ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Κλασσική Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 3: Μαθηματική περιγραφή συστημάτων

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

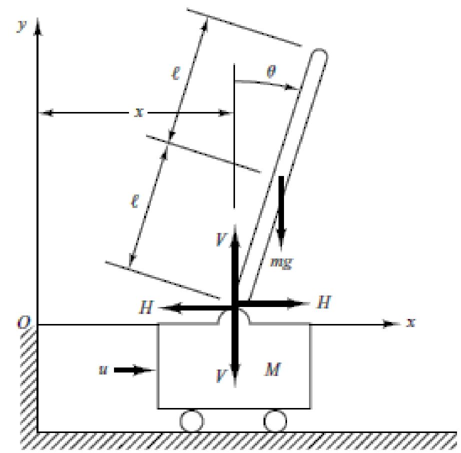
- Περιγραφή συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων.
- Μαθηματική περιγραφή γραμμικών συστημάτων.
- Γραμμικοποίηση συστημάτων.
- Αναπαράσταση συστήματος στον χώρο των καταστάσεων.

Σκοποί Ενότητας

- Παραδείγματα συστημάτων (ηλεκτρικά, μηχανικά κλπ).
- Γενική περιγραφή συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων.
- Ειδική περιγραφή των γραμμικών συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων.
- Γραμμικοποίηση ενός μη γραμμικού συστήματος.
- Τρόπος αναπαράστασης της περιγραφής ενός συστήματος στον χώρο τον καταστάσεων.

Ανάστροφο εκκρεμές (Segway)

Εικόνα 1



Καθορίστε τη γωνία της ράβδου από την κάθετη γραμμή ως θ.
Καθορίστε τις (x, y) συντεταγμένες του κέντρου βάρους της ράβδου εκκρεμούς ως (x_G, y_G). Τότε

$$x_G = x + l\sin\theta$$

$$y_G = l\cos\theta$$

Η περιστροφική κίνηση της ράβδου του εκκρεμούς γύρω από το κέντρο βάρους του είναι

$$I\ddot{\theta} = Vl\sin\theta - Hl\cos\theta$$

όπου I είναι η ροπή αδρανείας της ράβδου γύρω από το κέντρο της βαρύτητας.

Ανάστροφο εκκρεμές (1)

- Η οριζόντια κίνηση του κέντρου βάρους της ράβδου του εκκρεμούς δίνεται από

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x + l sin\theta) = H$$

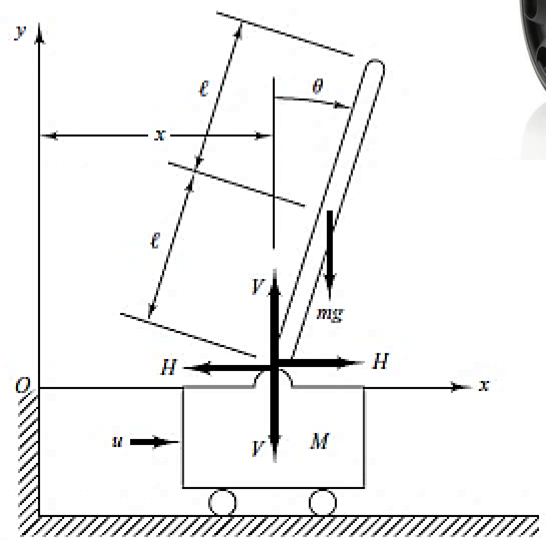
- Η κατακόρυφη κίνηση του κέντρου βάρους της ράβδου του εκκρεμούς είναι

$$m\frac{d^2}{dt^2}(l cos\theta) = V - mg$$

- Η οριζόντια κίνηση του περιγράφεται από

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = u - H$$

Εικόνα 2

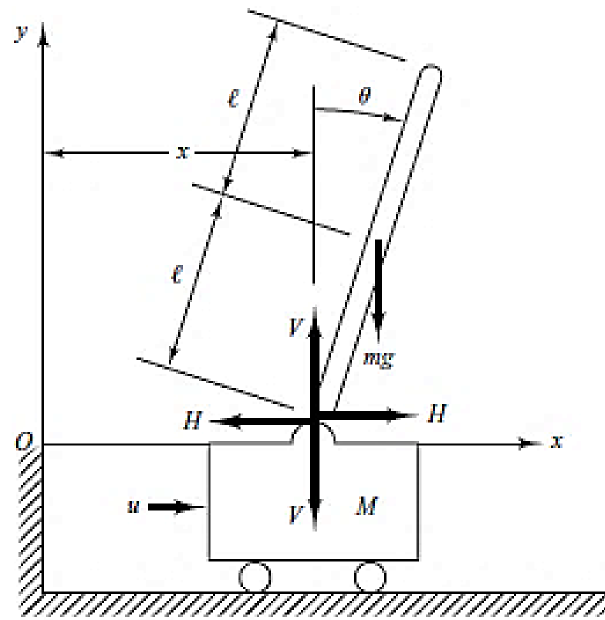


Ανάστροφο εκκρεμές
Υποθέσεις (1)

Για θ και $d\theta/dt$ κοντά στο μηδέν (σημείο ισορροπίας)

- $sin\theta = \theta, cos\theta = 1, \theta\dot{\theta}^2 = 0.$
- $I\ddot{\theta} = Vlsin\theta - Hlcos\theta \rightarrow I\ddot{\theta} = Vl\theta - Hl$
- $m\frac{d^2}{dt^2}(x + lsin\theta) = H \rightarrow m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = H$
- $m\frac{d^2}{dt^2}(lcos\theta) = V - mg \rightarrow 0 = V - mg$

Εικόνα 3



Ανάστροφο εκκρεμές Υποθέσεις (2)

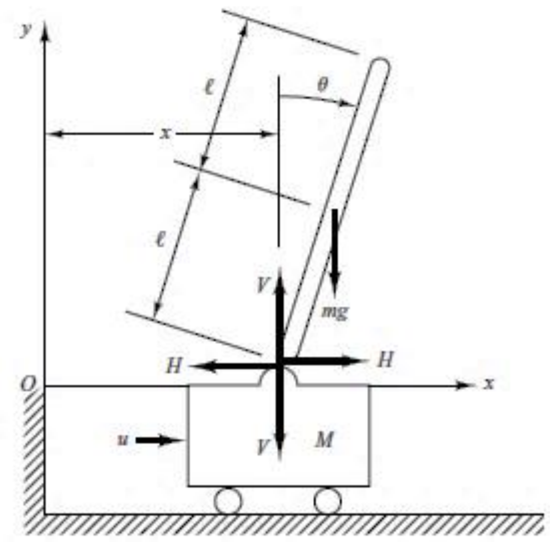
- $sin\theta = \theta, cos\theta = 1, \theta\dot{\theta}^2 = 0.$
- $\begin{cases} M\dfrac{d^2x}{dt^2} = u - H \\ m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = \mathrm{H} \end{cases} \rightarrow (\mathrm{M} + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$
- $\begin{cases} I\ddot{\theta} = Vl\theta - \mathrm{Hl} \\ m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = \mathrm{H} \\ 0 = \mathrm{V} - \mathrm{mg} \end{cases}$

$$\downarrow$$

- $\begin{cases} I\ddot{\theta} = mgl\theta - Hl = \\ = mgl\theta - l(m\ddot{x} + ml\theta) \end{cases}$

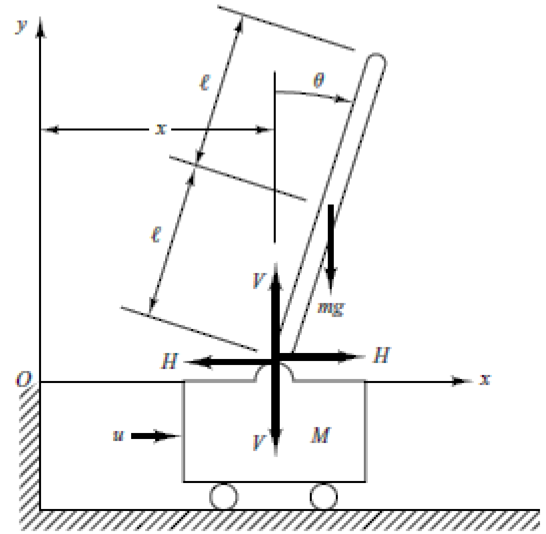
$$\downarrow$$

- $\{(l + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$



Ανάστροφο εκκρεμές
Εξισώσεις (1)

$$(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\theta}=u$$
$$ml^2\ddot{\theta}+ml\ddot{x}=mgl\theta$$



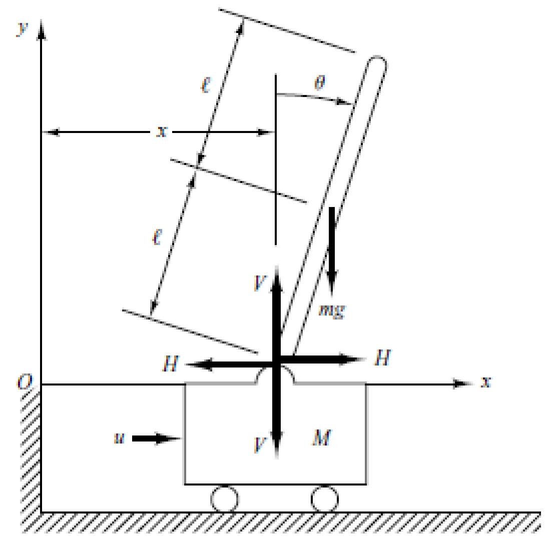
Ανάστροφο εκκρεμές
Εξισώσεις (2)

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \\ x_3 = x \\ x_4 = \dot{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{M+m}{Ml} g x_1 - \dfrac{1}{Ml} u \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\dfrac{m}{M} g x_1 + \dfrac{1}{M} u \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

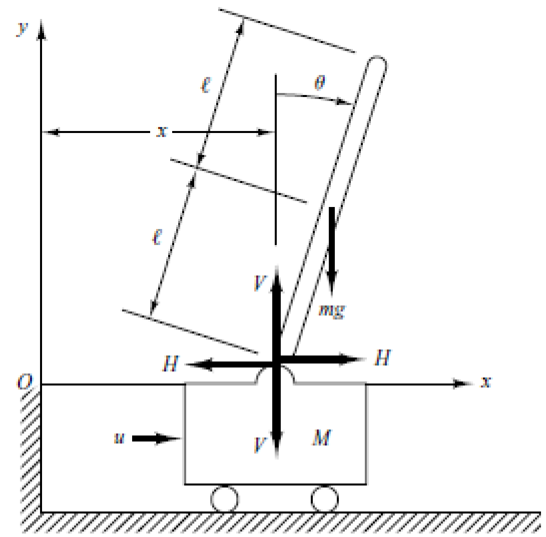
$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$$
$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$$



Ανάστροφο εκκρεμές Εξισώσεις (3)

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \\ x_3 = x \\ x_4 = \dot{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{M+m}{Ml} g x_1 - \dfrac{1}{Ml} u \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\dfrac{m}{M} g x_1 + \dfrac{1}{M} u \end{cases}$$

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$$
$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$$

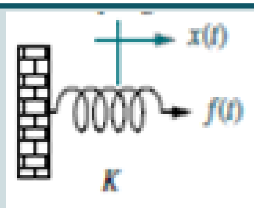
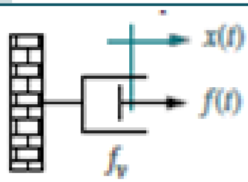
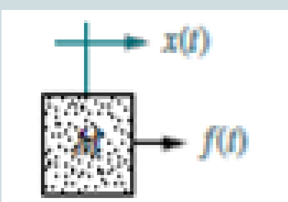


$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

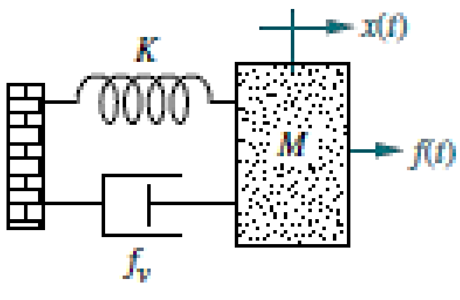
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{M+m}{Ml} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{m}{M} g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{Ml} \\ 0 \\ 1/M \end{bmatrix} u$$

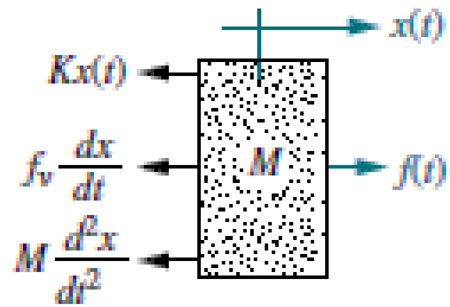
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Ανάστροφο εκκρεμές Εξισώσεις (4)

Εξάρτημα	Δύναμη-ταχύτητα	Μετατόπιση ισχύος	Σύνθετη αντίσταση $Z_M(s) = F(s)/X(s)$
	$f(t) = K\int_0^t v(\tau)d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	K
	$f(t) = f_v v(t)$	$f(t) = f_v \frac{dx(t)}{dt}$	$f v^{s}$
	$f(t) = M\frac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$	Ms^2

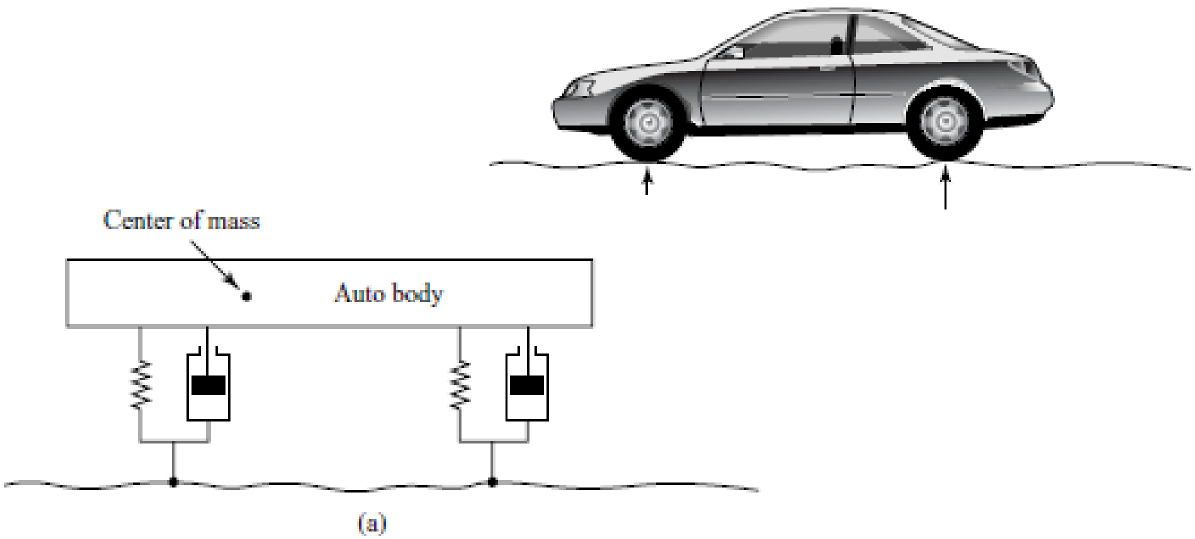
Μηχανικό σύστημα

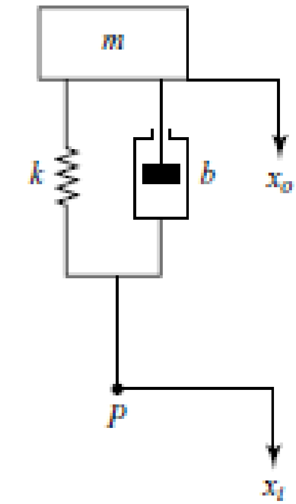




$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + f_v\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$$

Ανάρτηση αυτοκινήτου (1)

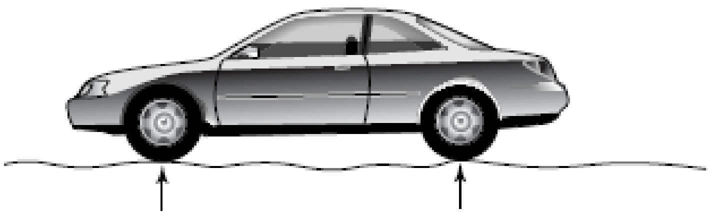


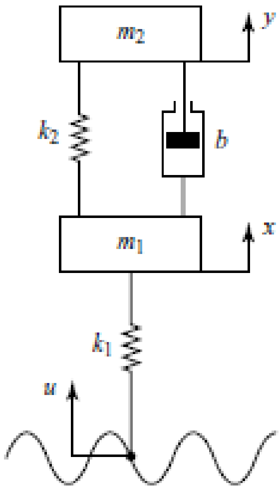


- Απλοποιημένο σύστημα

$$m\ddot{x}_0 + b(\dot{x}_0 - \dot{x}_i) + k(x_0 - x_i) = 0$$
$$m\ddot{x}_0 + b\dot{x}_0 + kx_0 = b\dot{x}_i + kx_i$$

Ανάρτηση αυτοκινήτου (2)





$$m_1\ddot{x} = k_2(y-x) + b(\dot{y}-\dot{x}) + k_1(u-x)$$

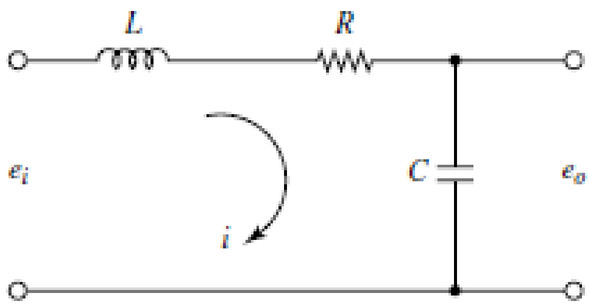
$$m_2\ddot{y} = -k_2(y-x) - b(\dot{y}-\dot{x})$$

$$\downarrow$$

$$m_1\ddot{x} + b\dot{x} + (k_1+k_2)x = b\dot{y} + k_2 y + k_1 u$$

$$m_2\ddot{y} + b\dot{y} + k_2 y = b\dot{x} + k_2 x$$

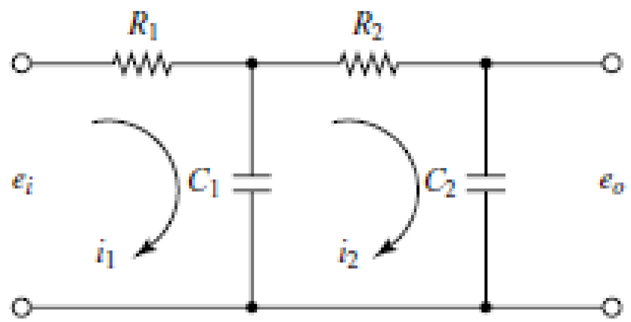
Ηλεκτρικό σύστημα (1)



- $L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt = e_l$
- $\frac{1}{C}\int idt = e_0$
- $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{LC}\end{bmatrix}u$
- $y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$
- $\begin{cases}x_1 = e_0\\ x_2 = \dot{e}_0\end{cases}$
- $\begin{cases}u = e_l\\ y = e_0 = x_1\end{cases}$
- $\ddot{e}_0 + \frac{R}{L}\dot{e}_0 + \frac{1}{LC}e_0 = \frac{1}{LC}e_l$

Ηλεκτρικό σύστημα (2)

- $\frac{1}{C_1}\int(i_1 - i_2)dt + R_1 i_1 = e_l$
- $\frac{1}{C_1}\int(i_2 - i_1)dt + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2 dt = 0$
- $\frac{1}{C_2}\int i_2 dt = e_0$

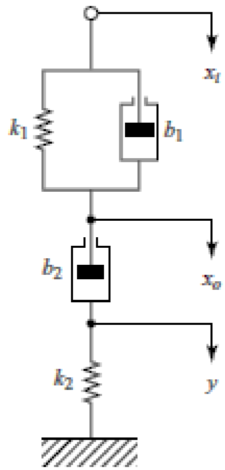


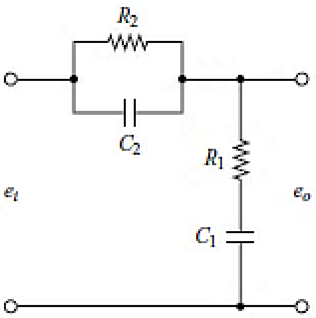
Ηλεκτρικό σύστημα (3)

- $b_1(\dot{x}_i - \dot{x}_0) + k_1(x_i - x_0) = b_2(\dot{x}_0 - \dot{y})$
- $b_2(\dot{x}_0 - \dot{y}) = k_2 y$
- $\frac{X_0(s)}{X_i(s)} = \frac{\left(\frac{b_1}{k_1}s+1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s+1\right)}{\left(\frac{b_1}{k_1}s+1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s+1\right)+\frac{b_2}{k_1}s}$

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}{\frac{1}{(1/R_2) + C_2 s} + R_1 + \frac{1}{C_1 s}} =$$

$$= \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_2 C_1 s}$$





Περιγραφή συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων (1)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ y_m(t) = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{cases}$$

Περιγραφή συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων (2)

- $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$,
- $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$
- $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$,

- $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,u,t) \\ y(t) = g(x,u,t) \end{cases}$

όπου

$$f(x,u,t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

$$g(x,u,t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

Γραμμικά συστήματα

- $$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Γραμμικοποίηση Συστημάτων

- $\begin{cases} \dot{x}(t) = h(x(t), u(t), t) \\ y(t) = f(x(t), u(t), t) \end{cases}$
- $\dot{x}_0(t) = h(x_0(t), u_0(t), t)$
- $\dot{x}_0(t) + \dot{\bar{x}}(t) = h(x_0(t) + \bar{x}(t), u_0(t) + \bar{u}(t), t) = h(x_0(t), u_0(t), t) + \frac{\partial h}{\partial x}\bar{x} + \frac{\partial h}{\partial x}\bar{u} + \cdots$
- $\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t)$
- $A(t) \coloneqq \frac{\partial h}{\partial x} \coloneqq \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x_1} & \frac{\partial h_3}{\partial x_2} & \frac{\partial h_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}, B(t) \coloneqq \frac{\partial h}{\partial u} \coloneqq \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_1} & \frac{\partial h_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial h_3}{\partial u_1} & \frac{\partial h_3}{\partial u_2} \end{bmatrix}$

Αναπαράσταση συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων (1)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u$$

- $\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases}$
- $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - \cdots - a_1 x_n + u \end{cases}$
- $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Αναπαράσταση συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων (2)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

- $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & & -a_1 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

Αναπαράσταση συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων (3)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_n u$$

- $$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0 u \\ x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 = \ddot{y} - \beta_0 u - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u \end{cases}$$
- $$\begin{cases} \beta_0 = b_0 \\ \beta_1 = b_1 - \alpha_1 \beta_0 \\ \beta_2 = b_2 - \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} = b_{n-1} - \alpha_1 \beta_{n-2} - \cdots - \alpha_{n-2} \beta_1 - \alpha_{n-1} \beta_0 \\ \beta_n = b_n - \alpha_1 \beta_{n-1} - \cdots - \alpha_{n-1} \beta_1 - \alpha_n \beta_0 \end{cases}$$

Αναπαράσταση συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων (4)

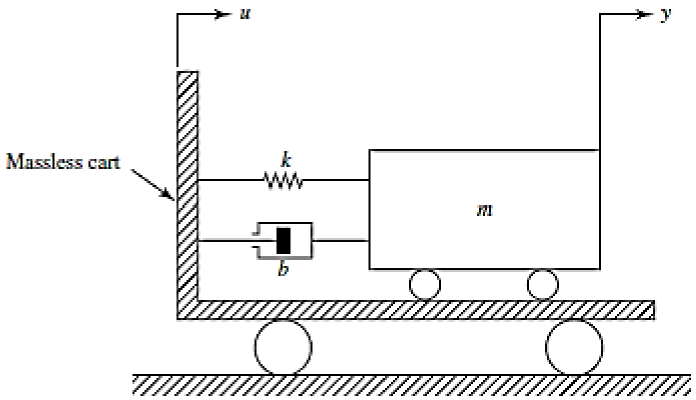
$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\
\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\
\vdots \\
\dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\
\dot{x}_n = -\alpha_n x_1 - \alpha_{n-1} x_2 - \cdots - \alpha_1 x_n + \beta_n u
\end{cases}
$$

Αναπαράσταση συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων (5)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_n u$$

- $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$
- $$y = [1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

Μηχανικό σύστημα (1)



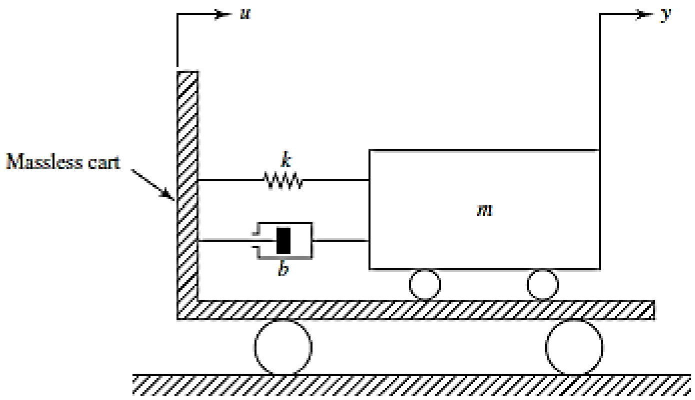
Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα αναφέρει ότι

$$ma = \Sigma\mathrm{F}$$

όπου m είναι μια μάζα, a είναι η επιτάχυνση της μάζας, και ΣF είναι το άθροισμα των δυνάμεων που δρουν επί της μάζας προς την κατεύθυνση της επιτάχυνσης a. Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του και να σημειωθεί ότι το καλάθι δεν έχει μάζα, παίρνουμε

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -b\left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt}\right) - k(y-u)$$

Μηχανικό σύστημα (2)



$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = b\frac{du}{dt} + ku$$

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

$$a_1 = \frac{b}{m}, a_2 = \frac{k}{m}, b_0 = 0,$$

$$b_1 = \frac{b}{m}, b_2 = \frac{k}{m}$$

Μηχανικό σύστημα (3)

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

$$a_1 = \frac{b}{m}, a_2 = \frac{k}{m}, b_0 = 0, b_1 = \frac{b}{m}, b_2 = \frac{k}{m}$$

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = \frac{b}{m}$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2$$

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0 u = y \\ x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \dfrac{b}{m}u \end{cases}$$

Μηχανικό σύστημα (4)

- $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + \frac{b}{m}u \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 u = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right] \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

- $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2 \end{bmatrix} u$$
- $$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι., 2011, *Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Συστημάτων και Ελέγχου*, Τόμος Α: Κλασική Θεωρία Ελέγχου, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Πουλιέζος Αναστάσιος, 2013, *Περί Συστημάτων Ελέγχου. Εισαγωγικό Εγχειρίδιο της Σύγχρονης Θεωρίας Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου*, ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε.
- Norman Nise, 2011, *Control Systems Engineering*, 6th Edition, John Willey.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- Εικόνα 1: http://www.allsanfranciscotours.com/body.asp?tour=SFO-SEG01&page=TourDetails
- Εικόνα 2: http://sphericaldrivesystem.com/concept/
- Εικόνα 3: http://www.airwing.gr/booking/index.php?pid=198

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Κλασσική Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 3: Μαθηματική περιγραφή συστημάτων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS432/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης