ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Κλασσική Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 4: Ιδιότητες συστημάτων

Νίκος Καραμπετάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Ιδιότητες συστημάτων.
  - Αιτιότητα (causality).
  - Χρονικά αναλλοίωτο σύστημα (time invariant).
  - Γραμμικό (linear).
  - Χωρίς μνήμη (memoryless).
  - Πεπερασμένης διάστασης (finite dimensional).

Σκοποί Ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να παρουσιάσει βασικές ιδιότητες συστημάτων όπως αιτιότητα (causality), γραμμικότητα κ.λ.π.

Αιτιότητα (Causality) (1)

- **Ιδιότητα 1**. Ένα σύστημα είναι **αιτιατό (causal)**, εάν $u \rightsquigarrow y$ τότε, για οποιαδήποτε είσοδο $\bar{u}$ για την οποία ισχύει
$$\bar{u}(t) = u(t), \forall 0 \leq t < T$$
για κάποια χρονικό διάστημα $T > 0$, το σύστημα έχει (τουλάχιστον) μία έξοδο $\bar{y}$ για την οποία ισχύει
$$\bar{y}(t) = y(t), \forall 0 \leq t < T.$$

"Η έξοδος πριν από την χρονική στιγμή t δεν εξαρτάται από την είσοδο μετά την χρονική στιγμή t."

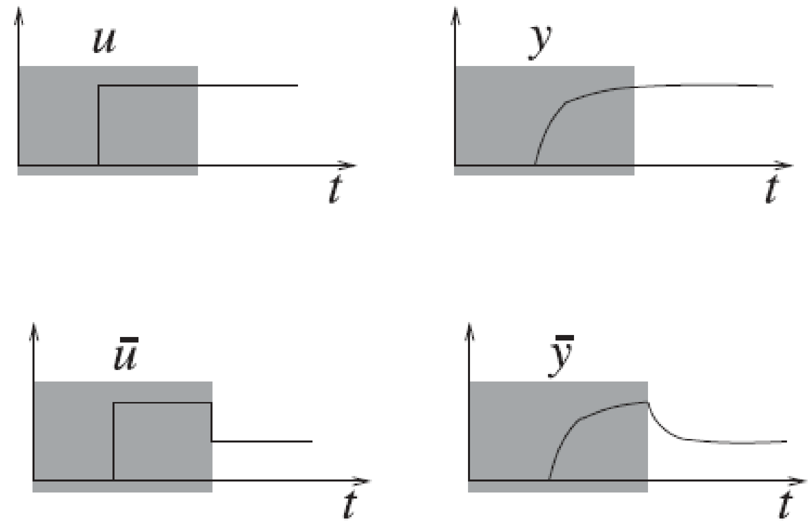
Αιτιότητα (Causality) (2)

Ορισμός: Ένα σύστημα

$$y(t) = (Fx)(t)$$

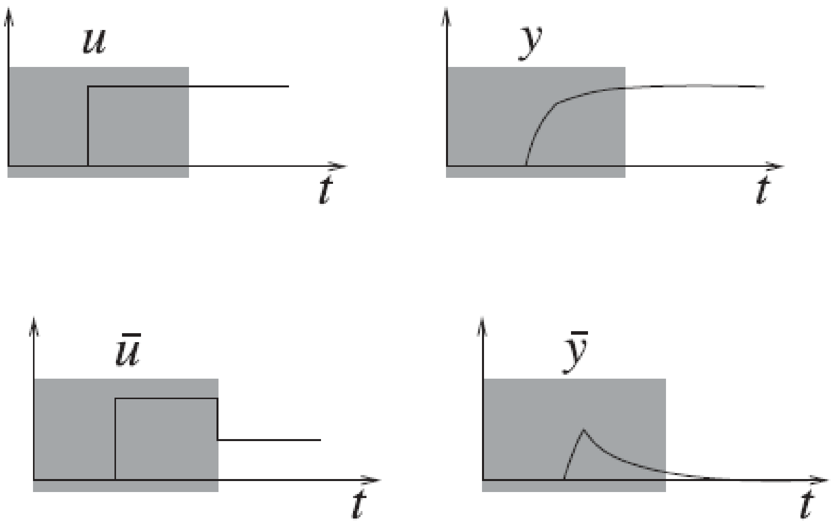
λέγεται **αιτιατό** αν, για κάθε χρονική στιγμή t_0, η έξοδος $y(t_0)$ του συστήματος την χρονική στιγμή t_0, εξαρτάται μόνο από την είσοδο $x(t_0)$ μέχρι την χρονική στιγμή t_0.

Αιτιότητα (Causality) (3)



Αιτιατό σύστημα

Αιτιότητα (Causality) (4)

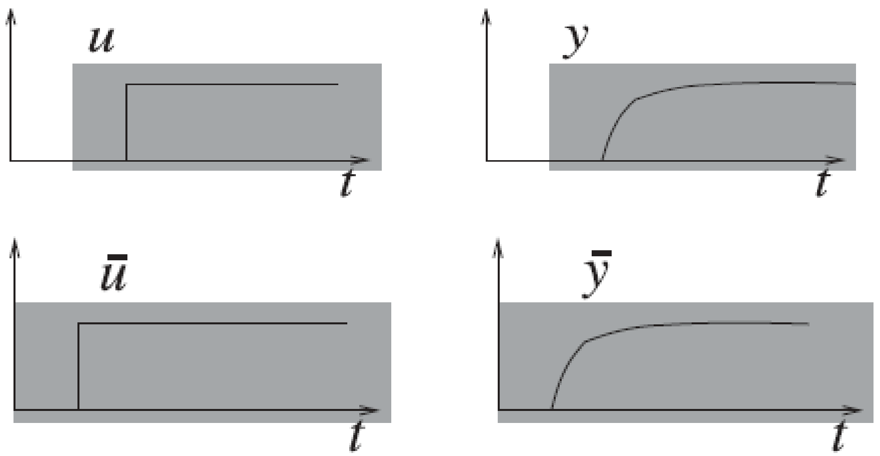


Μη αιτιατό σύστημα

Χρονικά αναλλοίωτο (Time invariance) (1)

- **Ιδιότητα 2.** Ένα σύστημα είναι **χρονικά αναλλοίωτο (time invariant)** υπό την έννοια ότι, εάν $u \rightsquigarrow y$ τότε, για κάθε $T > 0$, έχουμε $\bar{u} \rightsquigarrow \bar{y}$ όπου

$$\bar{u}(t) = u(t+T), \forall t \geq 0, \text{ και } \bar{y}(t) = y(t+T), \forall t \geq 0.$$

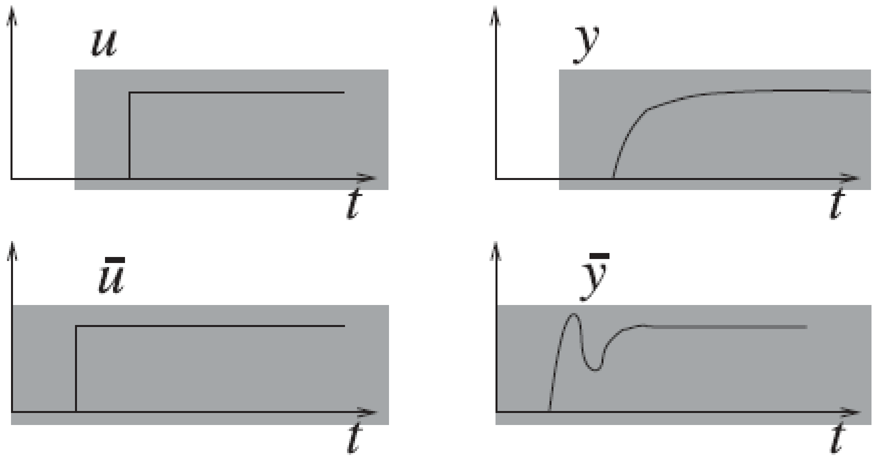


Χρονικά αναλλοίωτο

Χρονικά αναλλοίωτο (Time invariance) (2)

- **Ιδιότητα 2.** Ένα σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο υπό την έννοια ότι, εάν $u \rightsquigarrow y$ τότε, για κάθε $T > 0$, έχουμε $\bar{u} \rightsquigarrow \bar{y}$ όπου

$\bar{u}(t) = u(t+T), \forall t \geq 0$, και $\bar{y}(t) = y(t+T), \forall t \geq 0$.



Μη χρονικά αναλλοίωτο

Χρονικά αναλλοίωτο (Time invariance) (3)

Έστω το σύστημα

$$y(t) = \big(Fx(t)\big)(t) = tx(t)$$

Η έξοδος σε είσοδο $\tilde{x}(t) := x(t - t_1)$ είναι

$$(F\tilde{x})(t) = t\tilde{x}(t) = tx(t - t_1) \neq (t - t_1)x(t - t_1)$$
$$= y(t - t_1)$$

Μετατόπιση της εξόδου κατά t_1 $\neq$ εξόδου για μετατόπιση της εισόδου κατά t_1.

Γραμμικότητα (Linearity)

Ορισμός: Ένα σύστημα

$$y(t) = (Fx)(t)$$

λέγεται

- **Προσθετικό** αν για κάθε ζεύγος εισόδων $x_1(t), x_2(t)$είναι

$$\big(F(x_1 + x_2)\big)(t) = (Fx_1)(t) + (Fx_2)(t)$$

- **Ομογενές** αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\big(F(ax)\big)(t) - a(Fx)(t)$$

- **Γραμμικό** αν είναι προσθετικό και ομογενές αν για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$

$$\big(F(ax_1 + bx_2)\big)(t) = a(Fx_1)(t) + b(Fx_2)(t)$$

Παράδειγμα 1

Έστω σύστημα με σχέση εισόδου-εξόδου την

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} x(\tau)d\tau\,.$$

Το σύστημα είναι γραμμικό, επειδή για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ είναι

$$\int_{\tau=0}^{\tau=t} [ax_1(\tau) + bx_2(\tau)]d\tau$$
$$= a\int_{\tau=0}^{\tau=t} x_1(\tau)d\tau + b\int_{\tau=0}^{\tau=t} x_2(\tau)d\tau$$

Παράδειγμα 2

Έστω σύστημα με σχέση εισόδου-εξόδου την

$$y(t) = [x(t)]^2$$

Για $a \in \mathbb{R}$ η είσοδος είναι η $ax(t)$

Η έξοδος θα είναι η $y(t) = a^2[x(t)]^2$ και όχι η $a[x(t)]^2$

Άρα το σύστημα δεν είναι ομογενές και άρα δεν είναι γραμμικό.

Δίχως μνήμη (Memoryless)

Ορισμός: Ένα αιτιατό σύστημα

$$y(t) = (Fx)(t)$$

δεν έχει μνήμη, αν για κάθε t_1, η έξοδος $y(t_1)$ την χρονική στιγμή t_1 εξαρτάται μόνο από την τιμή της εισόδου $x(t_1)$ την χρονική στιγμή t_1.

Παράδειγμα 3 (Δίχως μνήμη)

Το σύστημα

$$y(t) = Kx(t), K \in \mathbb{R}$$

δεν έχει μνήμη.

Με μνήμη (With memory)

Ορισμός: Ένα αιτιατό σύστημα έχει μνήμη αν για κάθε t_1 η έξοδος $y(t_1)$ την χρονική στιγμή t_1 εξαρτάται από τις τιμές της εισόδου $x(t)$ για t μέσα σε ένα διάστημα μέχρι την χρονική στιγμή t_1: $t_0 \leq t \leq t_1$.

Παράδειγμα 4 (με μνήμη)

Το σύστημα με σχέση εισόδου-εξόδου την

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} x(\tau)d\tau$$

έχει μνήμη, διότι η έξοδος $y(t)$ εξαρτάται από τιμές της εισόδου $x(\tau)$ για $0 \leq \tau \leq t$.

Σύστημα με πεπερασμένη διάσταση (finite dimensional)

Ορισμός: Ένα σύστημα

$$y(t) = (Fx)(t)$$

έχει πεπερασμένη διάσταση n, αν για κάποιους φυσικούς αριθμούς $n \neq 0, m \neq 0$ η n-οστής τάξης παράγωγος $\frac{d^n y(t)}{dt^n}$ είναι συνάρτηση των παραγώγων:

$$\frac{d^k y(t)}{dt^k}, k = 0,1, \dots, n-1, \frac{d^j x(t)}{dt^j}, j = 0,1, \dots, m$$

Δηλαδή αν

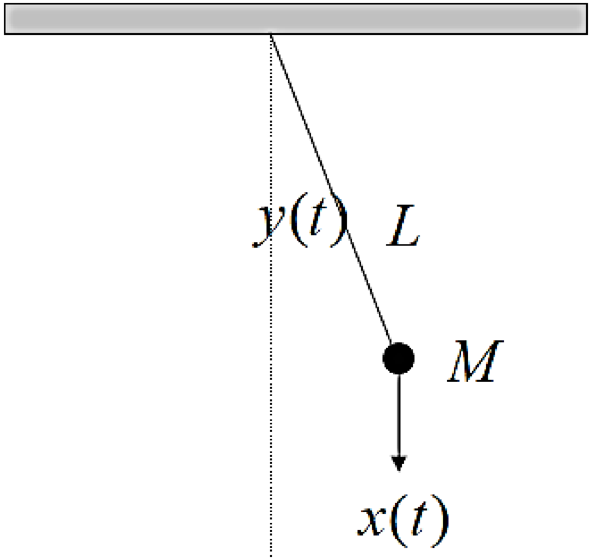
$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = f\left(y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}, x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right)$$

Παράδειγμα 5 (1)

Έστω ότι η διαφορική εξίσωση του απλού εκκρεμούς

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\frac{Mgl}{I}siny(t) + \frac{L}{I}x(t)$$

το σύστημα έχει διάσταση $n = 2$.



Παράδειγμα 5 (2)

Ενώ το σύστημα με σχέση εισόδου-εξόδου τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t-1) + x(t)$$

δεν έχει πεπερασμένη διάσταση.

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι., 2011, *Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Συστημάτων και Ελέγχου*, Τόμος Α: Κλασική Θεωρία Ελέγχου, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Βαρδουλάκης Α.Ι.,http://eclass.auth.gr/courses/MATH101/
- Πουλιέζος Αναστάσιος, 2013, *Περί Συστημάτων Ελέγχου. Εισαγωγικό Εγχειρίδιο της Σύγχρονης Θεωρίας Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου*, ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε.
- Ogata K., 2009, *Modern Control Engineering*, 5th Edition, Pearson Prentice Hall.
- Norman Nise, Control Systems Engineering, 6th Edition, John Willey.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Κλασσική Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 4: Ιδιότητες συστημάτων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS432/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης