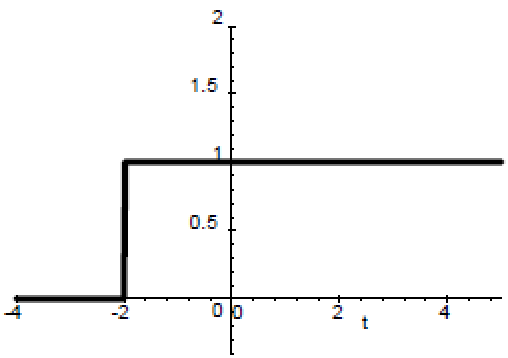
$$u(t+2) = \begin{cases} 1 & t+2 \geq 0 \\ 0 & t+2 < 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$u(t+2) = \begin{cases} 1 & t \geq -2 \\ 0 & t < -2 \end{cases}$$



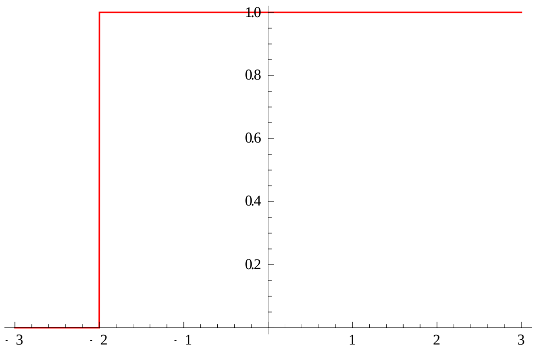
$u(t), t \in [-1,5]$



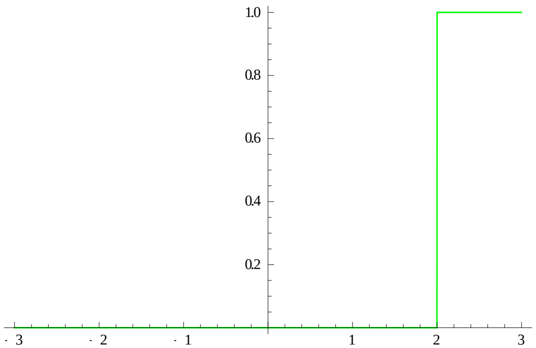
$u(t+2), t \in [-5,5]$

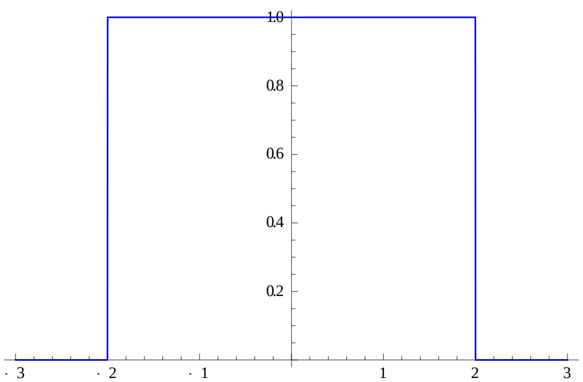
Ορθογώνιος παλμός (rectangle or rectangular or rect or Pi or gate or unit pulse function)

$u(t+2)$



$u(t-2)$

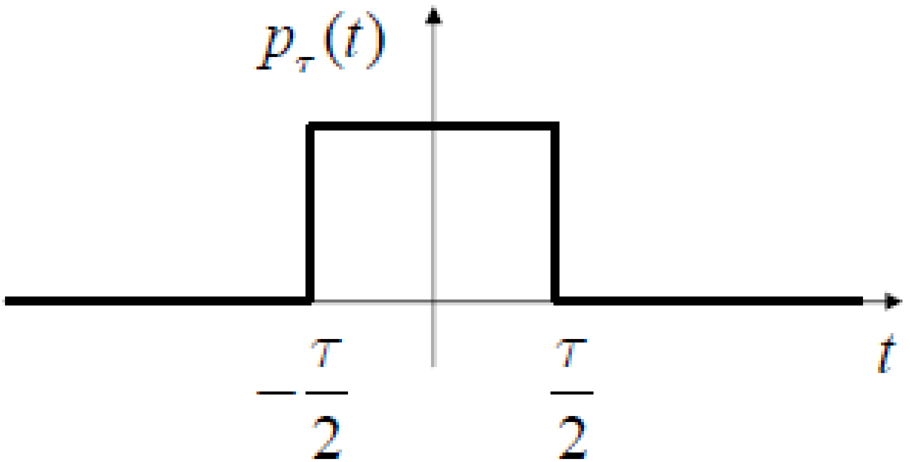




$$p_4(t) = u(t+2) - u(t-2)$$

Ορθογώνιος παλμός χρονικής διάρκειας τ (1)

$$p_\tau(t) = \begin{cases} 1 & -\dfrac{\tau}{2} \le t \le \dfrac{\tau}{2} \\ 0 & t < -\dfrac{\tau}{2} \; or \; t > \dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$



Ορθογώνιος παλμός χρονικής διάρκειας τ (2)

$$p_\tau(t-k) = \begin{cases} 1 & -\frac{\tau}{2} \le t-k \le \frac{\tau}{2} \\ 0 & t-k < -\frac{\tau}{2}\ or\ t-k > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$p_\tau(t-k) = \begin{cases} 1 & -\frac{\tau}{2} + k \le t \le \frac{\tau}{2} + k \\ 0 & t < -\frac{\tau}{2} + k\ or\ t > \frac{\tau}{2} + k \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$p_\tau(t-k) = u\left(t + \frac{\tau}{2} - k\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2} - k\right)$$

Μοναδιαία συνάρτηση ανωφέρειας (unit ramp function) (1)

$$\boldsymbol{r(t)=\begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}}$$

$t \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} u(\tau)d\tau + \int_{0}^{t} u(\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0d\tau + \int_{0}^{t} 1d\tau$$

$$= 0 + t = t$$

$t < 0$

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} 0d\tau = 0$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = u(t)$$

Μοναδιαία συνάρτηση ανωφέρειας (unit ramp function) (2)

$$\boldsymbol{r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}}$$

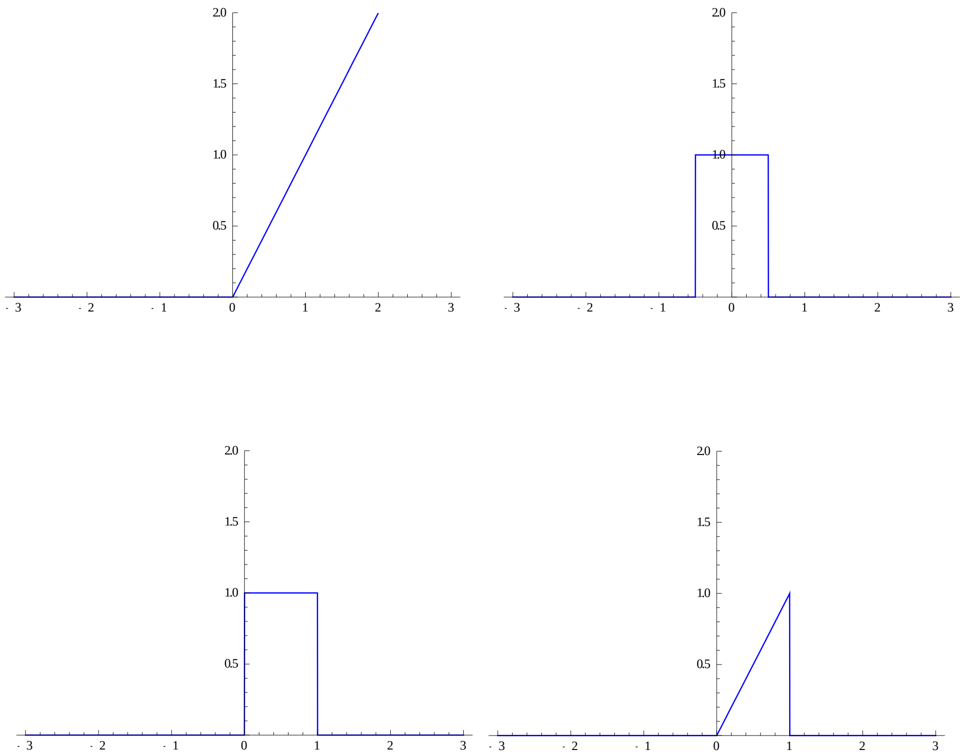
$$p_1(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & t < \frac{1}{2} \; or \; t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$p_1\left(t - \frac{1}{2}\right) = u(t) - u(t-1)$$

$$= \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t < 0 \; or \; t > 1 \end{cases}$$

$$r(t)p_1\left(t - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t < 0 \; or \; t > 1 \end{cases}$$



Μοναδιαία συνάρτηση ανωφέρειας (unit ramp function) (3)

$$\boldsymbol{r(t-1)=\begin{cases} t-1 & t\geq 1\\ 0 & t<1\end{cases}}$$

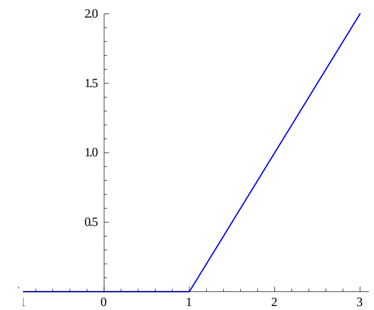
$$p_1(t)=u\left(t+\frac{1}{2}\right)-u\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

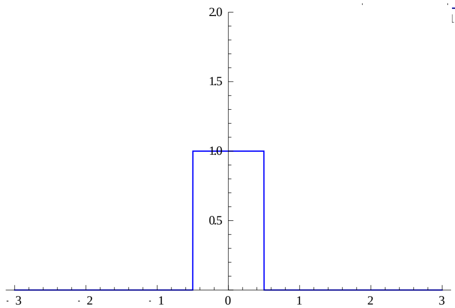
$$=\begin{cases}1 & -\frac{1}{2}\leq t\leq\frac{1}{2}\\ 0 & t<\frac{1}{2}\ or\ t>\frac{1}{2}\end{cases}$$

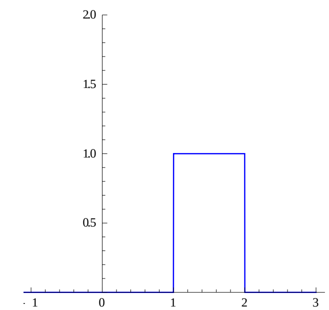
$$p_1\left(t-\frac{3}{2}\right)=u(t-1)-u(t-2)$$

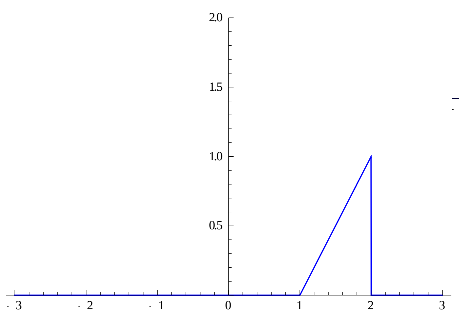
$$=\begin{cases}1 & 1\leq t\leq 2\\ 0 & t<1\ or\ t>2\end{cases}$$

$$r(t-1)p_1\left(t-\frac{3}{2}\right)=\begin{cases}t & 1\leq t\leq 2\\ 0 & t<1\ or\ t>2\end{cases}$$



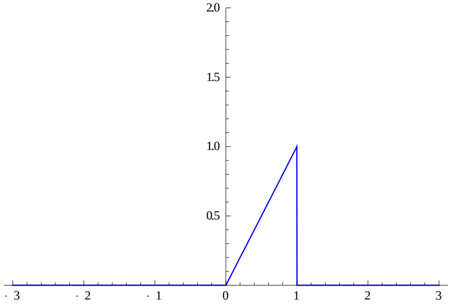




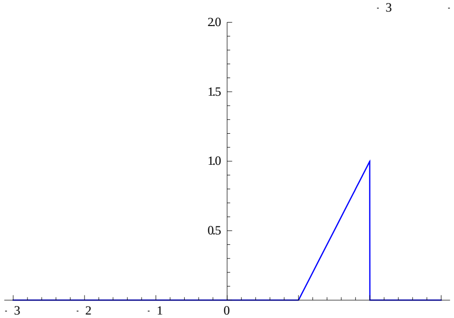


Μοναδιαία συνάρτηση ανωφέρειας (unit ramp function) (4)

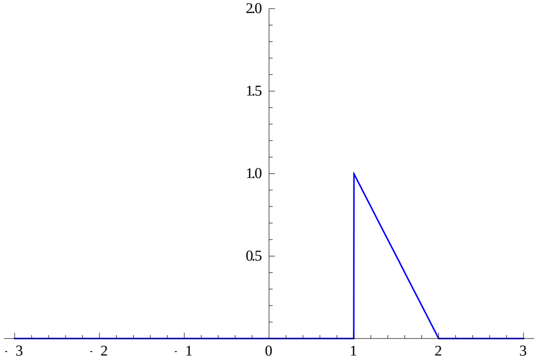
$$r(t)p_1\left(t-\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & t < 0 \; or \; t > 1 \end{cases}$$



$$r(t-1)p_1\left(t-\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} t & 1 \le t \le 2 \\ 0 & t < 1 \; or \; t > 2 \end{cases}$$



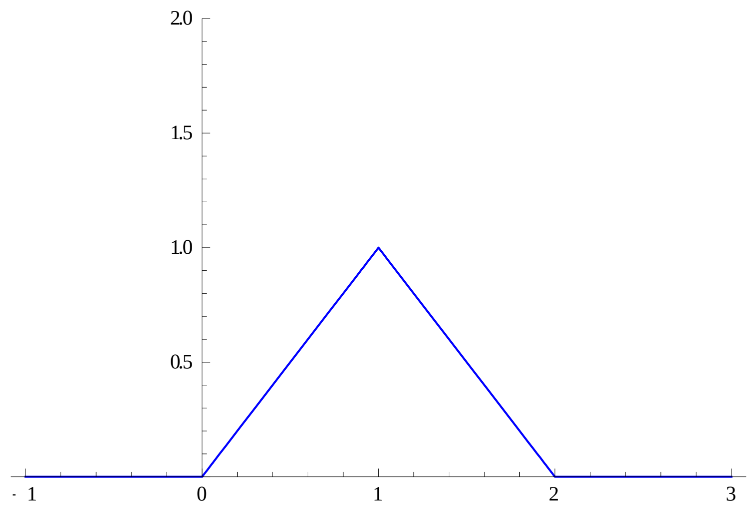
$$\big(1-r(t-1)\big)p_1\left(t-\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} 1-t & 1 \le t \le 2 \\ 0 & t < 1 \; or \; t > 2 \end{cases}$$



Τριγωνικός Παλμός (unit ramp function) (1)

$$\varphi_2(t-1) = r(t)p_1\left(t-\frac{1}{2}\right) + \big(1-r(t-1)\big)p_1\left(t-\frac{3}{2}\right)$$

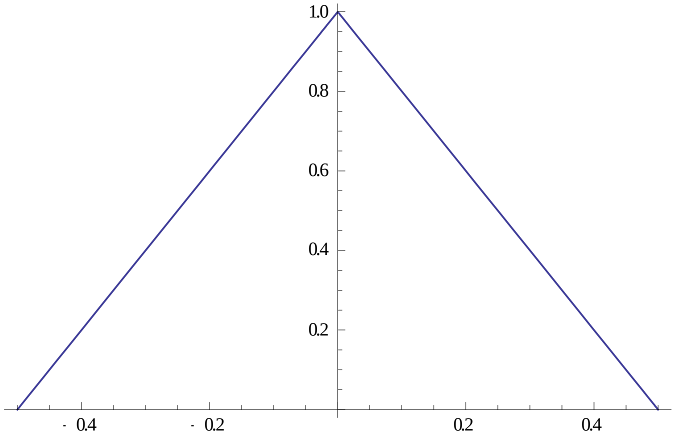
$$= \begin{cases} 0 & t<0 \; or \; t>2 \\ t & 0 \le t \le 1 \\ 2-t & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$



$$\varphi_2(t-1) = \begin{cases} 0 & |t-1|>1 \\ 1-|t-1| & |t-1|<1 \end{cases}$$

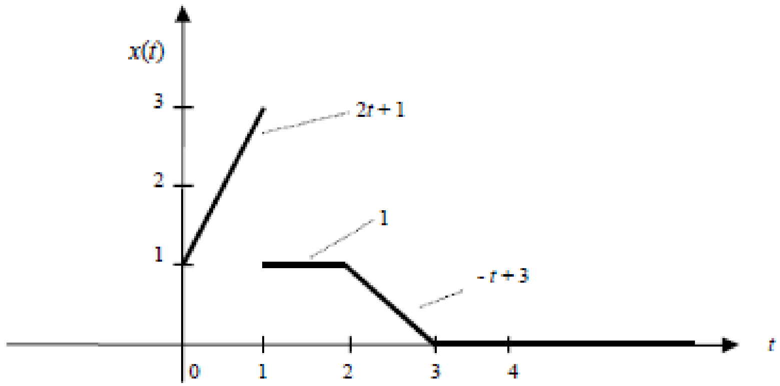
Τριγωνικός Παλμός (unit ramp function) (2)

- $$\varphi_\tau(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{\tau}{2} \ or \ t > \frac{\tau}{2} \\ 1 + \frac{2t}{\tau} & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq 0 \\ 1 - \frac{2t}{\tau} & 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} \end{cases}$$
- $$\varphi_\tau(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \\ 1 - \frac{2|t|}{\tau} & |t| \leq \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



Παράδειγμα 1

$$x(t)=\begin{cases}2t+1 & 0\le t<1\\ 1 & 1\le t\le 2\\ -t+3 & 2\le t\le 3\end{cases}$$



$$x(t)=(2t+1)[u(t)-u(t-1)]+(1)[u(t-1)-u(t-2)]+$$
$$+(-t+3)[u(t-2)-u(t-3)]$$

$$x(t)=(2t+1)u(t)-2tu(t-1)+(-t+2)u(t-2)+(t-3)u(t-3)$$

Σήματα ορισμένα ανά διαστήματα (1)

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t_1 \leq t < t_2 \\ x_2(t), & t_2 \leq t < t_3 \\ x_3(t) & t \geq t_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(t) = {} & x_1(t)[u(t-t_1) - u(t-t_2)] \\ & + x_2(t)[u(t-t_2) - u(t-t_3)] + x_3(t)u(t-t_3) \\ & = x_1(t)u(t-t_1) + [x_2(t) - x_1(t)]u(t-t_2) \\ & + [x_3(t) - x_2(t)]u(t-t_3) \end{aligned}$$

$$x(t) = f_1(t)u(t-t_1) + f_2(t)u(t-t_2) + f_3(t)u(t-t_3)$$

$$f_1(t) = x_1(t)$$

$$f_2(t) = x_2(t) - x_1(t)$$

$$f_3(t) = x_3(t) - x_2(t)$$

Σήματα ορισμένα ανά διαστήματα (2)

$$x(t) = f_1(t)u(t-t_1) + f_2(t)u(t-t_2) + f_3(t)u(t-t_3)$$

$$x(t) = \begin{cases} f_1(t), & t_1 \le t < t_2 \\ f_1(t) + f_2(t), & t_2 \le t < t_3 \\ f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) & t \ge t_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(t) = {} & f_1(t)[u(t-t_1) - u(t-t_2)] \\ & + [f_1(t) + f_2(t)][u(t-t_2) - u(t-t_3)] \\ & + [f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)]u(t-t_3), t \ge t_1 \end{aligned}$$

Σήματα ορισμένα ανά διαστήματα (3)

- $f(t) = tu(t-1) + (1-2t)u(t-2) + 3u(t-3)$

$$f(t) = \boldsymbol{t\big(u(t-1) - u(t-2)\big)} + tu(t-2) + (1-2t)u(t-2) + 3u(t-3) =$$

$$= t\big(u(t-1) - u(t-2)\big) + (1-t)u(t-2) + 3u(t-3) =$$

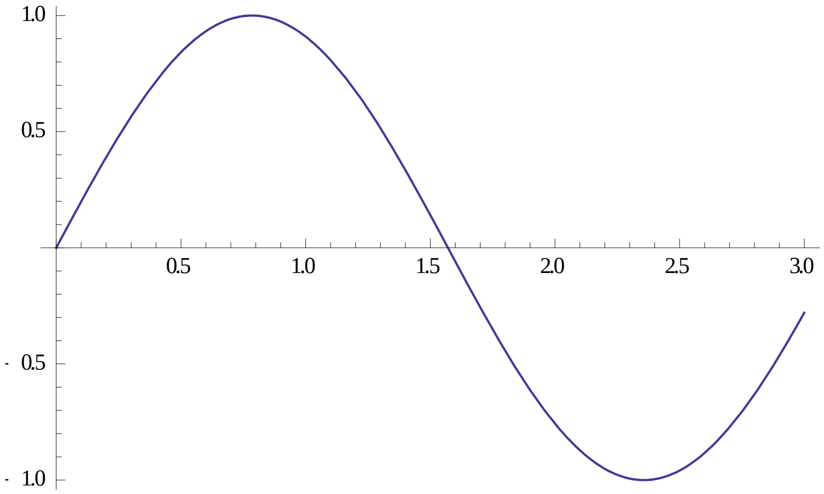
$$= t\big(u(t-1) - u(t-2)\big) + \boldsymbol{(1-t)\big(u(t-2) - u(t-3)\big)} + (1-t)u(t-3) + 3u(t-3) =$$

$$= t\big(u(t-1) - u(t-2)\big) + (1-t)\big(u(t-2) - u(t-3)\big) + \boldsymbol{(4-t)u(t-3)}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ t & 1 \le t < 2 \\ 1-t & 2 \le t < 3 \\ 4-t & t \ge 3 \end{cases}$$

Ημιτονοειδής συνάρτηση (1)

$$f(t) = A sin(\omega t + \varphi)$$

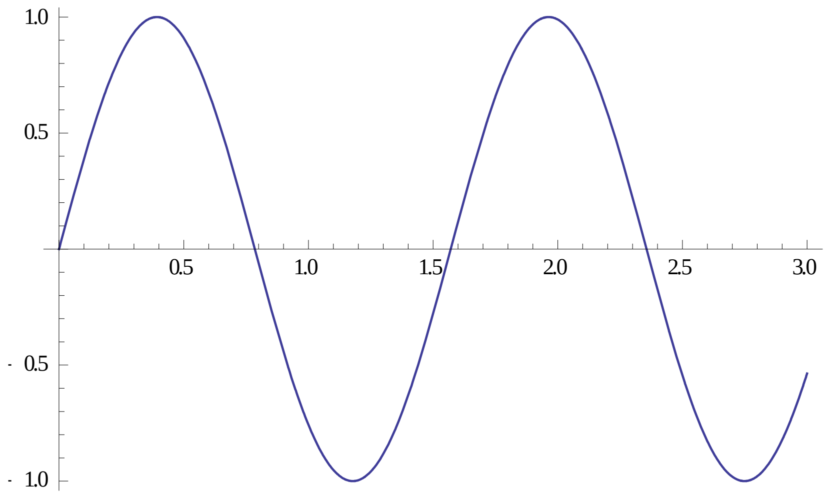


$$f(t) = sin(2t)$$

- **A** : εύρος της ημιτονοειδούς συνάρτησης (Amplitude)
- **ω**=2πf η κυκλική συχνότητα σε rad/sec
- **f**=1/T η συχνότητα σε Hz
- **T**=περίοδος σε sec
- **φ**=φάση της ημιτονοειδούς συνάρτησης
- **A** =1
- **ω**=2πf=2 rad/sec και άρα f=1/π Hz
- **f**=1/T η συχνότητα σε Hz
- **T**=π sec
- **φ**=0

Ημιτονοειδής συνάρτηση (2)

$$f(t) = Asin(\omega t + \varphi)$$

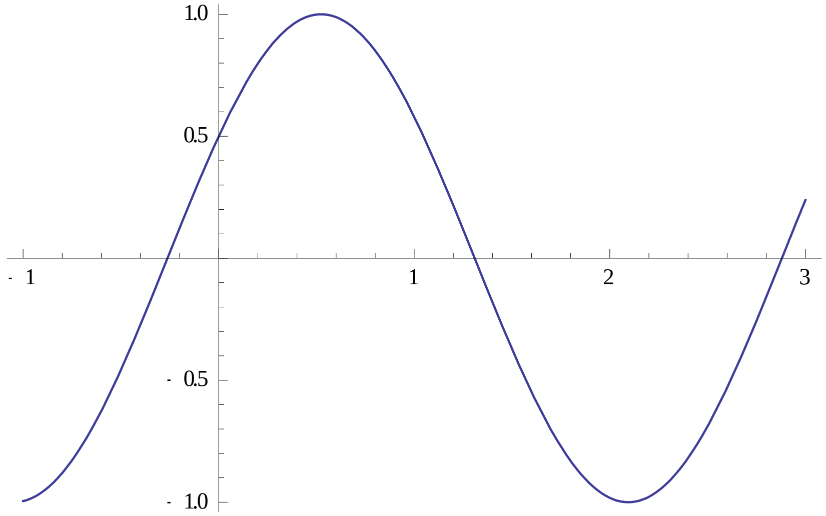


$$f(t) = sin(4t)$$

- **A**: εύρος της ημιτονοειδούς συνάρτησης (Amplitude)
- **ω**=2πf η κυκλική (γωνιακή) συχνότητα (angular frequency) σε rad/sec
- **f**=1/T η συχνότητα σε Hz (κύκλους ανά δευτερόλεπτο)
- **T**=2π/ω περίοδος σε sec
- **φ**=φάση της ημιτονοειδούς συνάρτησης (rad)
- **A** =1
- **ω**=2πf=4 rad/sec και άρα f=2/π Hz
- **f**=1/T η συχνότητα σε Hz
- **T**=2π/4=π/2 sec
- **φ**=0

Ημιτονοειδής συνάρτηση (3)

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$



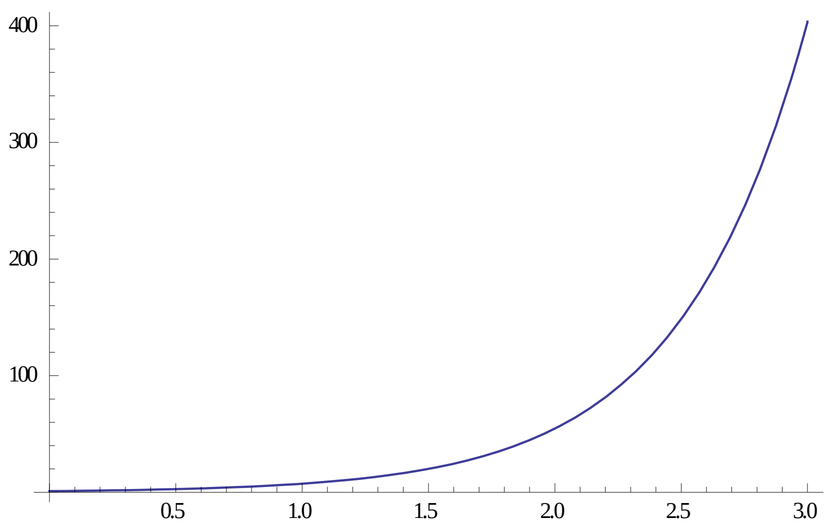
$$f(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

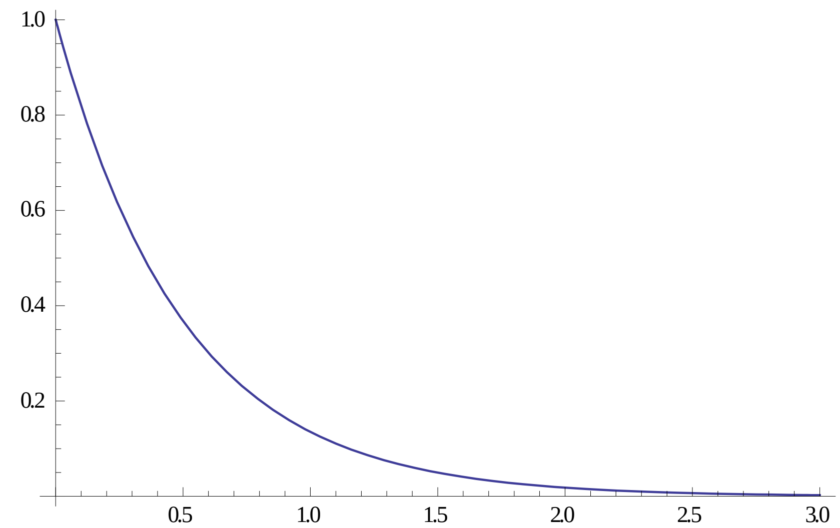
- **A**: εύρος της ημιτονοειδούς συνάρτησης (Amplitude)
- **ω**=2πf η κυκλική (γωνιακή) συχνότητα (angular frequency) σε rad/sec
- **f**=1/T η συχνότητα σε Hz (κύκλους ανά δευτερόλεπτο)
- **T**=2π/ω περίοδος σε sec
- **φ**=φάση της ημιτονοειδούς συνάρτησης (rad)
- **A** =1
- **ω**=2πf=2 rad/sec και άρα f=1/π Hz
- **f**=1/T η συχνότητα σε Hz
- **T**=2π/2=π sec
- **φ**=π/6

Εκθετική συνάρτηση (exponential function) $f(t) = e^{at}$

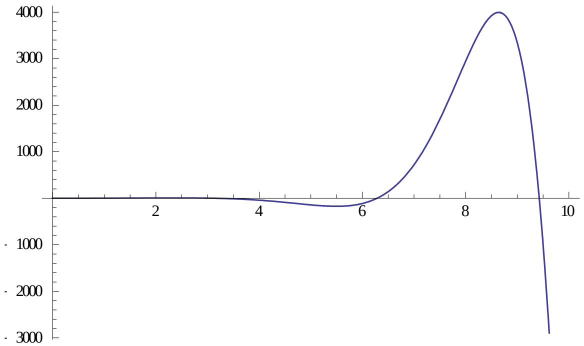
$f(t) = e^{2t}$

$f(t) = e^{-2t}$

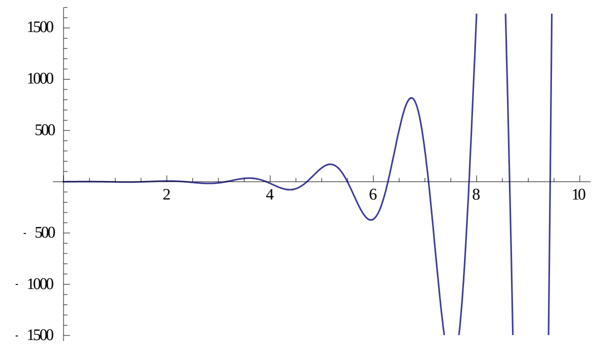




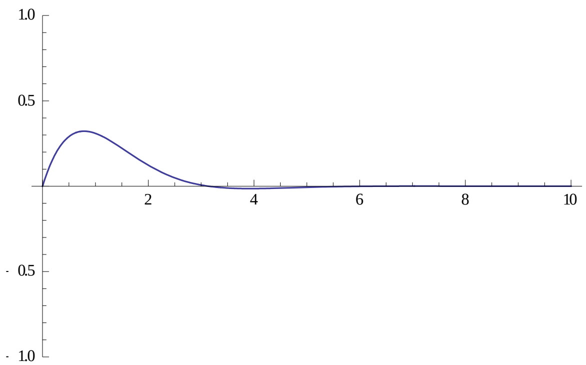
Εκθετική συνάρτηση
Παραδείγματα



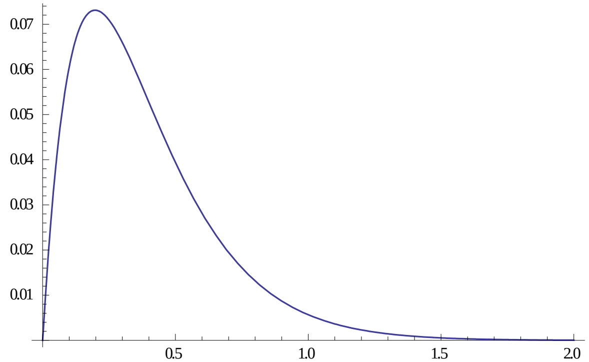
$f(t) = e^t \sin(t)$



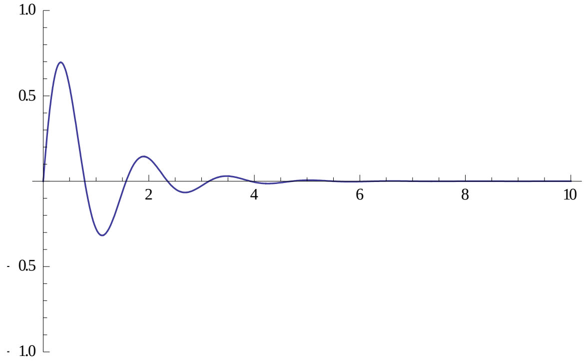
$f(t) = e^t \sin(4t)$



$f(t) = e^{-t} \sin(t)$



$f(t) = e^{-5t} \sin(t)$



$f(t) = e^{-t} \sin(4t)$

Μοναδιαία κρουστική συνάρτηση δ(t) (Dirac function ή καλύτερα functional) (1)

- $\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt$
- Δεν υπάρχει τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση που να την ικανοποιεί!
- Ιδιότητα μετατόπισης (shifting property)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t)\varphi(\tau)d\tau$$

$$\overset{x=\tau-t}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x+t)dx$$

$$= \varphi(0+t) = \varphi(t)$$

Εικόνα 1

Μοναδιαία κρουστική συνάρτηση δ(t) (Dirac function ή καλύτερα functional) (2)

- $\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt$
- Προσέγγιση

$$\zeta(t) = \begin{cases} 0 & |t| \geq 1 \\ e^{\frac{1}{t^2-1}} & |t| < 1 \end{cases}$$

$$\zeta(t/a) = \begin{cases} 0 & |t| \geq a \\ e^{\frac{a^2}{t^2-a^2}} & |t| < a \end{cases}$$

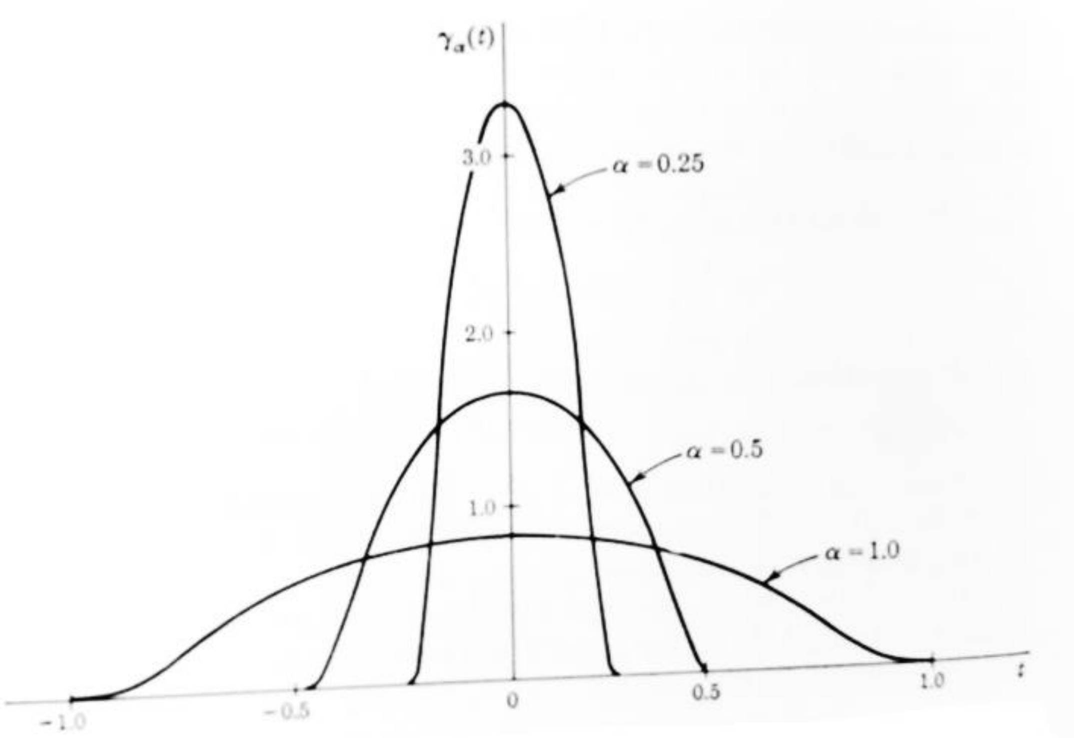
$$\gamma_a(t) = \frac{\zeta(t/a)}{\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(t/a)dt}, a > 0$$

$$\varphi(0) = \lim_{a \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\gamma_a(t)}\varphi(t)dt$$

Εικόνα 2

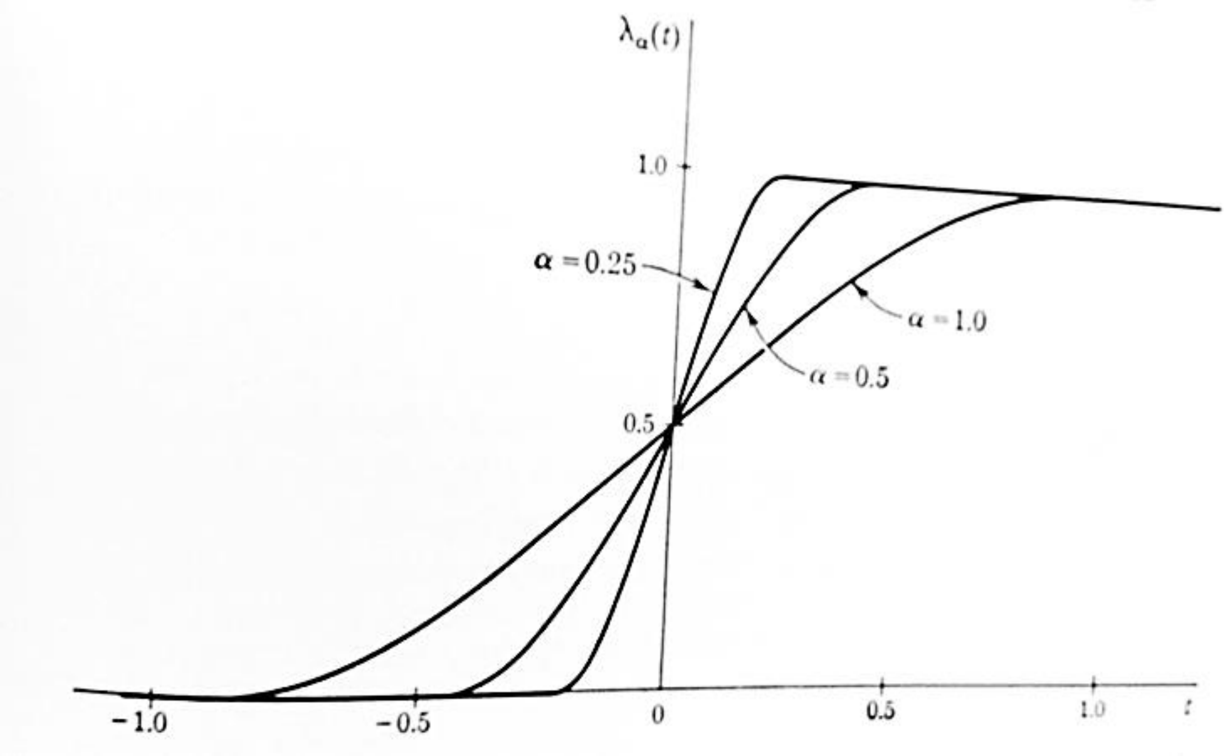
Μοναδιαία κρουστική συνάρτηση δ(t) (Dirac function ή καλύτερα functional) (3)

- Προσέγγιση της $\delta(t)$ μέσω της $\gamma_a(t)$για $a = 0.25, 0.5, 1.0.$



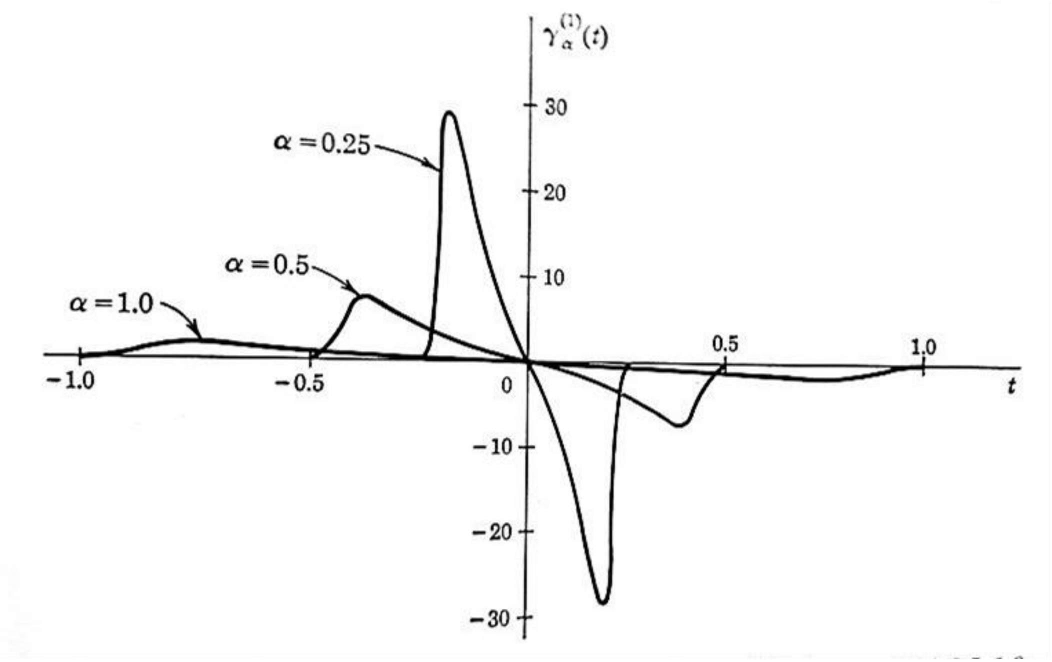
Μοναδιαία κρουστική συνάρτηση δ(t) (Dirac function ή καλύτερα functional) (4)

- $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$



Μοναδιαία κρουστική συνάρτηση δ(t) (Dirac function ή καλύτερα functional) (5)

- Προσέγγιση της $\delta^{(1)}(t)$ μέσω της $\gamma_{\alpha}^{(1)}(t)$για $a = 0.25, 0.5, 1.0.$



Μοναδιαία κρουστική συνάρτηση δ(t) Ιδιότητες (1)

- $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\delta(at)}\varphi(t)dt \overset{x=at}{\underset{a>0}{=}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{a}dx =$$
$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi\left(\frac{x}{a}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{a}\varphi\left(\frac{0}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\varphi(0) =$$
$$= \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\delta(t)}\right)\varphi(t)dt$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\delta(at)}\varphi(t)dt \overset{x=at}{\underset{\boldsymbol{a<0}}{=}}$

$$\int_{\infty}^{-\infty} \delta(x)\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{a}dx =$$
$$= -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi\left(\frac{x}{a}\right)dx =$$
$$= -\frac{1}{a}\varphi\left(\frac{0}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\varphi(0) =$$
$$= -\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\delta(t)}\right)\varphi(t)dt$$

Μοναδιαία κρουστική συνάρτηση δ(t) Ιδιότητες (2)

- $\delta(-t) = \delta(t)$ ΑΡΤΙΑ
- $\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\delta}(-\boldsymbol{t})\varphi(t)dt \overset{x=-t}{=}$

$$= -\int_{\infty}^{-\infty} \delta(x)\varphi(-x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(-x)dx$$

$$= \varphi(-0) = \varphi(0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{t})\varphi(t)dt$$

- $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \Rightarrow$ $\delta\big((-1)t\big) = \frac{1}{|-1|}\delta(t) =$ $\delta(t)$

Μοναδιαία κρουστική συνάρτηση δ(t) Ιδιότητες (3)

- Η πρώτη παράγωγος της βηματικής συνάρτησης είναι η $\delta(t)$.

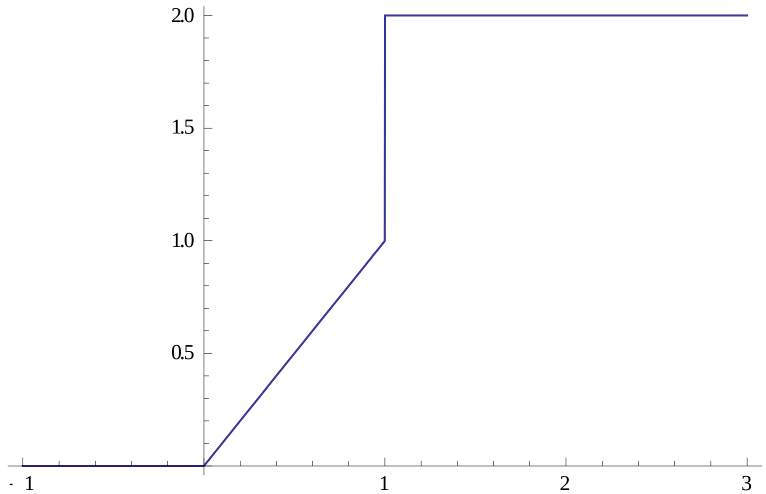
$$u^{(1)}(t) = \delta(t)$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} u^{(1)}(t)\varphi(t)dt =$
$[u(t)\varphi(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi^{(1)}(t)dt =$
$-\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi^{(1)}(t)dt = -\int_{0}^{\infty} \varphi^{(1)}(t)dt = \varphi(0) =$
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt$

Γενικευμένη παράγωγος (1)

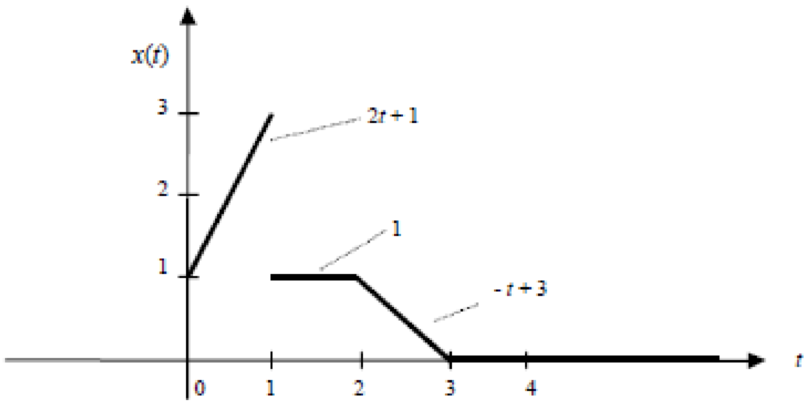
- **Κανονική παράγωγος** (ordinary derivative) (προϋποθέτει συνέχεια).
  - $x^{(1)}(t_1) = \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=t_1} = \lim_{h\to 0}\frac{x(t_1+h)-x(t_1)}{h}$
- **Γενικευμένη παράγωγος** (distributional derivative) (t_1 σημείο ασυνέχειας).
  - $x^{[1]}(t_1) = x^{(1)}(t_1) + \left(x(t_1^+) - x(t_1^-)\right)\delta(t-t_1)$
  - $u^{[1]}(0) = u^{(1)}(0) + \left(u(0^+) - u(0^-)\right)\delta(t) = 0 + (1-0)\delta(t) = \delta(t)$

Γενικευμένη παράγωγος (2)



- $f(t) = \big(u(t) - u(t-1)\big)t + 2u(t-1)$
- $f^{(1)}(t) = \big(u(t) - u(t-1)\big)$
- $f^{[1]}(t) = \big(u(t) - u(t-1)\big) + \big(f(1^+) - f(1^-)\big)\delta(t-1) = \big(u(t) - u(t-1)\big) + \delta(t-1)$

Γενικευμένη παράγωγος (3)



$$x(t) = \begin{cases} 2t+1 & 0 \le t < 1 \\ 1 & 1 \le t \le 2 \\ -t+3 & 2 \le t \le 3 \\ 0 & 3 < t \end{cases}$$

Γενικευμένη παράγωγος (4)

- $x(t) = \begin{cases} 2t+1 & 0 \le t < 1 \\ 1 & 1 \le t \le 2 \\ -t+3 & 2 \le t \le 3 \\ 0 & 3 < t \end{cases}$
- Η κανονική παράγωγος του $x(t)$ για κάθε t εκτός από $t = 0{,}1{,}2{,}3$ είναι

$$2[u(t) - u(t-1)] - [u(t-2) - u(t-3)]$$

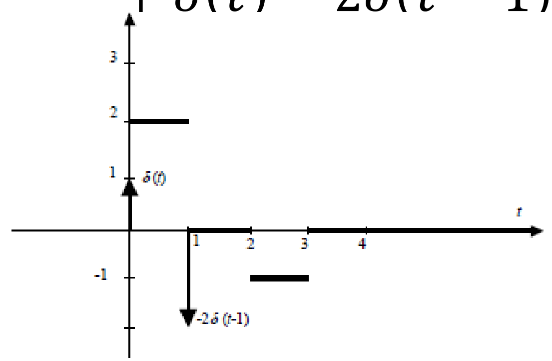
Γενικευμένη παράγωγος (5)

- $x(t) = \begin{cases} 2t+1 & 0 \le t < 1 \\ 1 & 1 \le t \le 2 \\ -t+3 & 2 \le t \le 3 \\ 0 & 3 < t \end{cases}$

- Η γενικευμένη παράγωγος του $x(t)$είναι

$$2[u(t) - u(t-1)] - [u(t-2) - u(t-3)] + \big(x(0^+) - x(0^-)\big)\delta(t) + \big(x(1^+) - x(1^-)\big)\delta(t-1)$$
$$= 2[u(t) - u(t-1)] - [u(t-2) - u(t-3)] + \delta(t) - 2\delta(t-1)$$

- Η γενικευμένη παράγωγος του $x(t)$είναι
$2[u(t) - u(t-1)] - [u(t-2) - u(t-3)] + (x(0^+) - (x(1^+) - x(1^-))\delta(t-1)$
$= 2[u(t) - u(t-1)] - [u(t-2) - u(t-3)] + \delta(t) - 2\delta(t-1)$



Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι., 2011, *Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Συστημάτων και Ελέγχου*, Τόμος Α: Κλασική Θεωρία Ελέγχου, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Πουλιέζος Αναστάσιος, 2013, *Περί Συστημάτων Ελέγχου. Εισαγωγικό Εγχειρίδιο της Σύγχρονης Θεωρίας Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου*, ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε.
- Norman Nise, 2011, *Control Systems Engineering*, 6th Edition, John Willey.
- http://books.google.gr/books/about/Distribution_Theory_and_Transform_Analys.html?id=7HxJj0orLFYC&redir_esc=y

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- Εικόνα 1,2: http://www.passerinesports.com/cricket.html

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Κλασσική Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 2: Σήματα Συνεχούς Χρόνου». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS432/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης