Κλασσική Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 5: Ο μετασχηματισμός Laplace

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace.
- Μετασχηματισμός Laplace γνωστών συναρτήσεων.
- Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace.

Σκοποί Ενότητας

- Μετασχηματισμός Laplace: Βασικό εργαλείο για την επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων αλλά και την περιγραφή συστημάτων.
- Ορισμός του μετασχηματισμού Laplace και υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace γνωστών συναρτήσεων.
- Περιγραφή ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace.

Ο (αμφίπλευρος) μετασχηματισμός Laplace

Έστω $x(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ο **(αμφίπλευρος) μετασχηματισμός Laplace** $\mathcal{L}\{x(t)\} =: X(s)$ του σήματος $x(t)$ ορίζεται:

$$X(s): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, s = \sigma + j\omega$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} =: X(s) = \int_{t=-\infty}^{t=\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace

Έστω $x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ο (**μονόπλευρος**) **μετασχηματισμός Laplace** $\mathcal{L}\{x(t)\} =: X(s)$ του σήματος $x(t)$ ορίζεται:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} =: X(s) = \int_{t=0}^{t=\infty} x(t)e^{-st}dt \qquad \textbf{(1)}$$

Εξαρτάται μόνο από τις τιμές του σήματος $x(t)$ για $t \geq 0$.

Ο μετασχηματισμός Laplace (1)

Δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις $f(t)$, όπου t είναι οποιαδήποτε μεταβλητή, μετασχηματισμό Laplace. Για να υπάρξει ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης $f(t)$, πρέπει να πληρούνται οι όροι Dirichlet - μια σειρά από επαρκείς, αλλά όχι απαραίτητες προϋποθέσεις. Αυτές είναι:

- $f(t)$ πρέπει να είναι τμηματικά συνεχής, δηλαδή, θα πρέπει ως συνάρτηση να παίρνει μόνο μια τιμή, αλλά μπορεί να έχει έναν πεπερασμένο αριθμό πεπερασμένων απομονωμένων ασυνεχειών για $t > 0$.
- $f(t)$ πρέπει να είναι της εκθετικής τάξης, δηλαδή η $f(t)$ πρέπει να είναι μικρότερη από $Me^{-a_0 t}$ καθώς $t \to \infty$, όπου M είναι μία θετική σταθερά και a_0 θετικός πραγματικός αριθμός.

Ο μετασχηματισμός Laplace (2)

- $tan(\beta t), \cos(\beta t), e^{t^2}$

Δεν έχουν μετασχηματισμό Laplace.

- $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-ct} = 0, c =$πραγματική σταθερά.

Έχουν μετασχηματισμό Laplace.

Ο μετασχηματισμός Laplace (3)

Το ολοκλήρωμα

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

συγκλίνει αν συγκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-st}|dt < \infty, s = \sigma + j\omega.$$

Περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace

Έστω

$$\Lambda \coloneqq \left\{ \sigma \in \mathbb{R}\colon \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \right\}$$

Αν $\Lambda = \emptyset$, το σήμα $x(t)$ **δεν έχει** μετασχηματισμό Laplace.
Αν $\Lambda = \emptyset$, έστω σ_{min} το ελάχιστο στοιχείο του Λ

$$\sigma_{min} < \sigma, \forall \sigma \in \Lambda$$

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών

$$Q \coloneqq \{s \in \mathbb{C}, Re(s) > \sigma_{min}\}$$

ονομάζεται **περιοχή σύγκλισης** του μετασχηματισμού Laplace και για κάθε $s \in Q$ το ολοκλήρωμα (1) υπάρχει.

Ο μετασχηματισμός Laplace της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης (1)

$$U(s) = \int_{t=0}^{t=\infty} u(t)e^{-st}dt = \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} \quad \textbf{(2)}$$

$$e^{-s\infty} = \lim_{T\to\infty} e^{-sT}$$

Για $s = \sigma + j\omega$

$$e^{-s\infty} = \lim_{T\to\infty} e^{-(\sigma+j\omega)T} = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} e^{-\sigma T}e^{-j\omega T} \quad \textbf{(3)}$$

Το όριο στην (3) υπάρχει αν και μόνο αν

$$\sigma > 0 \Leftrightarrow Re(s) > 0$$

και τότε είναι

$$\lim_{\mathrm{T}\to\infty} e^{-\sigma T}e^{-j\omega T} = 0$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης (2)

Τότε η (2) δίνει

$$U(s) = -\left(-\frac{1}{s}\right)e^{0} = \frac{1}{s}$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\int_{t=0}^{t=\infty} u(t)e^{-\sigma t}dt < \infty, \forall \sigma > 0$$

και άρα η περιοχή σύγκλισης του $U(s)$ είναι το σύνολο

$$Q := \{s \in \mathbb{C}, Re(s) > 0\}$$

(το ανοικτό θετικό ημι-επίπεδο)

Ο μετασχηματισμός Laplace της μοναδιαίας κρουστικής συνάρτησης (1)

Έστω $x(t) = \delta(t)$ η **μοναδιαία κρουστική** συνάρτηση.

$$X(s) = \int_{t=0^-}^{t=\infty} \delta(t) e^{-st} dt$$

Το κάτω όριο είναι 0^- διότι η $\delta(t)$ δεν ορίζεται για $t = 0$.

Από την ιδιότητα της $\delta(t)$

$$x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} x(\tau)\delta(\tau - t) d\tau\,.$$

Για $t = 0$ έχουμε ότι

$$\int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} x(\tau)\delta(\tau) d\tau = x(0).$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης (2)

$$X(s) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} \delta(\tau) e^{-st} d\tau = \int_{\tau=0^-}^{\tau=\infty} \delta(\tau) e^{-st} d\tau = e^0 = 1$$

Εφόσον

$$\int_{t=0^-}^{t=\infty} \delta(t) e^{-\sigma t} dt = e^0 = 1, \forall \sigma \in \mathbb{R}$$

η περιοχή σύγκλισης του $X(s)$ είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$.

Ο μετασχηματισμός Laplace της εκθετικής συνάρτησης (1)

Έστω $x(t) = e^{-bt}u(t)$, όπου $b \in \mathbb{R}$

Ο μετασχηματισμός Laplace $X(s)$ είναι:

$$X(s) = \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-bt}e^{-st}dt = \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-(s+b)t}dt$$

$$= -\frac{1}{s+b}e^{-(s+b)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty}$$

Για $s = \sigma + j\omega$

$$e^{-(s+b)\infty} = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} e^{-(\sigma+b)\mathrm{T}}e^{-j\omega T} \qquad \textbf{(4)}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της εκθετικής συνάρτησης (2)

Το όριο (4) υπάρχει αν και μόνο αν

$$\sigma + b > 0$$

Και τότε

$$\lim_{\mathrm{T}\to\infty} e^{-(\sigma+b)\mathrm{T}} e^{-j\omega T} = 0$$

Και άρα ο μετασχηματισμός Laplace $X(s)$ του $x(t) = e^{-bt}u(t)$ είναι

$$X(s) = \frac{1}{s+b}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της εκθετικής συνάρτησης (3)

Το όριο (4) υπάρχει αν και μόνο αν

$$\sigma + b > 0$$

Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace $X(s)$ είναι το σύνολο

$$Q := \{s \in \mathbb{C}, Re(s) > -b\}$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace - Γραμμικότητα

Αν $x(t) \leftrightarrow X(s), y(t) \leftrightarrow Y(s)$, τότε

$$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(s) + bY(s), \forall a, b \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \int_0^\infty [f(t) + g(t)]e^{-st}dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$$

Αν η περιοχή σύγκλισης της $f(t)$ είναι σ_f και της $g(t)$ είναι σ_g, και $\sigma_g > \sigma_f$ τότε η περιοχή σύγκλισης της $f(t) + g(t)$ είναι $Re(s) > \sigma_g$.

Παρόμοια για μετασχηματισμό Laplace της $\alpha f(t)$.

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace

- $\boldsymbol{u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}}$
- $\boldsymbol{e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}}$
- $\boldsymbol{u(t) + e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{s+a} = \frac{2s+a}{s(s+a)}}$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Δεξιά μετάθεση (time delay) (1)

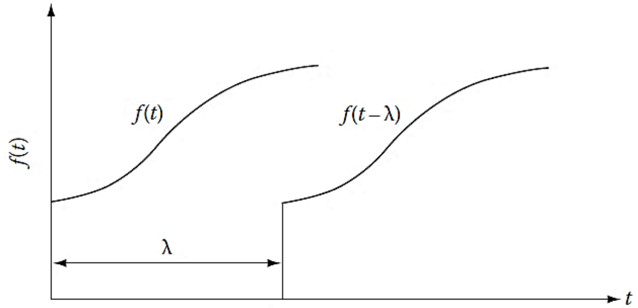
$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t-\lambda)u(t-\lambda)\} = e^{-s\lambda}F(s)}$$

$$\mathcal{L}\{f(t-\lambda)u(t-\lambda)\} = \int_0^\infty f(t-\lambda)u(t-\lambda)e^{-st}dt$$

$$\begin{array}{c}\boldsymbol{u(\tau)=0,}\\ \boldsymbol{-\lambda \le t \le 0}\end{array} \quad \downarrow \quad \boldsymbol{\tau = t-\lambda}$$

$$\mathcal{L}\{f(\tau)u(\tau)\} = e^{-s\lambda}\int_{-\lambda}^\infty f(\tau)u(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-s\lambda}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$= e^{-s\lambda}F(s)$$



Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Αριστερά μετάθεση (time delay)

Δεν υπάρχει ανάλογο αποτέλεσμα για την αριστερή μετάθεση $x(t+t_1), t_1 > 0$ του σήματος $x(t)$.

Διότι ο μετασχηματισμός Laplace του $x(t+t_1)$:

$$\int_0^\infty x(t+t_1)e^{-st}dt$$

δεν είναι δυνατόν να εκφραστεί μέσω του $X(s) \leftrightarrow x(t)$.

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Δεξιά μετάθεση (time delay) (2)

Έστω ο τετραγωνικός παλμός $t_1\ sec$:

$$\begin{cases} p(t) = 1, 0 \leq t \leq t_1 \\ p(t) = 0, \text{για κάθε άλλο } t \end{cases}$$

$$p(t) = u(t) - u(t - t_1)$$

$$p(t) = u(t) - u(t - t_1) \leftrightarrow P(s) = \frac{1}{s} - e^{-t_1 s}\frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-t_1 s}}{s}$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Χρονική κλιμάκωση

$$\boxed{x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)}$$

$$L[x(at)] = \int_0^{+\infty} x(at) e^{-st} dt \underset{d\tau = adt}{\overset{\substack{\tau = at \\ \alpha \geq 0}}{=}} \int_0^{+\infty} x(\tau) e^{-s\frac{\tau}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} d\tau$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} x(\tau) e^{-\tau\frac{\sigma}{\alpha}} d\tau = \frac{1}{\alpha} \mathrm{X}\left(\frac{s}{a}\right)$$

Παράδειγμα: Αν $u(t)$ η μοναδιαία βηματική συνάρτηση, τότε

$$u(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} \frac{1}{s/a} = \frac{1}{s}$$

(το περιμέναμε, εφόσον $u(at) = u(t), \forall a > 0$)

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Πολλαπλασιασμός με εκθετική συνάρτηση (1)

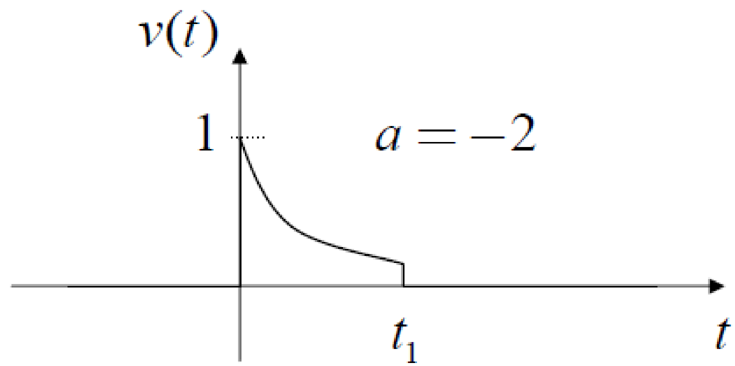
$$\boxed{e^{at}x(t) \leftrightarrow X(s-a)}$$

$$\int_0^{\infty} e^{at}x(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} x(t)e^{-(s-a)t}dt = X(s-a)$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Πολλαπλασιασμός με εκθετική συνάρτηση (2)

Έστω το σήμα $v(t) = [u(t) - u(t - t_1)]e^{at},\ t_1 > 0, a \in \mathbb{R}$

$$u(t) - u(t - t_1) \leftrightarrow \frac{1 - e^{-t1s}}{s}$$



$$v(t) = [u(t) - u(t - t_1)]e^{at} \leftrightarrow \frac{1 - e^{t_1(s-a)}}{s - a} = V(s)$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Πολλαπλασιασμός με δύναμη του t (1)

$$\boxed{t^n x(t) \leftrightarrow (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} X(s)}$$

Για $n = 1$

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_0^{+\infty} x(t) \left(\frac{d}{ds} e^{-st} \right) dt = \int_0^{+\infty} x(t) \big((-t) e^{-st} \big) dt$$
$$= L[-tx(t)].$$

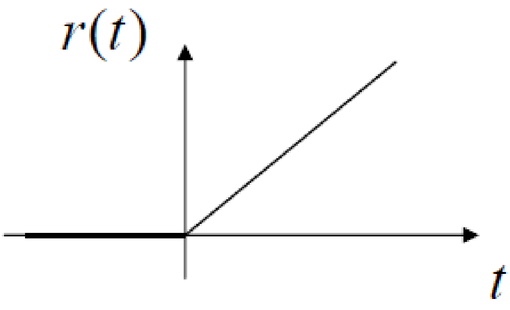
Για $n = 2$

$$\frac{d^2X(s)}{ds^2} = \int_0^{+\infty} x(t) \left(\frac{d^2}{ds^2} e^{-st} \right) dt = \int_0^{+\infty} x(t) \big((-t)^2 e^{-st} \big) dt$$
$$= \mathcal{L}[t^2 x(t)].$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Πολλαπλασιασμός με δύναμη του t (2)

Έστω το σήμα «ράμπα»

$$r(t) = tu(t)$$



$$r(t) \leftrightarrow R(s) = -\frac{d}{ds}U(s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$\boxed{t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}}$$

$$t^2 u(t) \leftrightarrow \frac{2!}{s^3}, t^3 u(t) \leftrightarrow \frac{3!}{s^4}, \dots$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Πολλαπλασιασμός με δύναμη του t (3)

Έστω το σήμα $v(t) = te^{-bt}, b \in \mathbb{R}$.

$$e^{-bt} \leftrightarrow \frac{1}{s+b}, \qquad t^n x(t) \leftrightarrow (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} X(s)$$

$$\searrow \qquad \swarrow$$

$$v(t) = te^{-bt} \leftrightarrow V(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+b}\right) = \frac{1}{(s+b)^2}$$

$$\boxed{t^n e^{-bt} \leftrightarrow \frac{n!}{(s+b)^{n+1}}}$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Πολλαπλασιασμός συνάρτησης με τριγωνομετρική συνάρτηση (1)

- $x(t)\sin(\omega t) \leftrightarrow \frac{j}{2}[X(s+j\omega) - X(s-j\omega)]$
- $x(t)\cos(\omega t) \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(s+j\omega) + X(s-j\omega)]$

$$e^{j\omega t} = cos\omega t + jsin\omega t \text{ και } e^{-j\omega t} = cos\omega t - jsin\omega t$$

$$\boxed{sin\omega t = \frac{j}{2}\left(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}\right)}$$

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \Leftrightarrow e^{at}x(t) \leftrightarrow X(s-a)$$

$$\boxed{a = \mp j\omega \rightarrow e^{\mp j\omega t}x(t) \leftrightarrow X(s \pm j\omega)}$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Πολλαπλασιασμός συνάρτησης με τριγωνομετρική συνάρτηση (2)

- $x(t)\sin(\omega t) \leftrightarrow \frac{j}{2}[X(s+j\omega) - X(s-j\omega)]$
- $x(t)\cos(\omega t) \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(s+j\omega) + X(s-j\omega)]$

$$x(t)\sin(\omega t) = x(t)\left[\frac{j}{2}\left(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}\right)\right]$$

$$= \frac{j}{2}\left[e^{-j\omega t}x(t) - e^{j\omega t}x(t)\right]$$

$$\downarrow$$

$$= \frac{j}{2}[X(s+j\omega) - \mathrm{X}(s-j\omega)]$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Πολλαπλασιασμός συνάρτησης με τριγωνομετρική συνάρτηση (3)

Έστω $v(t) = cos\omega t$.

Εφόσον ο (μονόπλευρος) μετασχηματισμός Laplace του $v(t)$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές του $t \geq 0$, γράφουμε

$$v(t) = u(t)cos\omega t$$

$$\swarrow$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}, x(t)cos\omega t \longleftrightarrow \frac{1}{2}[X(s + j\omega) + X(s - j\omega)]$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s + j\omega} + \frac{1}{s - j\omega}\right) = \frac{1}{2}\frac{s - j\omega + s + j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Πολλαπλασιασμός συνάρτησης με τριγωνομετρική συνάρτηση (4)

$$\boxed{cos\omega t \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}}$$

$$\boxed{sin\omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}}$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Πολλαπλασιασμός συνάρτησης με τριγωνομετρική συνάρτηση (5)

Έστω το σήμα $v(t) = e^{-bt} cos\omega t$.

$$e^{at} x(t) \leftrightarrow X(s-a)$$

$$x(t) = cos\omega t \leftrightarrow X(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\boxed{e^{-bt} cos\omega t \leftrightarrow \frac{s+b}{(s+b)^2+\omega^2}}$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Συνέλιξη σημάτων (1)

$$\boxed{(x * v)(t) \leftrightarrow X(s)V(s)}$$

Έστω $x(t), v(t), x(t) = 0, v(t) = 0, για\ t < 0$.

Η συνέλιξη των $x(t), v(t)$ είναι

$$(x * v)(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} x(\tau)v(t-\tau)d\tau\,, t \geq 0$$

Εφόσον

$$v(t) = 0, για\ t < 0,$$

το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται

$$(x * v)(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} x(\tau)v(t-\tau)d\tau\,, t \geq 0$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Συνέλιξη σημάτων (2)

$$(x * v)(t) \leftrightarrow X(s)V(s)$$

$$(x * v)(t) = \int_{t=0}^{t=\infty} \left[\int_{\tau=0}^{\tau=\infty} x(\tau)v(t-\tau)d\tau \right] e^{-st}$$

$$= \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} x(\tau) \left[\int_{t=0}^{t=\infty} v(t-\tau)e^{-st}dt \right] d\tau =$$

$$\boldsymbol{\bar{t} = t - T} \quad \downarrow$$

$$= \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} x(\tau) \left[\int_{\bar{t}=-\tau}^{\bar{t}=\infty} v(\bar{t})e^{-s(\bar{t}+\tau)}d\bar{t} \right] d\tau$$

$$\downarrow \quad \boldsymbol{v(\bar{t}) = 0, \gamma\iota\alpha\ \bar{t} < 0}$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Συνέλιξη σημάτων (3)

$$= \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} x(\tau) \left[\int_{\bar{t}=0}^{\bar{t}=\infty} v(\bar{t}) e^{-s(\bar{t}+\tau)} d\bar{t} \right] d\tau$$

$$= \left[\int_{\tau=0}^{\tau=\infty} x(\tau) e^{-st} d\tau \right] \left[\int_{\bar{t}=0}^{\bar{t}=\infty} v(\bar{t}) e^{-s\bar{t}} d\bar{t} \right]$$

$$= X(s)V(s)$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Διαφόριση ως προς τον χρόνο (1)

Έστω η συνάρτηση $f(t)$ η οποία είναι τμηματικά συνεχής με τμηματικά συνεχείς παραγώγους $\frac{df(t)}{dt}$ στο διάστημα $0 \leq t \leq T$. Έστω ότι η $f(t)$ είναι εκθετικής τάξης e^{ct} καθώς $t \to \infty$. Τότε όταν $Re(s) > c$, ο μετασχηματισμός Laplace της $df(t)/dt$ υπάρχει και είναι ίσος με

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0+) = sF(s) - f(0+)$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Διαφόριση ως προς τον χρόνο (2)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

Γράψτε το ολοκλήρωμα ως το άθροισμα των ολοκληρωμάτων σε κάθε διάστημα στο οποίο η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι συνεχής. Έτσι, γράφουμε

$$\int_0^T e^{-st} f^{(1)}(t)dt = \int_0^{t_1} [\quad] + \int_{t_1}^{t_2} [\quad] + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{T} [\quad].$$

$$u = e^{-st}, du = -se^{-st}dt$$

$$dv = \frac{df}{dt}dt, v = f$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Διαφόριση ως προς τον χρόνο (3)

$$e^{-st} f(t)\Big|_0^{t_1} + e^{-st} f(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \cdots + e^{-st} f(t)\Big|_{t_{n-1}}^{T} + s\int_0^T e^{-st} f(t)dt\,.$$

$f(t)$ είναι συνεχής άρα $f(t_1 - 0) = f(t_1 + 0)$

$$\int_0^T e^{-st} f^{(1)}(t)dt = -f(0+) + e^{-sT} f(T) + s\int_0^T e^{-st} f(t)dt\,.$$

$$\downarrow \quad \boldsymbol{\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0+) = sF(s) - f(0+).$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Διαφόριση ως προς τον χρόνο (4)

- $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) - x(0)$
- $\frac{d^2x(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$
- $\frac{d^nx(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\dot{x}(0) - \cdots -$

$$-sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Θεώρημα αρχικής τιμής (1)

Έστω ότι για τις $f(t)$ και $f^{(1)}(t)$ υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace.

Τότε εάν το όριο $\lim_{s \to +\infty} sF(s)$ καθώς $s \to \infty$ υπάρχει,

$$\lim_{s \to +\infty} sF(s) = \lim_{t \to 0+} f(t).$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Θεώρημα αρχικής τιμής (2)

$$\lim_{s\to+\infty}\int_0^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt = \lim_{s\to+\infty}[sF(s) - f(0+)]$$

Επειδή η $f(0+)$ είναι ανεξάρτητη του s, και επειδή το ολοκλήρωμα εξαφανίζεται για $s \to \infty$, έχουμε

$$\lim_{s\to+\infty}[sF(s) - f(0+)] = 0.$$

Επιπλέον, $f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t)$ οπότε

$$\lim_{s\to+\infty} sF(s) = \lim_{t\to 0+} f(t)$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Θεώρημα τελικής τιμής (1)

Έστω ότι για τις $f(t)$ και $f^{(1)}(t)$ υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace.

Τότε για $t \to +\infty$ έχουμε

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Αυτό το αποτέλεσμα έχει νόημα αν η $F(s)$ διαθέτει ένα απλό πόλο στην αρχή των αξόνων, αλλά δεν ισχύει εάν η $F(s)$ έχει πόλους στον φανταστικό άξονα, ή πόλους στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο , ή πόλους υψηλότερη τάξης στην αρχή των αξόνων.

Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace – Θεώρημα τελικής τιμής (2)

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt = \lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0+)]$$

$$\downarrow \quad \boldsymbol{e^{-st} \to 1 \; \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma \; s \to 0}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{df}{dt}dt = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0+)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) - f(0+) = \lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0+)]$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι., 2011, *Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Α : Κλασσική Θεωρία Ελέγχου*, ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε.
- Alexander D. Poularikas, *Transforms and applications handbook* / editor, 3rd ed., CRC Press, Taylor & Francis Group (Chapter 5, Laplace Transforms, by Alexander D. Poularikas and Samuel Seely).

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Κλασσική Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 5: Ο μετασχηματισμός Laplace». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS432/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης