ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Κλασσική Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 8: Συστήματα πρώτης και δεύτερης τάξης

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Συστήματα πρώτης τάξης.
- Συστήματα δεύτερης τάξης.

Σκοποί Ενότητας

- Μελέτη συστημάτων πρώτης και δεύτερης τάξης καθώς και των χαρακτηριστικών τους.

Χρονική απόκριση συστημάτων $1^{ης}$ τάξης

Συστήματα 1ης τάξης (1)

Έστω το ΓΧΑ σύστημα του οποίου η σχέση εισόδου–εξόδου διέπεται από τη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t), (1)$$

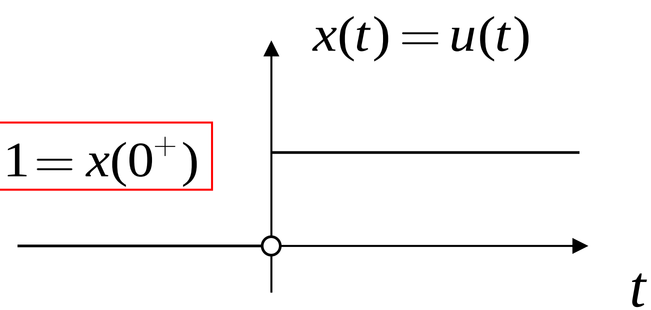
Ο μετασχηματισμός Laplace της (1) δίνει

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = b_1[sX(s) - x(0)] + b_0 X(s)$$

Αν $x(t)$ δεν είναι συνεχής στο $t = 0$,

αν δηλαδή $x(0-) \neq x(0+)$

$$\boxed{x(0^-) = 0 \neq 1 = x(0^+)}$$



Συστήματα 1ης τάξης (2)

γράφουμε

$$sY(s) - y(0-) + aY(s) = b_1[sX(s) - x(0-)] + b_0X(s)$$

Αν $x(0-) = 0$

$$sY(s) - y(0-) + aY(s) = b_1sX(s) + b_0X(s) \Leftrightarrow$$

$$(s+a)Y(s) = y(0-) + (b_1s + b_0)X(s) \Leftrightarrow$$

$$Y(s) = \frac{y(0-)}{(s+a)} + \frac{(b_1s+b_0)}{(s+a)}X(s) \Leftrightarrow$$

Όρος που εξαρτάται από την αρχική συνθήκη $y(0-)$

Όρος που εξαρτάται από το μετασχηματισμό Laplace $X(s)$ της εισόδου $x(t)$

Συστήματα 1ης τάξης (3)

Αν η αρχική συνθήκη $y(0-)=0$

$$Y(s)=\frac{(b_1 s+b_0)}{(s+a)}X(s) \Leftrightarrow \frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{(b_1 s+b_0)}{(s+a)} := H(s)$$

$H(s)$: συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

(λόγος του μετασχηματισμού Laplace $Y(s)$ της εξόδου δια του μετασχηματισμού Laplace $X(s)$ της εισόδου, όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν)

$$H(s)=\frac{(b_1 s+b_0)}{(s+a)}=b_1+\frac{b_0-ab_1}{s+a}$$

και άρα

Συστήματα 1ης τάξης (4)

$$Y(s) = \frac{(b_1 s + b_0)}{(s+a)} X(s) =$$

$$\left(b_1 + \frac{b_0 - ab_1}{s+a}\right) X(s) =$$

$$b_1 X(s) + \frac{b_0 - ab_1}{s+a} X(s)$$

Κρουστική απόκριση

Για $x(t) = \delta(\tau) \leftrightarrow X(s) = 1$

$$\mathrm{Y}(s) = H(s) \cdot 1 = H(s)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(b_1 + \frac{b_0 - ab_1}{s + a}\right)\right\}$$

Άρα

$$h(t) = b_1\delta(t) + (b_0 - ab_1)e^{-at}, t \geq 0$$

Ελεύθερη απόκριση - Δυναμική απόκριση

Αν η αρχική συνθήκη $y(0-) \neq 0$ και η είσοδος είναι το σήμα $x(t) = 0,\ t < 0$ και $x(t) \neq 0, t \geq 0$

$$Y(s) = \frac{y(0-)}{(s+a)} + H(s)X(s)$$

$$y(t) = y(0-)e^{-at} + \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau = y_{\varepsilon\lambda}(t) + y_{\delta\upsilon\nu}(t)$$

- $y_{\varepsilon\lambda}(t)$ ελεύθερη απόκριση.
- $y_{\delta\upsilon\nu}(t)$ δυναμική απόκριση.

Βηματική απόκριση 1

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

Πόλοι της $G(s)$: $s = -a$

Βηματική απόκριση (**step response**) είναι η έξοδος για είσοδο:

$$u(t) = 1 \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{a}{s+a} \times \frac{1}{s} = \frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s+a} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

$$c_0 = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{a}{s(s+a)}\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{a}{(s+a)}\right] = 1$$

$$c_1 = \lim_{s\to -a}\left[(s+a)\frac{a}{s(s+a)}\right] = \lim_{s\to -a}\left[\frac{a}{s}\right] = -1$$

$$\boxed{y(t) = 1 - e^{-at}}$$

Σταθερά χρόνου

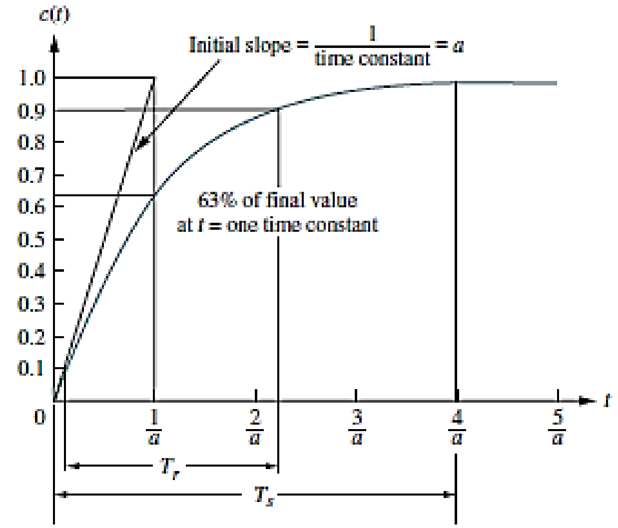
$$\boxed{y(t) = 1 - e^{-at}}$$

Σταθερά χρόνου (time constant): $1/a$

Ο χρόνος που κάνει το σύστημα για να φτάσει στο 63.21% της τελικής του τιμής (δηλ. το 1).

$$0{,}632121 = 63{,}21\% = 1 - e^{-1} = 1 - e^{-at} \Rightarrow$$

$$e^{-1} = e^{-at} \Rightarrow -1 = -at \Rightarrow t = \frac{1}{a}$$



1. Χρόνος ανόδου T_r (Rising Time T_r)

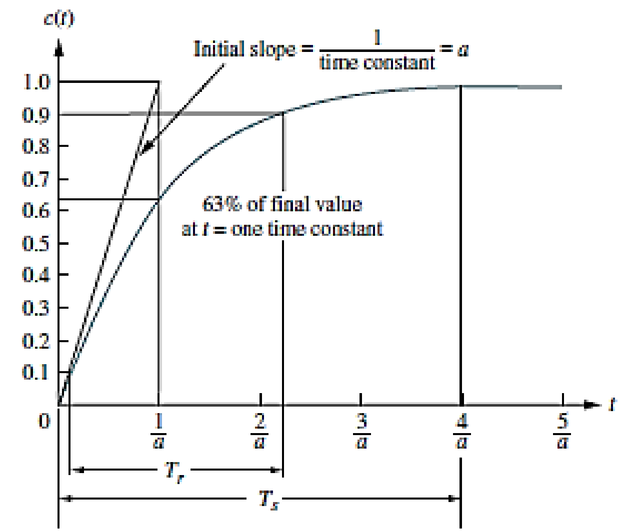
$$\boxed{y(t) = 1 - e^{-at}}$$

Χρόνος ανόδου (rise time)
Ο χρόνος που κάνει το σύστημα για να φτάσει από το 10% στο 90% της τελικής του τιμής (δηλ. το 1).

$$\begin{cases} 0.9 = 1 - e^{-at_2} \\ 0.1 = 1 - e^{-at_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.1 = e^{-at_2} \\ 0.9 = e^{-at_1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2.30259 = -at_2 \\ -0.105361 = -at_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t_2 = \dfrac{2.30259}{a} \\ t_1 = \dfrac{0.105361}{a} \end{cases} \Rightarrow t_r = t_2 - t_1 = \frac{2.2}{a}$$



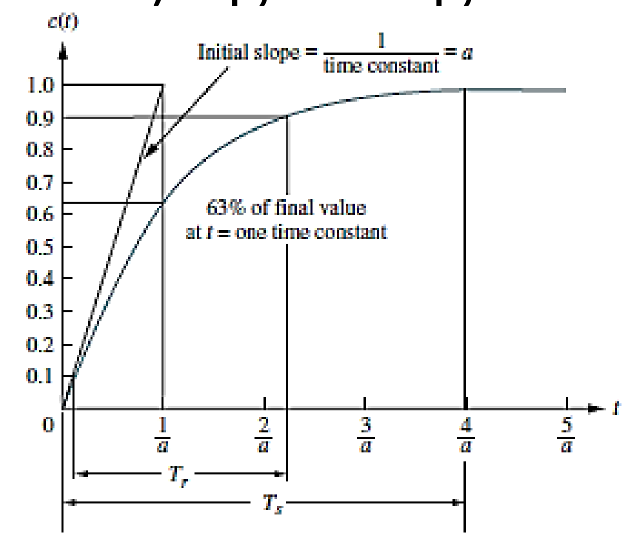
1. Χρόνος αποκατάστασης T_s (Settling Time T_s)

$$\boxed{y(t) = 1 - e^{-at}}$$

Χρόνος αποκατάστασης (settling time)
Το χρονικό διάστημα στο οποίο η βηματική απόκριση θα φθάσει και θα παραμείνει σε κάποια συγκεκριμένα ποσοστιαία όρια τιμών επί τοις εκατό (για παράδειγμα 2%) της τελικής τιμής (δηλ. το 1).

$$0.98 = 1 - e^{-at_s} \Rightarrow 0.02 = e^{-at_s} \Rightarrow$$

$$-3.91 = -at_s \Rightarrow t_s = \frac{3.91}{a}$$

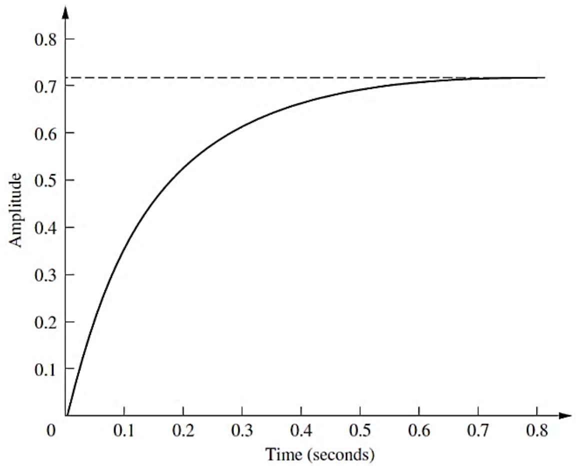


Παράδειγμα 1

Υπολογίστε τον χρόνο ανόδου και τον χρόνο αποκατάστασης για τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$G(s) = \frac{K}{s+a}$$

Υπολογίστε το Κ και a βάσει της εξόδου του συστήματος πρώτης τάξης που δίνεται παρακάτω:



Παράδειγμα 2

Υπολογίστε την σταθερά χρόνου, τον χρόνο ανόδου και τον χρόνο αποκατάστασης για τη συνάρτηση μεταφοράς:

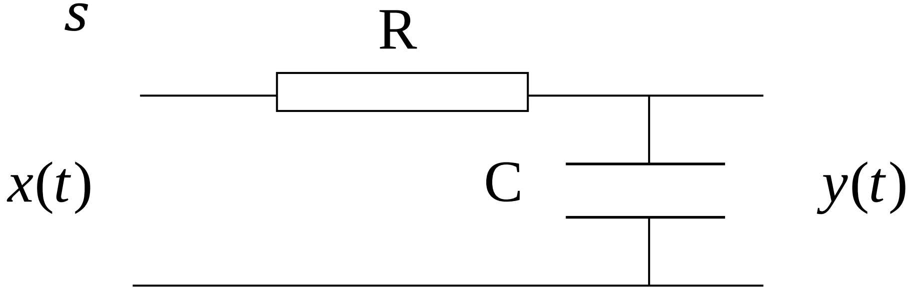
$$G(s) = \frac{2}{s+2}$$

Παράδειγμα 3 - Κύκλωμα RC (1)

$$\begin{cases} RC\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} + \dfrac{1}{RC}y(t) = \dfrac{1}{RC}x(t) \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{y(0-)}{(s + 1/RC)} + \frac{1/RC}{s + 1/RC}X(s)$$

Για $x(t) = u(t) \Rightarrow X(s) = \dfrac{1}{s}$



Παράδειγμα 3 - Κύκλωμα RC (2)

$$Y(s) = \frac{y(0-)}{(s+1/RC)} + \frac{1/RC}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)s}$$

$$= \frac{y(0-)}{(s+1/RC)} + \frac{1}{s} - \frac{1}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)}$$

$$y(t) = y(0-)e^{-\frac{1}{RC}t} + u(t) - e^{-\frac{1}{RC}t}$$

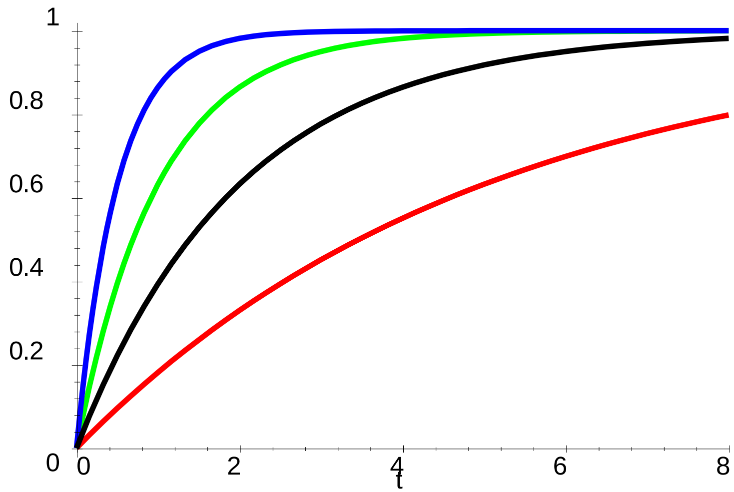
Αν $y(0-) = 0$,

$$y(t) = u(t) - e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Παράδειγμα 3 - Κύκλωμα RC (3)

Συνάρτηση μεταφοράς

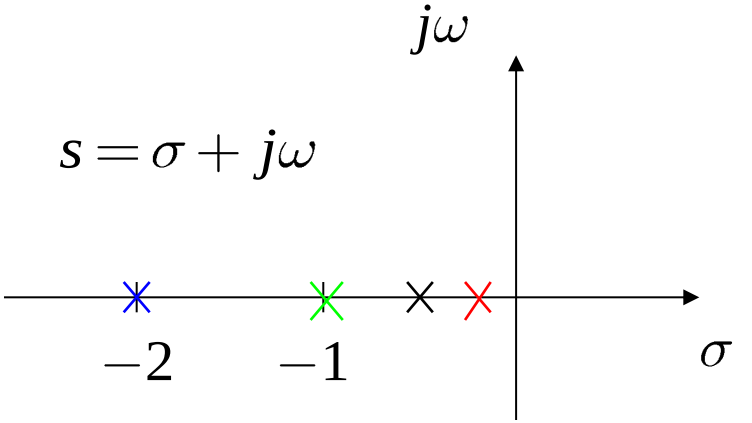
$$H(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$



$$y(t) = u(t) - e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Πόλος της συνάρτησης μεταφοράς $p_1 = -1/RC$

- Μιγαδικό επίπεδο



$$-\frac{1}{\mathrm{RC}} = -0.2, -0.5, -1, -2$$

Χρονική απόκριση συστημάτων 2ης τάξης

Γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα δεύτερης τάξης (1)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = b_2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b_1\frac{dx(t)}{dt} + b_0, (2)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της (2) δίνει

$$s^2Y(s) - sy(0-) - \dot{y}(0-) + a_1[sY(s) - y(0-)] + a_0Y(s)$$
$$= b_2[s^2X(s) - sx(0-) - \dot{x}(0-)] + b_1[sX(s) - x(0-)] + b_0X(s)$$

Για $x(0-) = 0, \dot{x}(0-) = 0$

$$s^2Y(s) - sy(0-) - \dot{y}(0-) + a_1[sY(s) - y(0-)] + a_0Y(s)$$
$$= b_2s^2X(s) + b_1sX(s) + b_0X(s)$$

Γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα δεύτερης τάξης (2)

$$\boxed{Y(s)=\frac{sy(0-)+\dot{y}(0-)+a_1y(0-)}{s^2+a_1s+a_0}+\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}X(s)}$$

Όρος που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκη $y(0-),\dot{y}(0-)$

Όρος που εξαρτάται από το μετασχηματισμό Laplace $X(s)$ της εισόδου $x(t)$

Αν οι αρχικές συνθήκες $y(0-)=0,\dot{y}(0-)=0$

$$Y(s)=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}X(s)\rightarrow H(s)=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}$$

Το σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$\deg(b_2s^2+b_1s+b_0)\leq\deg(s^2+a_1s+a_0)$$

Χρονική απόκριση συστημάτων 2ης τάξης

Την συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{a_0}{s^2+a_1 s+a_0}$ με $\alpha_0 = \omega_n^2, \;\; a_1 = 2\zeta\omega_n$ (ζ damping ratio ω_n natural frequency) γράφουμε

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Πόλοι της $G(s)$

$$p_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Βηματική απόκριση 2 (1)

$$\left(u(t) = 1 \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}\right)$$

$$G(s)U(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2}$$

- $c_0 = \lim_{s\to 0} s \frac{\omega_n^2}{s(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{\omega_n^2}{p_1 p_2} = \frac{\omega_n^2}{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2(\zeta^2 - 1)} = 1$
- $c_1 = \lim_{s\to p_1} (s - p_1) \frac{\omega_n^2}{s(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{\omega_n^2}{p_1(p_1 - p_2)} =$

$$\frac{\omega_n^2}{\left(-\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\left(2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(-\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1} + (\zeta^2 - 1)\right)}$$

Βηματική απόκριση 2 (2)

$$\left(u(t) = 1 \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}\right)$$

$$G(s)U(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2}$$

- $c_2 = \lim_{s \to p_2} (s - p_2) \frac{\omega_n^2}{s(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{\omega_n^2}{p_2(p_2 - p_1)} =$

$$= \frac{\omega_n^2}{\left(-\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\left(-2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1} + (\zeta^2 - 1)\right)}$$

Βηματική απόκριση 2 (3)

- **Συστήματα μεγάλης απόσβεσης (over-dumped)**

1. Αν $\zeta > 1$: δύο πραγματικοί και διαφορετικοί πόλοι

$$p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \in \mathbb{R}$$
$$p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \in \mathbb{R}$$

Βηματική απόκριση

$$y(t) = 1 + c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}$$

- **Συστήματα κρίσιμης απόσβεσης (critically-dumped)**

2. Αν $\zeta = 1$: δύο πραγματικοί και ίσοι πόλοι (ή ένας πόλος με πολλαπλότητα 2)

$$p_1 = -\omega_n \in \mathbb{R}$$
$$p_2 = -\omega_n \in \mathbb{R}$$

Βηματική απόκριση 2 (4)

$$G(s)U(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2} = \frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s+\omega_n} + \frac{c_2}{(s+\omega_n)^2}$$

- $c_0 = \lim_{s\to 0} s \frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = 1$
- $c_1 = \lim_{s\to -\omega_n} \frac{d}{ds}\left[(s+\omega_n)^2 \frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}\right] = \lim_{s\to -\omega_n}\left[-\frac{\omega_n^2}{s^2}\right] = -1$
- $c_2 = \lim_{s\to -\omega_n}\left[(s+\omega_n)^2 \frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}\right] = \frac{\omega_n^2}{-\omega_n} = -\omega_n$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2} \overset{L^{-1}}{\Longrightarrow}$$

$$y(t) = 1 - (1+\omega_n t)e^{-\omega_n t}, t \geq 0$$

Βηματική απόκριση 2 (5)

- **Συστήματα μικρής απόσβεσης** (**under-dumped**)

3. Αν $0 < \zeta < 1$: δύο καθαρά μιγαδικοί και συζυγείς πόλοι

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_d$$
$$p_2 = \bar{p}_1 = -\zeta\omega_n - j\omega_d$$

όπου $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.

Βηματική απόκριση:

$$G(s)U(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2}$$

Βηματική απόκριση 2 (6)

- $c_0 = \lim_{s \to 0} s \frac{\omega_n^2}{s(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{\omega_n^2}{p_1 p_2} = \frac{\omega_n^2}{(-\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} = 1$
- $c_1 = \lim_{s \to p_1} (s - p_1) \frac{\omega_n^2}{s(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{\omega_n^2}{p_1(p_1-p_2)}$

$$= \frac{\omega_n^2}{(-\zeta\omega_n + j\omega_d)(2j\omega_d)} = \frac{1}{2} \frac{\omega_n^2}{(-\omega_d^2 - j\zeta\omega_n\omega_d)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{-\omega_d^2\omega_n^2 + j\zeta\omega_n^3\omega_d}{\left((-\omega_d^2)^2 + (\zeta\omega_n\omega_d)^2\right)} = c_{1R} + jc_{1I}$$

Βηματική απόκριση 2 (7)

- $c_2 = \lim_{s \to p_2} (s - p_2) \frac{\omega_n^2}{s(s-p_1)(s-p_2)}$

$$= \frac{\omega_n^2}{p_2(p_2 - p_1)} = \frac{\omega_n^2}{(-\zeta\omega_n + j\omega_d)(-2j\omega_d)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\omega_n^2}{(-\omega_d^2 - j\zeta\omega_n\omega_d)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{-\omega_d^2\omega_n^2 - j\zeta\omega_n^3\omega_d}{\left((-\omega_d^2)^2 + (\zeta\omega_n\omega_d)^2\right)} = c_{1R} - jc_{1I}$$

Βηματική απόκριση 2 (8)

$$\frac{c_{1R}}{c_{1I}} = \frac{-\frac{1}{2}\frac{\omega_d^2\omega_n^2}{\left((-\omega_d^2)^2 + (\zeta\omega_n\omega_d)^2\right)}}{\frac{1}{2}\frac{\zeta\omega_n^3\omega_d}{\left((-\omega_d^2)^2 + (\zeta\omega_n\omega_d)^2\right)}} = -\frac{\omega_d}{\zeta\omega_n} =$$

$$= -\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n} = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

Βηματική απόκριση 2 (9)

$$\sqrt{c_{1R}^2 + c_{1I}^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\frac{\omega_d^2\omega_n^2}{\left((-\omega_d^2)^2 + (\zeta\omega_n\omega_d)^2\right)}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\zeta\omega_n^3\omega_d}{\left((-\omega_d^2)^2 + (\zeta\omega_n\omega_d)^2\right)}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\omega_d^2\omega_n^2)^2 + (\zeta\omega_n^3\omega_d)^2}{\left((-\omega_d^2)^2 + (\zeta\omega_n\omega_d)^2\right)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_n^4}{(-\omega_d^2)^2 + (\zeta\omega_n\omega_d)^2}}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{2}\sqrt{\frac{1}{\left(-\omega_n^2(1-\zeta^2)\right)^2 + \zeta^2\omega_n^2(1-\zeta^2)\omega_n^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Βηματική απόκριση 2 (10)

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + jsin(\theta)$$

$$y(t) = 1 + (c_{1R} + jc_{1I})e^{(-\zeta\omega_n + j\omega_d)t} + (c_{1R} - jc_{1I})e^{(-\zeta\omega_n - j\omega_d)t}$$

$$= 1 + (c_{1R} + jc_{1I})e^{(-\zeta\omega_n)t}\big(\cos(\omega_d t) + jsin(\omega_d t)\big)$$

$$+ (c_{1R} - jc_{1I})e^{(-\zeta\omega_n)t}\big(\cos(\omega_d t) - jsin(\omega_d t)\big)$$

$$= 1 + 2(c_{1R}\cos(\omega_d t) - c_{1I}sin(\omega_d t))e^{(-\zeta\omega_n)t}$$

$$\boldsymbol{\frac{c_{1R}}{c_{1I}} = \tan(\theta)}$$

$$= 1 + 2c_{1I}\left(\frac{c_{1R}}{c_{1I}}\cos(\omega_d t) - sin(\omega_d t)\right)e^{(-\zeta\omega_n)t}$$

$$=$$

$$\boldsymbol{cos(\theta) = \frac{c_{1I}}{\sqrt{c_{1R}^2 + c_{1I}^2}}}$$

Βηματική απόκριση 2 (11)

$$= 1 + 2c_{1I}\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\cos(\omega_d t) - sin(\omega_d t)\right)e^{(-\zeta\omega_n)t}$$

$$= 1 - 2\frac{c_{1I}}{\cos(\theta)}(-\sin(\theta)\cos(\omega_d t) + \cos(\theta)sin(\omega_d t))e^{(-\zeta\omega_n)t}$$

$$= 1 - 2\frac{c_{1I}}{\cos(\theta)}\sin(\omega_d t - \theta)\, e^{(-\zeta\omega_n)t} \underset{=}{cos(\theta) = \frac{c_{1I}}{\sqrt{c_{1R}^2 + c_{1I}^2}}}$$

$$= 1 - 2\sqrt{c_{1R}^2 + c_{1I}^2}\,\sin(\omega_d t - \theta)\, e^{(-\zeta\omega_n)t}$$

Βηματική απόκριση 2 (12)

$$= 1 - 2\frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t - \theta)\, e^{(-\zeta\omega_n)t}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t - tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)e^{(-\zeta\omega_n)t}$$

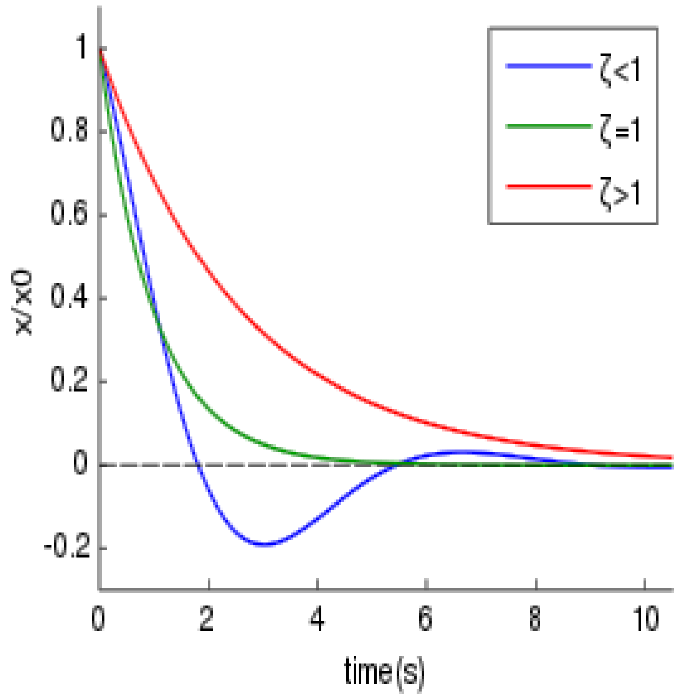
$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)e^{(-\zeta\omega_n)t}$$

$$= 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d}\sin(\omega_d t + \theta)\, e^{(-\zeta\omega_n)t},$$

$$\boxed{\theta = tan^{-1}\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = tan^{-1}\left(-\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\right)}$$

Λόγος απόσβεσης (damping ratio)

Εξάρτηση της απόκρισης του συστήματος σε σχέση με τον **λόγο απόσβεσης** (**damping ratio**) ζ.



Χρόνος πρώτου μεγίστου (Peak time) (1)

- Peak time: $t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ (χρόνος πρώτου μεγίστου)

$$\frac{d}{dt}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)e^{(-\zeta\omega_n)t}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$-\omega_n \cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)e^{(-\zeta\omega_n)t}$$

$$+\frac{\zeta\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)e^{(-\zeta\omega_n)t} = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_n e^{(-\zeta\omega_n)t}(-cos(\omega_d t + tan^{-1}(\theta)) + \theta^{-1}sin(\omega_d t + tan^{-1}(\theta))) = 0$$

$$\Rightarrow$$

Χρόνος πρώτου μεγίστου (Peak time) (2)

$$sin(\omega_d t + tan^{-1}(\theta)) - \theta cos(\omega_d t + tan^{-1}(\theta)) = 0 \Rightarrow$$

$$tan(\omega_d t + tan^{-1}(\theta)) = \theta \Rightarrow$$

$$\omega_d t + tan^{-1}(\theta) = tan^{-1}(\theta) + k\pi \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega_d t = k\pi \Rightarrow t = \frac{k\pi}{\omega_d}, k = 1,2,\dots}$$

$$y_{max}(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\frac{\pi}{\omega_d} + tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right) e^{(-\zeta\omega_n)\frac{\pi}{\omega_d}}$$

$$= 1 - \frac{e^{\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin\left(\pi + tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)$$

Χρόνος πρώτου μεγίστου (Peak time) (3)

$$\pi + tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \overline{\overline{\zeta = cos(\theta)}}$$

$$\pi + tan^{-1}\big(tan(\theta)\big) =$$

$$\pi + \theta = sin^{-1}(sin(\pi + \theta)) =$$

$$sin^{-1}(-\,sin(\theta)) =$$

$$sin^{-1}\left(-\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

Χρόνος πρώτου μεγίστου (Peak time) (4)

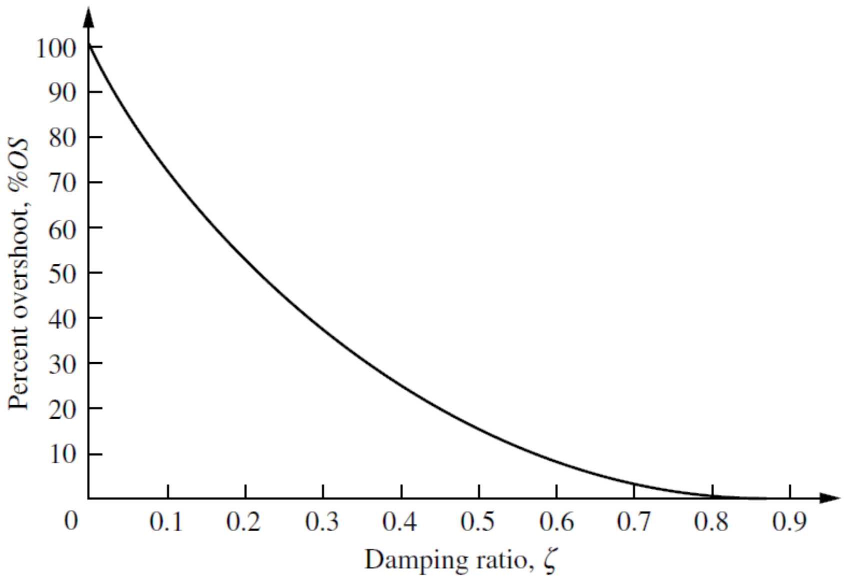
$$y_{max}(t) = 1 - \frac{e^{\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\pi + tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{e^{\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}}{\sqrt{1-\zeta^2}} - \sin\left(sin^{-1}\left(-\sqrt{1-\zeta^2}\right)\right)$$

$$= 1 + e^{\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$

Μέγιστο Ποσοστό Υπερύψωσης M_p (Maximum Overshoot M_p)

- $M_p = 100\,\frac{y_{max}-1}{1} = 100e^{\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$
- $\zeta = -\frac{\ln\left(\frac{M_p}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2+ln^2\left(\frac{M_p}{100}\right)}}$
- $y_{final} = 1$



2. Χρόνος αποκατάστασης T_s (Settling Time T_s) (1)

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} \sin(\omega_d t + \theta)\, e^{(-\zeta\omega_n)t}$$

$$\downarrow \quad \boldsymbol{\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin(\omega_d t + \theta) e^{-\zeta\omega_n t}$$

$$\downarrow$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin(\omega_d t + \theta) e^{-\zeta\omega_n t} \right| \cong 0.02$$

$$\downarrow$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \right| \cong 0.02$$

2. Χρόνος αποκατάστασης T_s (Settling Time T_s) (2)

$$T_s = -\frac{\ln\left(0.02\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\zeta\omega_n}$$

Ο αριθμητής κυμαίνεται από 3.91 έως 4.74 καθώς το ζ παίρνει τιμές από το 0 έως το 0.9.

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

2. Χρόνος ανόδου T_r (Rising Time T_r)

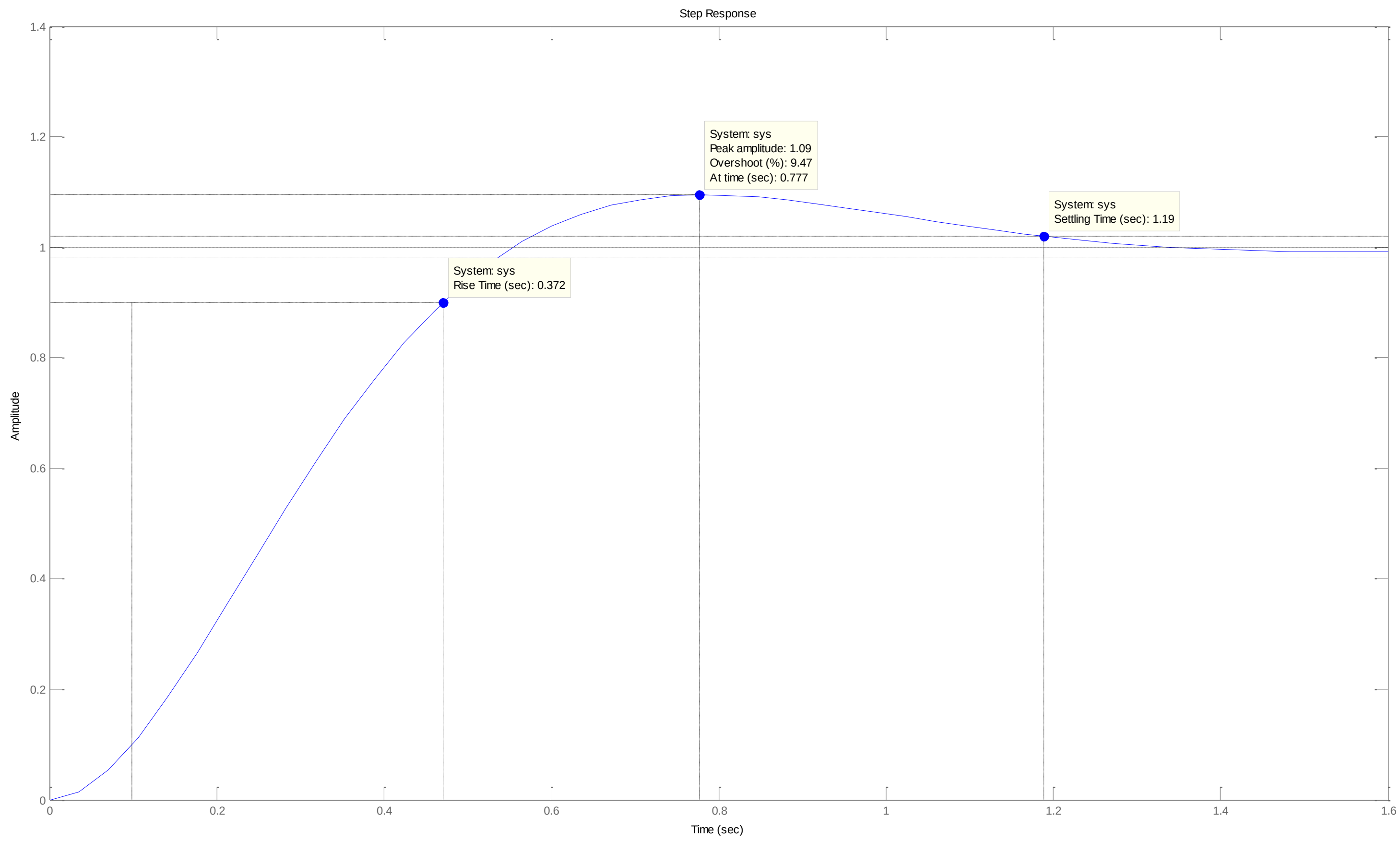
$$T_r \approx \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n}, 0.3 \leq \zeta \leq 0.8$$

Άσκηση 1(1)

$$G(s)=\frac{25}{s^2+6s+25}=\frac{5^2}{s^2+2\times\frac{3}{5}\times 5s+5^2},\zeta=\frac{3}{5},\omega_n=5$$

- $p_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-\frac{3}{5}\times 5\pm j5\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-3\pm j4$
- $M_p=100e^{\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}=100e^{\left(-\frac{\frac{3}{5}\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}\right)}=100e^{\left(-\frac{\frac{3}{5}\pi}{\frac{4}{5}}\right)}=$
  $=100e^{\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}=9.478\%$
- $T_s\approx\frac{4}{\zeta\omega_n}=\frac{4}{\frac{3}{5}\times 5}=\frac{4}{3}=1.333,$
- $T_r\approx\frac{2.16\zeta+0.60}{\omega_n}=\frac{2.16\frac{3}{5}+0.60}{5}=0.3792$

Άσκηση 1(2)


Step Response
System: sys
Peak amplitude: 1.09
Overshoot (%): 9.47
At time (sec): 0.777
System: sys
Settling Time (sec): 1.19
System: sys
Rise Time (sec): 0.372
Amplitude
Time (sec)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6

Άσκηση 1(3)

Αν θέλαμε Mp=5% και Ts=1 τότε θα έπρεπε να έχουμε

- $M_p = 100e^{\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} = 5 \Rightarrow e^{\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} = 0.05 \Rightarrow$

$$-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln(0.05) = -2.9957 \Rightarrow \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2.9957}{3.14} = 0.9535 \overset{\zeta>0}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2 = 0.90916 \Rightarrow \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2} = 0.90916 \Rightarrow$$

$$\frac{\zeta^2}{1-\zeta^2+\zeta^2} = \frac{0.90916}{1+0.90916} \Rightarrow$$

$$\zeta^2 = 0.4762 \Rightarrow \zeta = \sqrt{0.4762} \cong 0.69$$

Άσκηση 1(4)

- $T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = 1 \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{\zeta} \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{0.69} = 5.7971$
- $p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} =$

$$-0.69 \times 5.7971 \pm j5.7971\sqrt{1-(0.69)^2} =$$

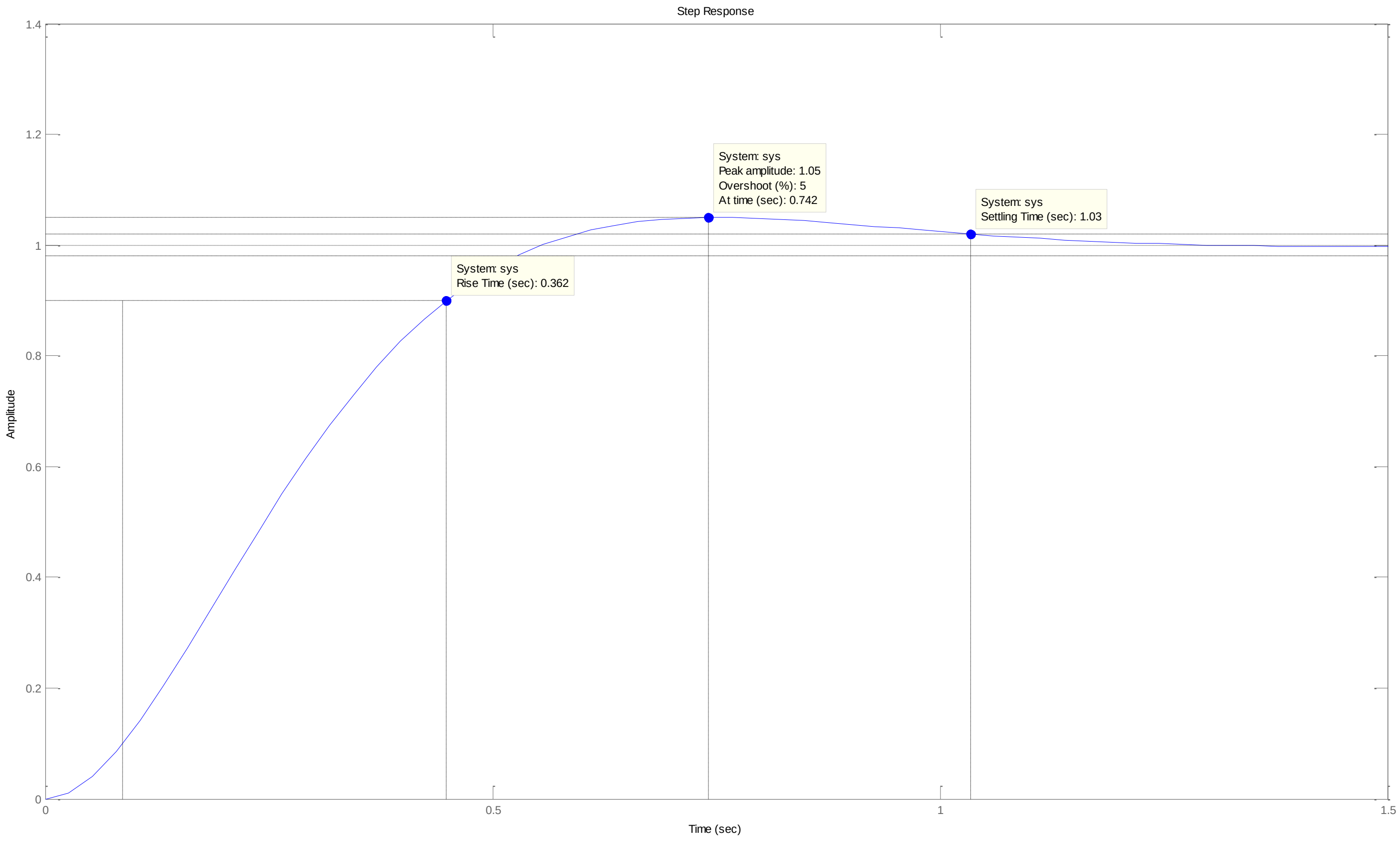
$$-4 \pm j4.196$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{5.7971^2}{s^2 + 2 \times 0.69 \times 5.7971s + 5.7971^2}$$

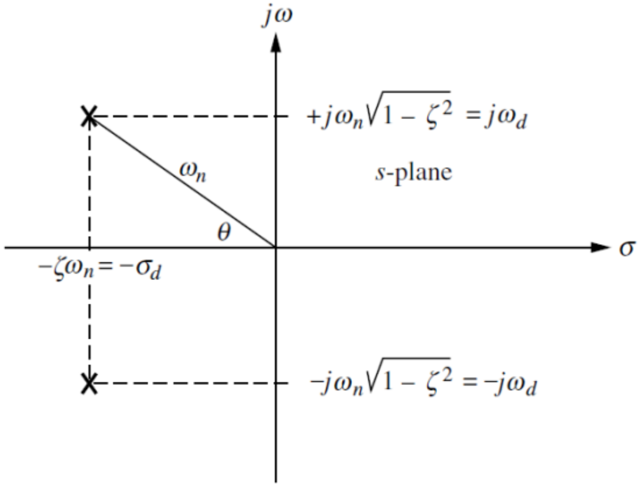
$$= \frac{33.6064}{s^2 + 8s + 33.6064}$$

Άσκηση 1(5)


Step Response
System: sys
Peak amplitude: 1.05
Overshoot (%): 5
At time (sec): 0.742
System: sys
Settling Time (sec): 1.03
System: sys
Rise Time (sec): 0.362
Amplitude
Time (sec)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1
1.5

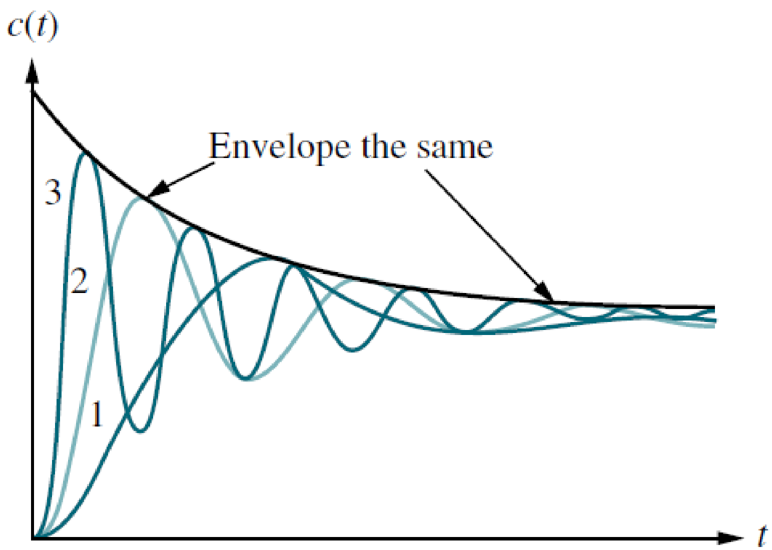
Γενικά

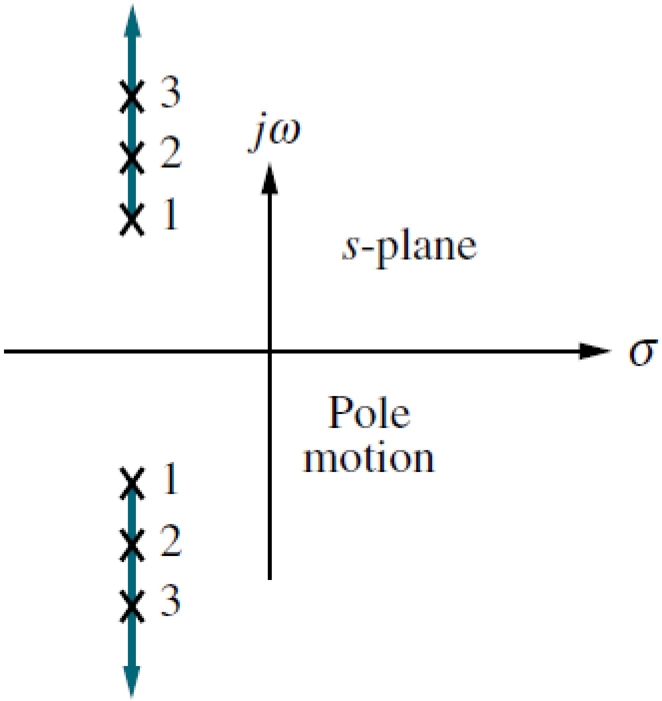
- $M_p = 100\frac{y_{max}-1}{1} = 100e^{\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$
- $(\zeta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2 = \omega_n^2, cos\theta = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta$
- Settling time $T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$
- $T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$ ↔Peak response



Χρόνος αποκατάστασης T_s

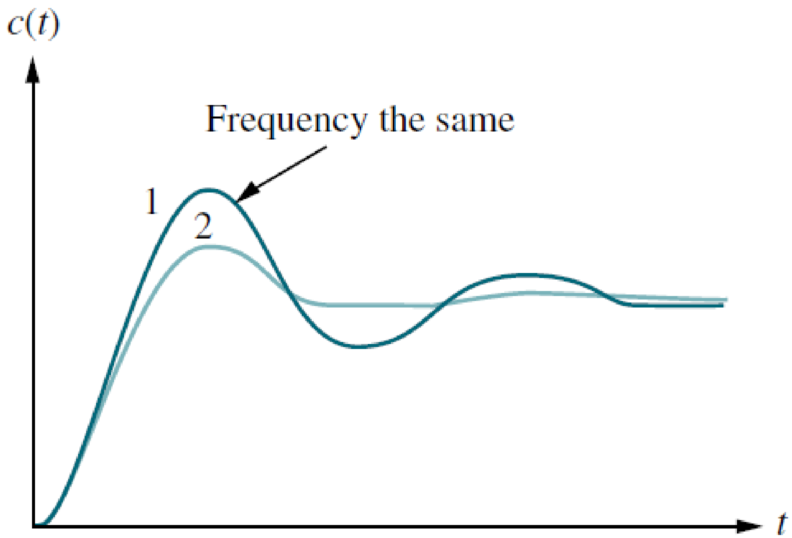
- $T_s = \dfrac{4}{\zeta\omega_n}$

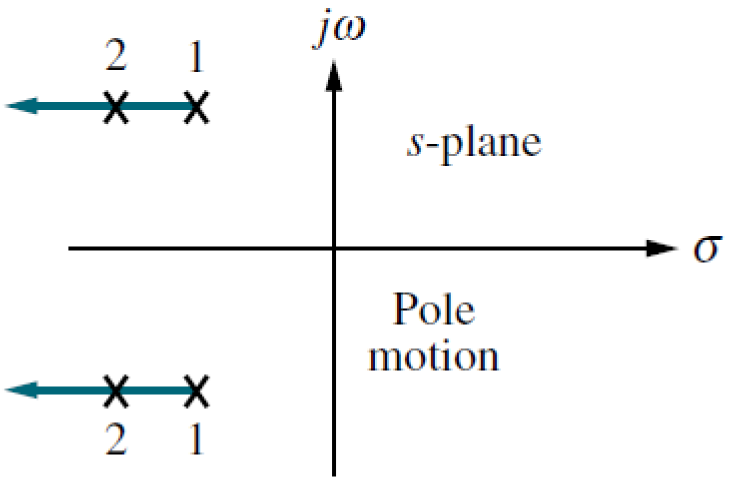




Μέγιστη απόκριση T_p

- $T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$

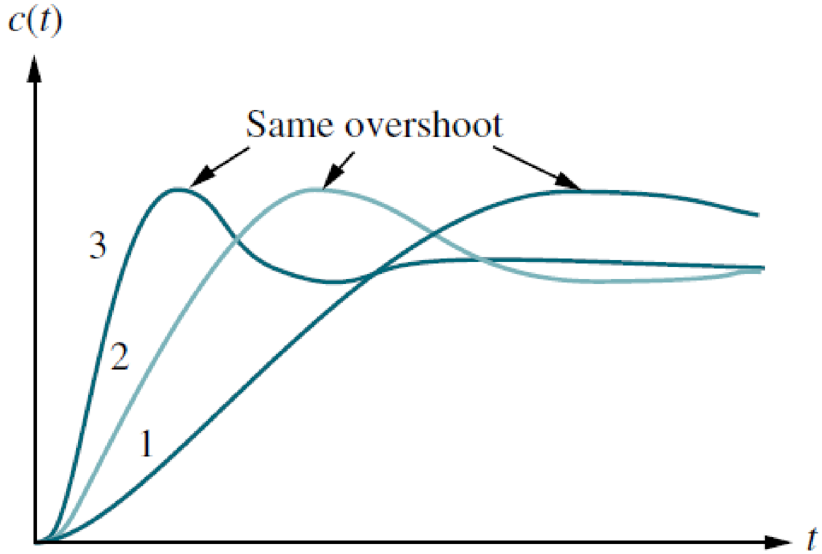


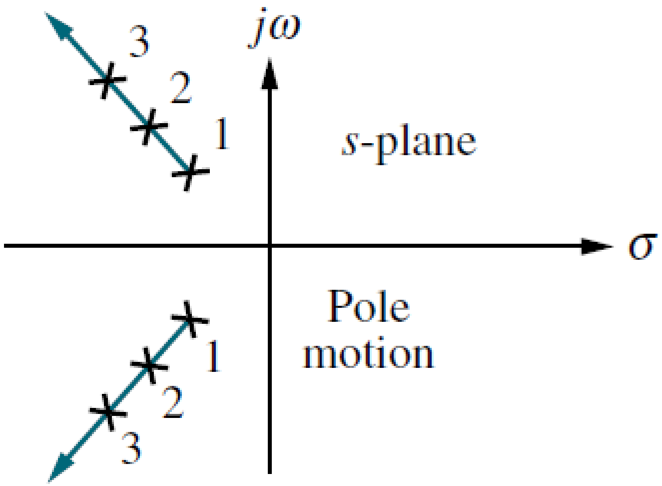


Μέγιστη Υπερύψωση M_p

- $M_p = 100\frac{y_{max}-1}{1} = 100e^{\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$
- $(\zeta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2 = \omega_n^2$,

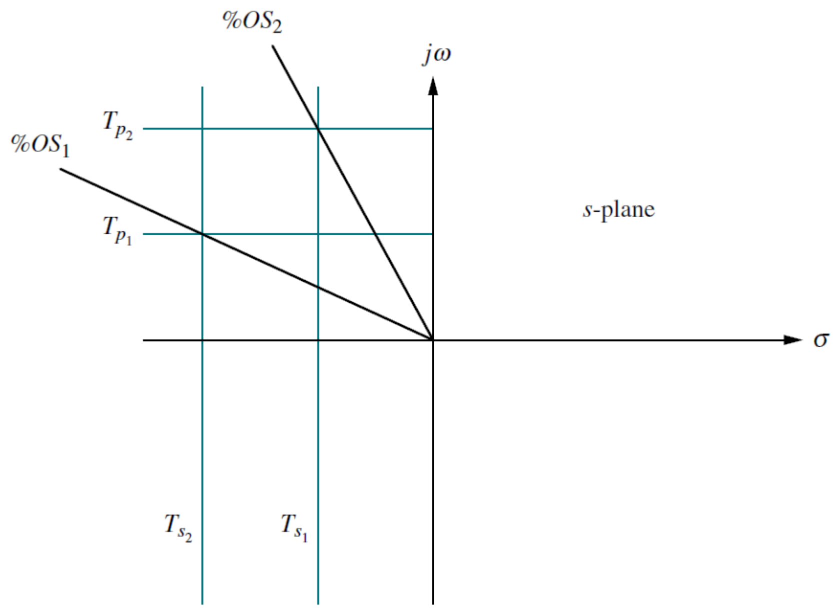
$$cos\theta = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta$$





Γραφικές παραστάσεις

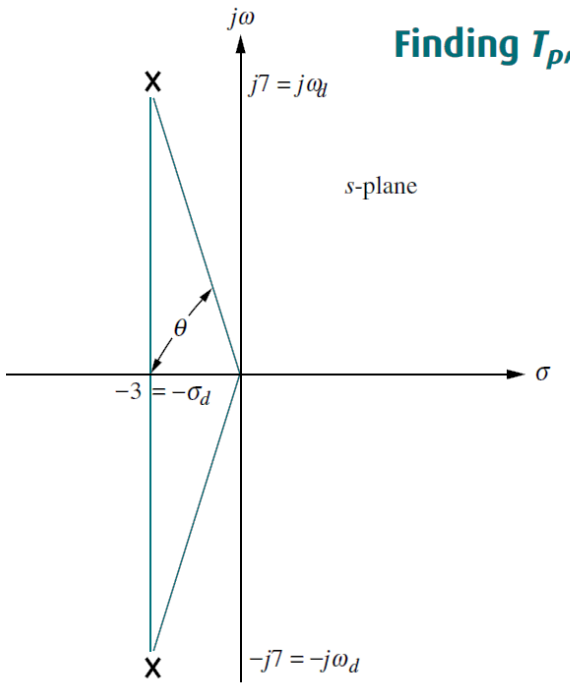
- Γραφικές παραστάσεις σταθερή T_p, T_s, και υπερύψωση $\%OS$.
- Note: $T_{s_2} < T_{s_1}$; $T_{p_2} < T_{p_1}$; $\%OS_1 < \%OS_2$



Παράδειγμα 4

Να υπολογιστούν τα $\zeta, \omega_n, T_p, M_p, T_s$.

$$\omega_n = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} = 7.616$$



$$\zeta = \cos\theta = \frac{3}{7.616} = 0.394$$

ή

$$\zeta = \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{7}{3}\right)\right) = 0.394$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{3\times 0.394} = 1.333\text{sec}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{3.14}{7.1616\times\sqrt{1-0.394^2}} = 0.449\,\text{sec}$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100 = 26\%$$

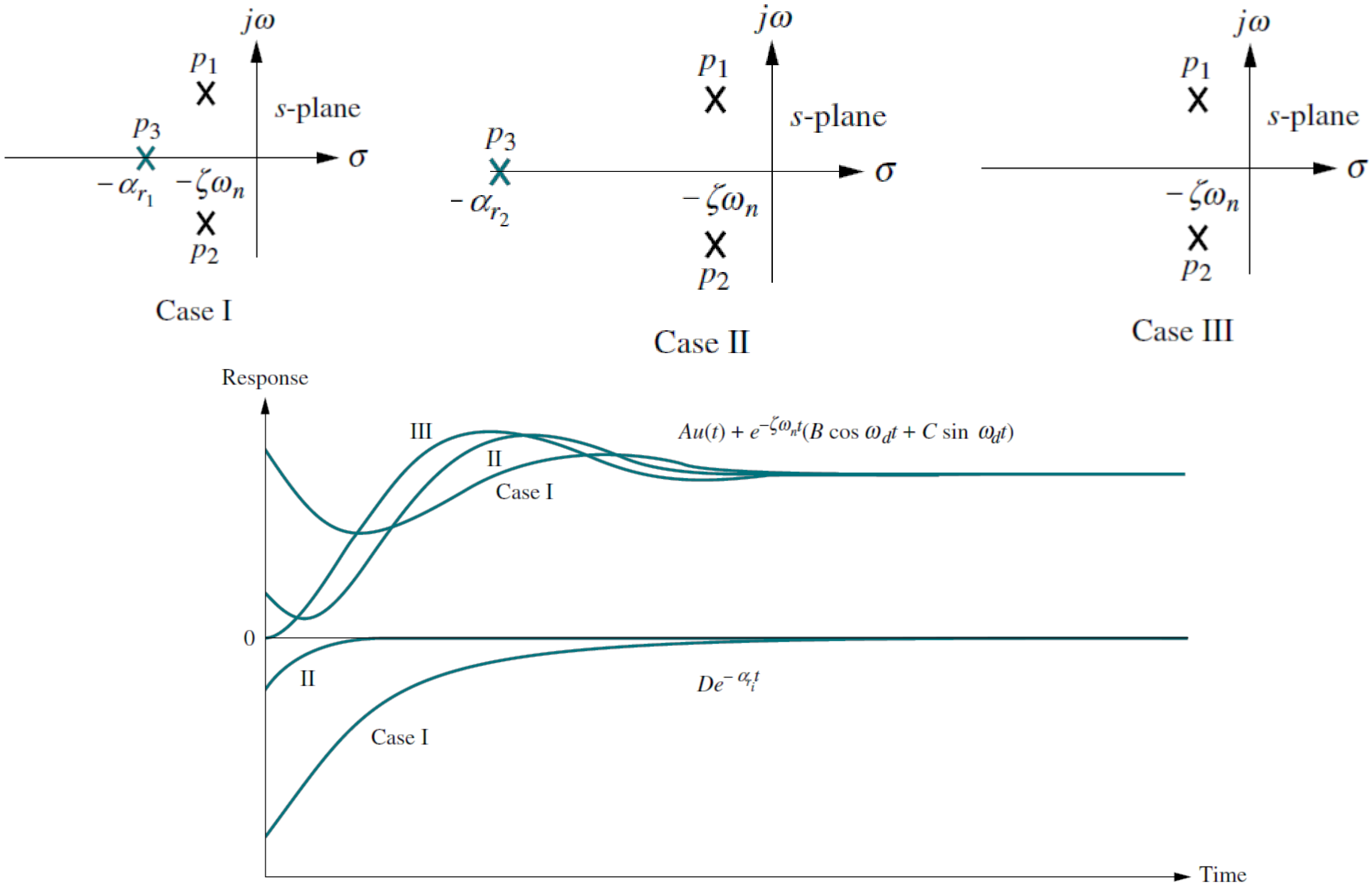
Επιπλέον πόλοι (1)

$$C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B(s+\zeta\omega_n) + C\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{D}{s+a_r}$$

$$\downarrow$$

$$c(t) = Au(t) + e^{-\zeta\omega_n t}(Bcos\omega_d t + Csin\omega_d t) + De^{-a_r t}$$

Επιπλέον πόλοι (2)



Επιπλέον πόλοι (3)

$$C(s) = \frac{bc}{s(s^2 + as + b)(s + c)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + as + b} + \frac{D}{s + c}$$

$$A = 1; B = \frac{ca - c^2}{c^2 + b - ca}$$

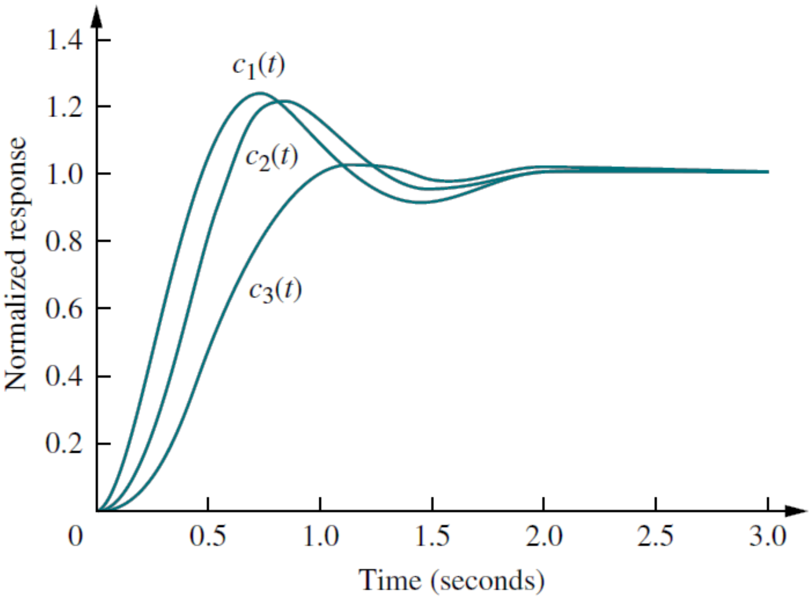
$$C = \frac{ca^2 - c^2a - bc}{c^2 + b - ca}; D = \frac{ca - c^2}{c^2 + b - ca}$$

$$\downarrow \quad c \to \infty$$

$$A = 1; B = -1; C = -a; D = 0$$

Επιπλέον πόλοι (4)

- $T_1(s) = \dfrac{24.542}{s^2+4s+24.452}$
- $T_2(s) = \dfrac{245.42}{(s+10)(s^2+4s+24.452)}$
- $T_3(s) = \dfrac{73.626}{(s+3)(s^2+4s+24.452)}$



$$c_1(t) = 1 - 1.09e^{-2t}\cos(4.532t - 23.8^o)$$
$$c_2(t) = 1 - 0.29e^{-10t} - 1.189e^{-2t}\cos(4.532t - 53.34^o)$$
$$c_3(t) = 1 - 1.14e^{-3t} + 0.707e^{-2t}\cos(4.532t - 78.63^o)$$

Επιπλέον μηδενικά (1)

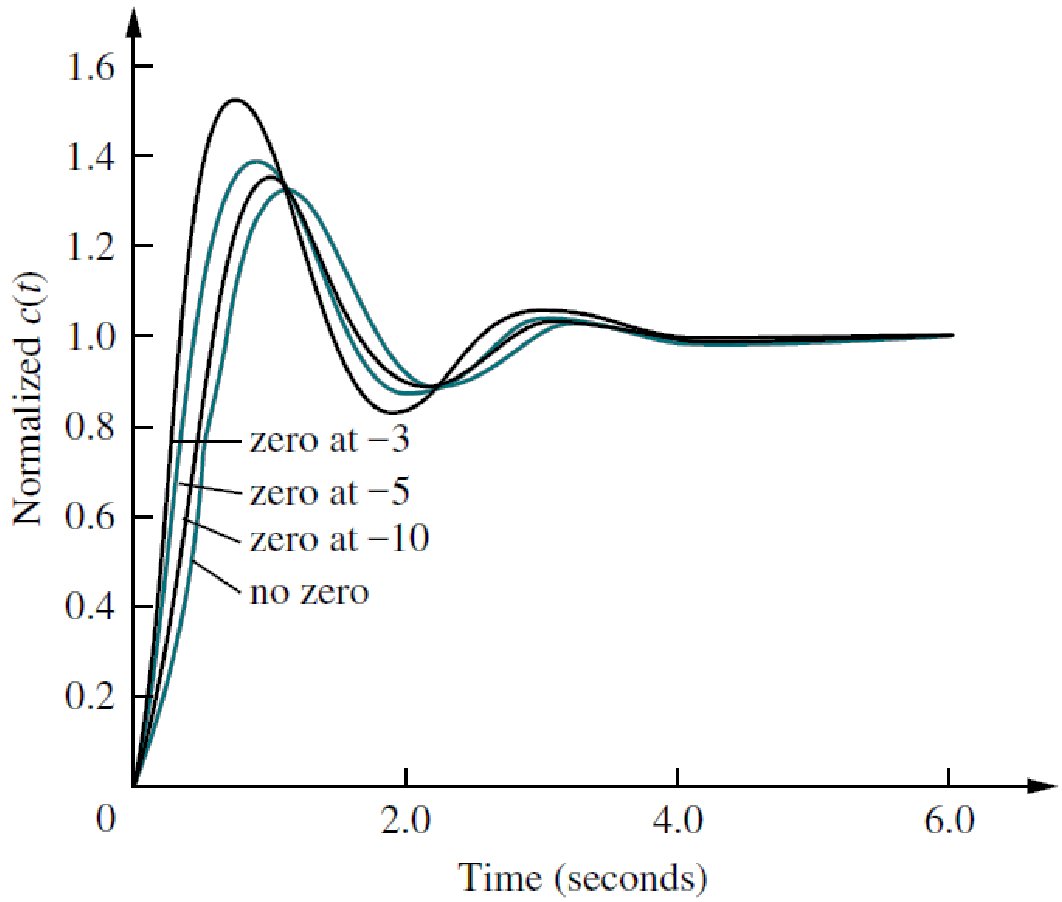
$$T(s) = \frac{(s+a)}{(s+b)(s+c)} = \frac{A}{s+b} + \frac{B}{s+c}$$

$$= \frac{\frac{(-b+a)}{-b+c}}{s+b} + \frac{\frac{(-c+a)}{-c+b}}{s+c}$$

$$\downarrow \quad a \gg b, a \gg c$$

$$T(s) \approx a\left[\frac{\frac{1}{-b+c}}{s+b} + \frac{\frac{1}{-c+b}}{s+c}\right] = \frac{a}{(s+b)(s+c)}\frac{1}{-b+c}$$

Επιπλέον μηδενικά (2)



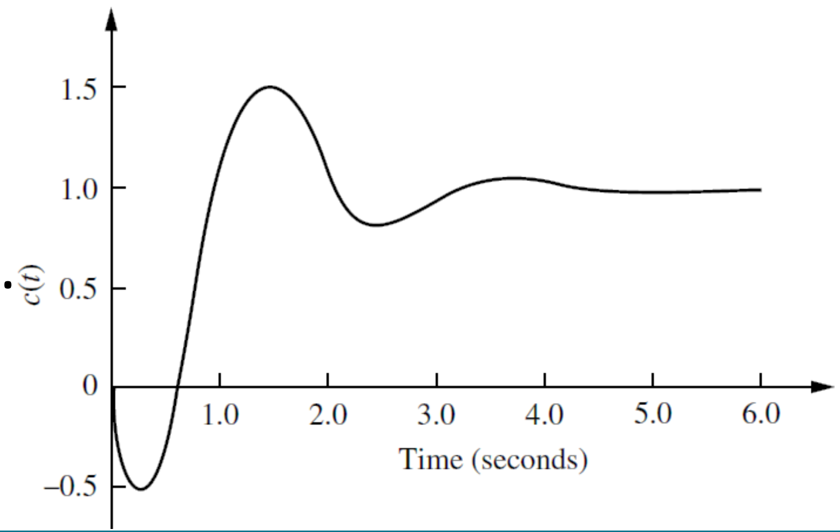
Επιπλέον μηδενικά (3)

$$\text{Παράγωγος}$$
$$\downarrow$$
$$(s+a)C(s) = sC(s) + aC(s)$$

Μεγάλο a (θετικό) δεν επηρεάζει η παράγωγος.

Μικρό a (θετικό) επηρεάζει η παράγωγος με επιπρόσθετο overshoot.

a (αρνητικό) nonninimum-phase.



Επιπλέον μηδενικά (4)

$$T(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p_3)(s^2+as+b)}$$

$$C_2(s) = \frac{26.25(s+a)}{s(s+4.01)(s+5)(s+6)}$$

$$C_2(s) = \frac{0.87}{s} - \frac{5.3}{s+5} + \frac{4.4}{s+6} + \frac{0.033}{s+4.01}$$

$$C_2(s) \approx \frac{0.87}{s} - \frac{5.3}{s+5} + \frac{4.4}{s+6}$$

$$c_2(t) \approx 0.87 - 5.3e^{-5t} + 4.4e^{-6t}$$

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι., 2011, *Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Συστημάτων και Ελέγχου*, Τόμος Α: Κλασική Θεωρία Ελέγχου, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Πουλιέζος Αναστάσιος, 2013, *Περί Συστημάτων Ελέγχου. Εισαγωγικό Εγχειρίδιο της Σύγχρονης Θεωρίας Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου*, ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε.
- Norman Nise, 2011, *Control Systems Engineering*, 6th Edition, John Willey.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Κλασσική Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 8: Συστήματα πρώτης και δεύτερης τάξης». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS432/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης