ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Κλασσική Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 9: Περιγραφή συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Περιγραφή συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας.

Σκοποί Ενότητας

- Περιγραφή συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας.

Περιγραφή συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας (1)

Έστω το αιτιατό, γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα (με μηδενικές αρχικές συνθήκες)

$$y(t) = (Fx)(t)$$

Τότε

$$y(t) = (h * t)(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

όπου $h(t)$ η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Αν $x(t) = 0$, για $t < 0$

$$y(t) = (h * x)(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \,, t > 0, (1)$$

Περιγραφή συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας (2)

Θεωρώντας το μετασχηματισμό Laplace της (1) και κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού Laplace της συνέλιξης, έχουμε

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

$$y(t) \leftrightarrow Y(s), h(t) \leftrightarrow H(s), x(t) \leftrightarrow X(s)$$

Ο λόγος

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου $y(t) \leftrightarrow Y(s)$ δια του μετασχηματισμού Laplace της εισόδου $x(t) \leftrightarrow X(s)$ ονομάζεται **συνάρτηση μεταφοράς** (**transfer function**) του συστήματος .

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

Παράδειγμα 1

Έστω ότι η είσοδος

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

εφαρμόζεται σε ένα γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα και η έξοδος είναι $y(t) = 2 - 3e^{-t} + e^{-2t}cos\omega t, t \geq 0$

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{s+2}{(s+2)^2+4} \text{ και } X(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{s+2}{(s+2)^2+4}}{\frac{1}{s+1}} =$$

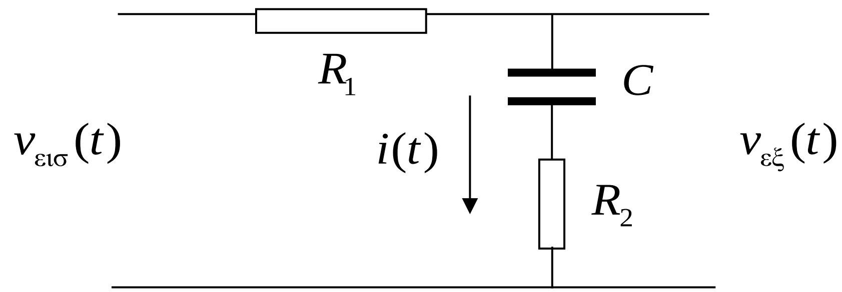
$$= \frac{2(s+1)}{s} - 3\frac{(s+1)(s+2)}{(s+2)^2+4} = \frac{s^2+2s+16}{s^3+4s^2+8s}$$

Παράδειγμα 2 (1)

$y(t)$=αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του $H(s)X(s)$.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος (κυκλώματος)



Από το νόμο Kirkhoff

$$v_{\varepsilon\iota\sigma}(t) = i(t)R_1 + \frac{1}{C}\int_{\tau=0}^{\tau=t} i(\tau)d\tau + i(t)R_2, \qquad (2)$$

$$i(t) \leftrightarrow I(s),$$

$$v_{\varepsilon\iota\sigma}(t) \leftrightarrow V_{\varepsilon\iota\sigma}(s)$$

Παράδειγμα 2 (2)

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace την (2), έχουμε την

$$V_{\varepsilon\iota\sigma}(s) = I(s)R_1 + \frac{1}{Cs}I(s) + I(s)R_2$$

$$V_{\varepsilon\iota\sigma}(s) = \left(R_1 + \frac{1}{Cs} + R_2\right)I(s)$$

Η τάση $v_{\varepsilon\iota\sigma}(t)$ στην έξοδο είναι

$$v_{\varepsilon\xi}(t) = \frac{1}{C}\int_{\tau=0}^{\tau=t} i(\tau)d\tau + i(t)R_2, (3)$$

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace την (3), έχουμε την

$$V_{\varepsilon\xi}(s) = \frac{1}{Cs}I(s) + I(s)R_2 = \left(\frac{1}{Cs} + R_2\right)I(s)$$

Παράδειγμα 2 (3)

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος (κυκλώματος) είναι

$$H(s)=\frac{V_{\varepsilon\xi}(s)}{V_{\varepsilon\iota\sigma}(s)}=\frac{\left(\frac{1}{Cs}+R_2\right)I(s)}{\left(R_1+\frac{1}{Cs}+R_2\right)I(s)}=\frac{\frac{1}{Cs}+R_2}{R_1+\frac{1}{Cs}+R_2}$$

$$=\frac{\frac{1+R_2Cs}{Cs}}{\frac{1+R_1Cs+R_2Cs}{Cs}}=\frac{1+R_2Cs}{1+(R_1C+R_2C)s}$$

$$=\frac{1+bs}{1+(a+b)s},a=R_1C,b=R_2C$$

Για $a=1,b=1,H(s)=\frac{1+bs}{1+(a+b)s}=\frac{1+s}{1+2s}$

Συνάρτηση Μεταφοράς (1)

Έστω

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)$$
$$= b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 x(t)$$

Ορισμός. Η **συνάρτηση μεταφοράς** του παραπάνω συστήματος ορίζεται ως ο λόγος του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου $y(t)$ προς τον μετασχηματισμό Laplace της εισόδου $x(t)$ με την προϋπόθεση ότι όλες οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδέν.

Συνάρτηση Μεταφοράς (2)

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{x(t)\}} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$
$$= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\xrightarrow{X(s)} \boxed{H(s)} \xrightarrow{Y(s)}$$

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Μηδενικά – Πόλοι - Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος

Ορισμός. Έστω ότι η συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού μη χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος αναλύεται ως

$$H(s) = \frac{b_m}{a_n}\frac{(s-z_1)^{m_1}\dots\left(s-z_\mu\right)^{m_\mu}}{(s-p_1)^{n_1}\dots(s-p_k)^{n_k}}$$

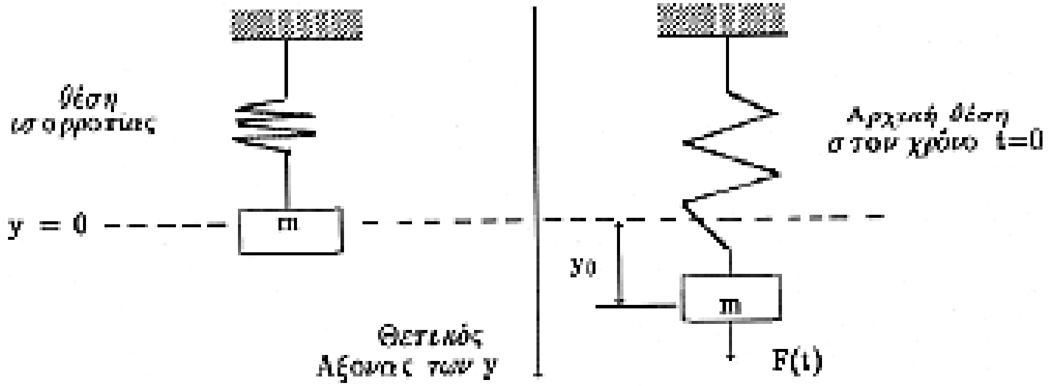
$$= \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Οι μιγαδικές τιμές $z_1, z_2, \dots, z_\mu$ ονομάζονται **μηδενικά** του συστήματος, ενώ οι μιγαδικές $p_1, p_2, \dots, p_k$ ονομάζονται **πόλοι** του συστήματος.

Το πολυώνυμο $a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ ονομάζεται **χαρακτηριστικό** πολυώνυμο του συστήματος.

Παράδειγμα 3 (1)

Έστω το σύστημα



$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{a}{m}\frac{dy(t)}{dt}+\frac{k}{m}y(t)=\frac{F(t)}{m}$$

$$\downarrow \boldsymbol{m=1, a=5, k=6}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{F(t)}{m}$$

↓ Μηδενικές αρχικές συνθήκες

Παράδειγμα 3 (2)

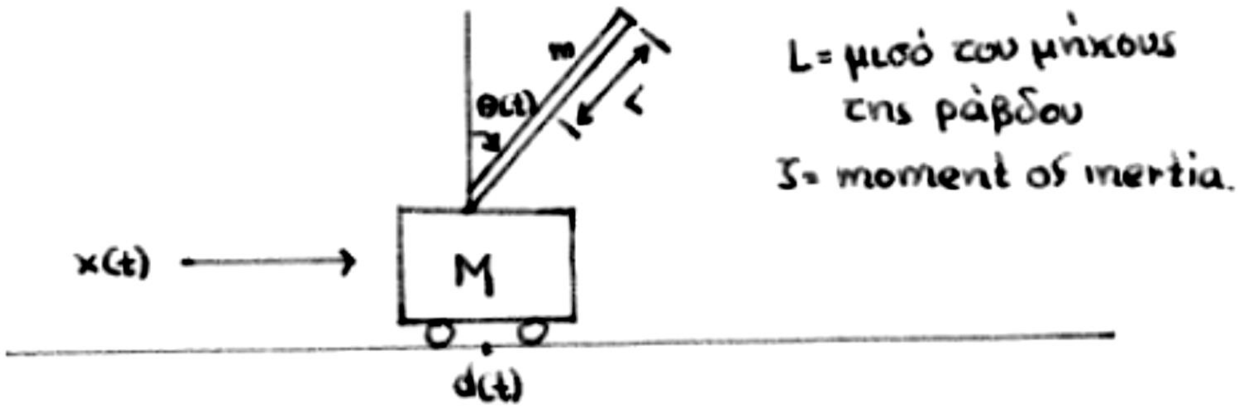
$$s^2y(s) + 5sy(s) + 6y(s) = F(s) \Rightarrow$$
$$(s^2 + 5s + 6)y(s) = F(s)$$

…

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

Οι πόλοι του συστήματος είναι $p_1 = -2 \; και \; p_2 = -3$.
Μηδενικά δεν υπάρχουν.

Παράδειγμα 4 (1)



Εάν υποθέσουμε ότι η γωνία $\theta(t)$ είναι μικρή να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος δεδομένου ότι η έξοδος είναι η $\theta(t)$ και η είσοδος η $x(t)$.
Μικρή γωνία $\theta(t)$ έχω $\cos\big(\theta(t)\big) = 1\ \kappa\alpha\iota\ \sin\big(\theta(t)\big)\ \theta(t)$.

Παράδειγμα 4 (2)

↓ Μηδενικές αρχικές συνθήκες

$$\begin{cases} (J + mL^2)s^2\theta(s) - mgL\theta(s) + mLs^2 d(s) = 0 \\ (M + m)s^2 d(s) + mLs^2\theta(s) = x(s) \end{cases} \Rightarrow$$

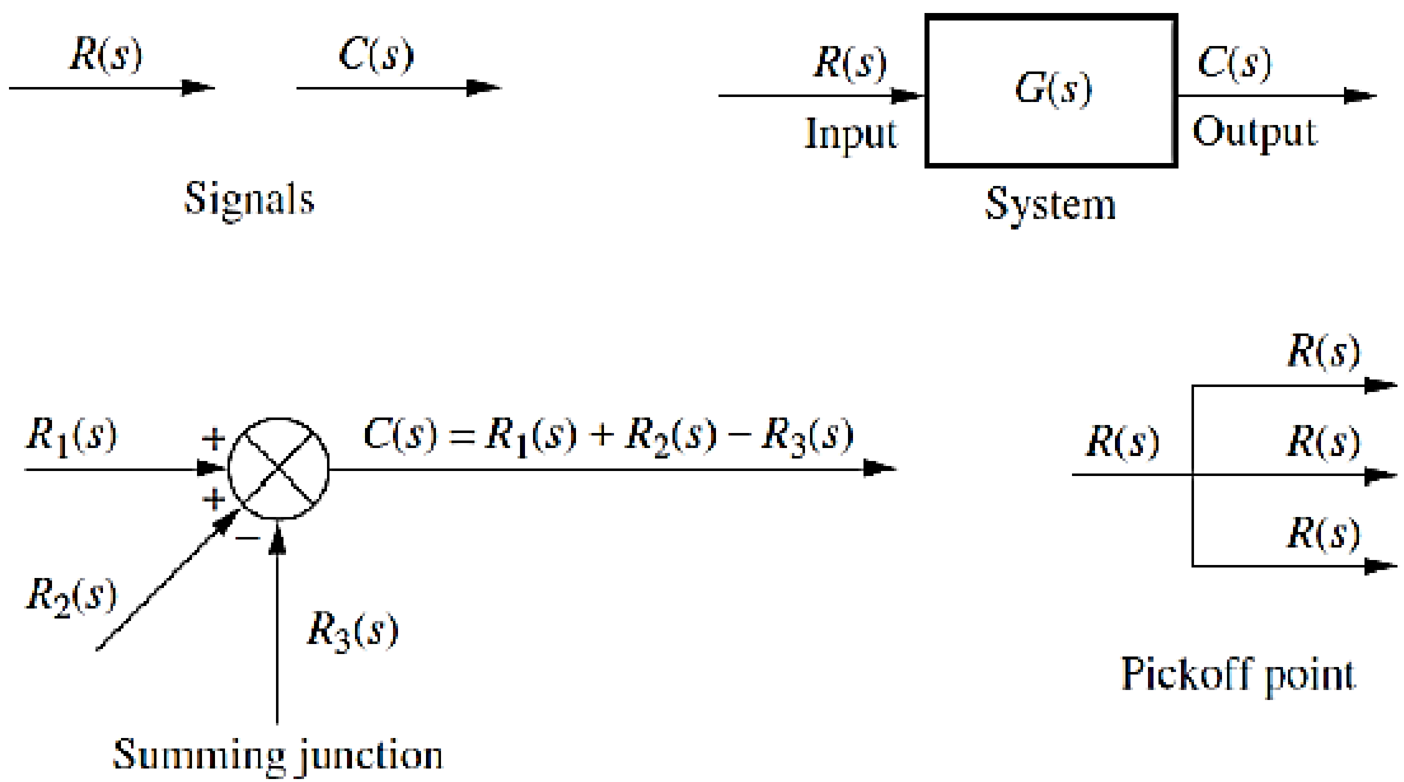
$$\begin{cases} s^2 d(s) = \dfrac{-mL}{(M+m)} s^2\theta(s) + \dfrac{1}{(M+m)} x(s) \\ (J + mL^2)s^2\theta(s) - mgL\theta(s) + mL\left[\dfrac{-mL}{(M+m)} s^2\theta(s) + \dfrac{x(s)}{(M+m)}\right] \end{cases}$$

$$\left[\left(J + mL^2 - \frac{m^2L^2}{(M+m)}\right)s^2 - mgL\right]\theta(s) = -\frac{mL^2}{(M+m)} x(s) \Rightarrow$$

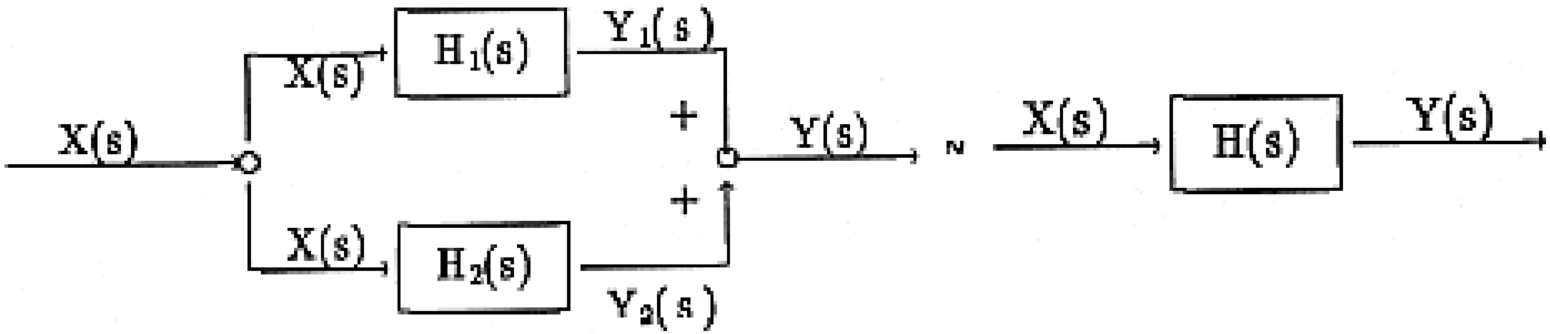
Παράδειγμα 4 (3)

$$\Rightarrow H(s) = \frac{\theta(s)}{x(s)} = \frac{mL^2}{(JM + Jm + mML^2)s^2 - mgL(M + m)}$$

Στοιχεία ενός block διαγράμματος



Συνδεσμολογία
Παράλληλη σύνδεση (1)

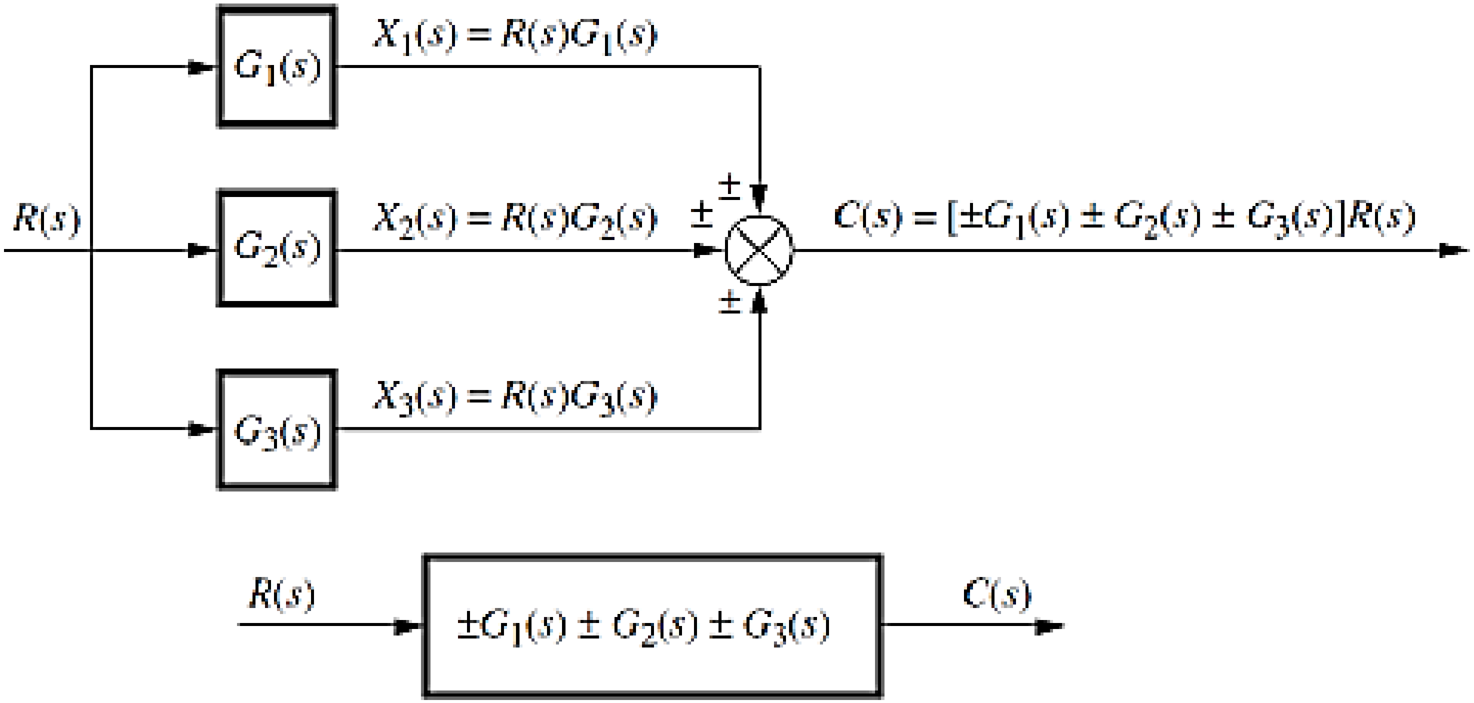


$$\begin{cases} Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) \\ Y_1(s) = H_1(s)X(s) \\ Y_2(s) = H_2(s)X(s) \end{cases} \Rightarrow$$

$$Y(s) = H_1(s)X(s) + H_2(s)X(s) = [H_1(s) + H_2(s)]X(s) \\ = H(s)X(s)$$

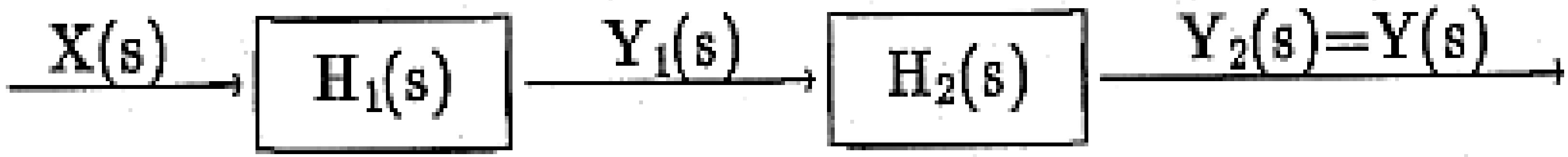
$$\boxed{H(s) = H_1(s) + H_2(s)}$$

Συνδεσμολογία
Παράλληλη σύνδεση (2)



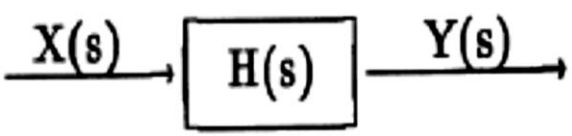
$$G_e(s) = \pm G_1(s) \pm G_2(s) \pm G_3(s)$$

Συνδεσμολογία
Σύνδεση σε σειρά (1)



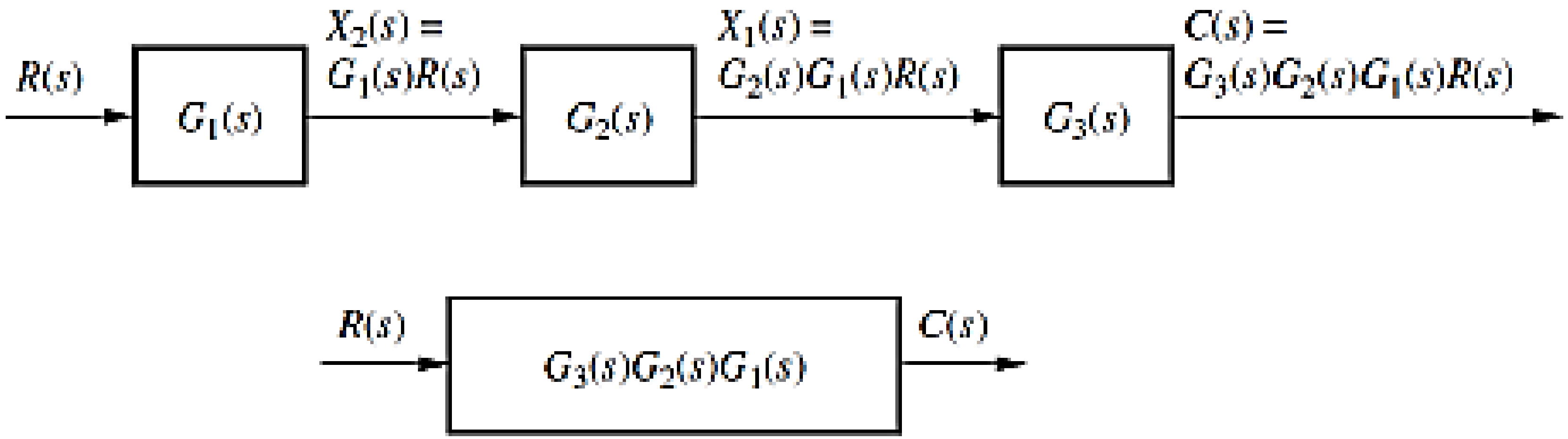
$$\begin{cases} Y(s) = Y_2(s) = H_2(s)Y_1(s) \\ Y_1(s) = H_1(s)X(s) \end{cases} \Rightarrow$$

$$Y(s) = H_2(s)[H_1(s)X(s)] = [H_2(s)H_1(s)]X(s) = H(s)X(s)$$



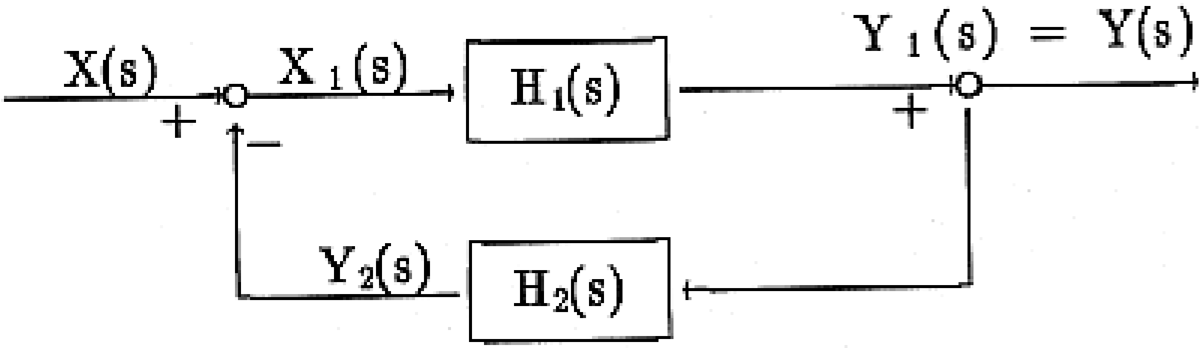
$$\boxed{H(s) = H_2(s)H_1(s)}$$

Συνδεσμολογία
Σύνδεση σε σειρά (2)



$$G_e(s) = G_3(s)G_2(s)G_1(s)$$

Συνδεσμολογία
Ανάδραση εξόδου (1)



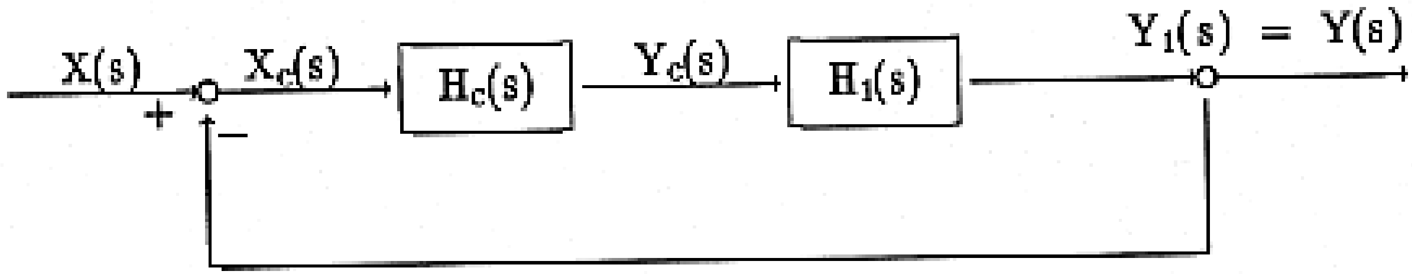
$$\begin{cases} Y(s) = Y_1(s) = H_1(s)X_1(s) \\ X_1(s) = X(s) - Y_2(s) \\ Y_2(s) = H_2(s)Y(s) \end{cases} \Rightarrow$$

$$Y(s) = H_1(s)[X(s) - H_2(s)Y(s)] \Leftrightarrow$$

$$[1 + H_1(s)H_2(s)]Y(s) = H_1(s)X(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}}$$

Συνδεσμολογία
Ανάδραση εξόδου (2)



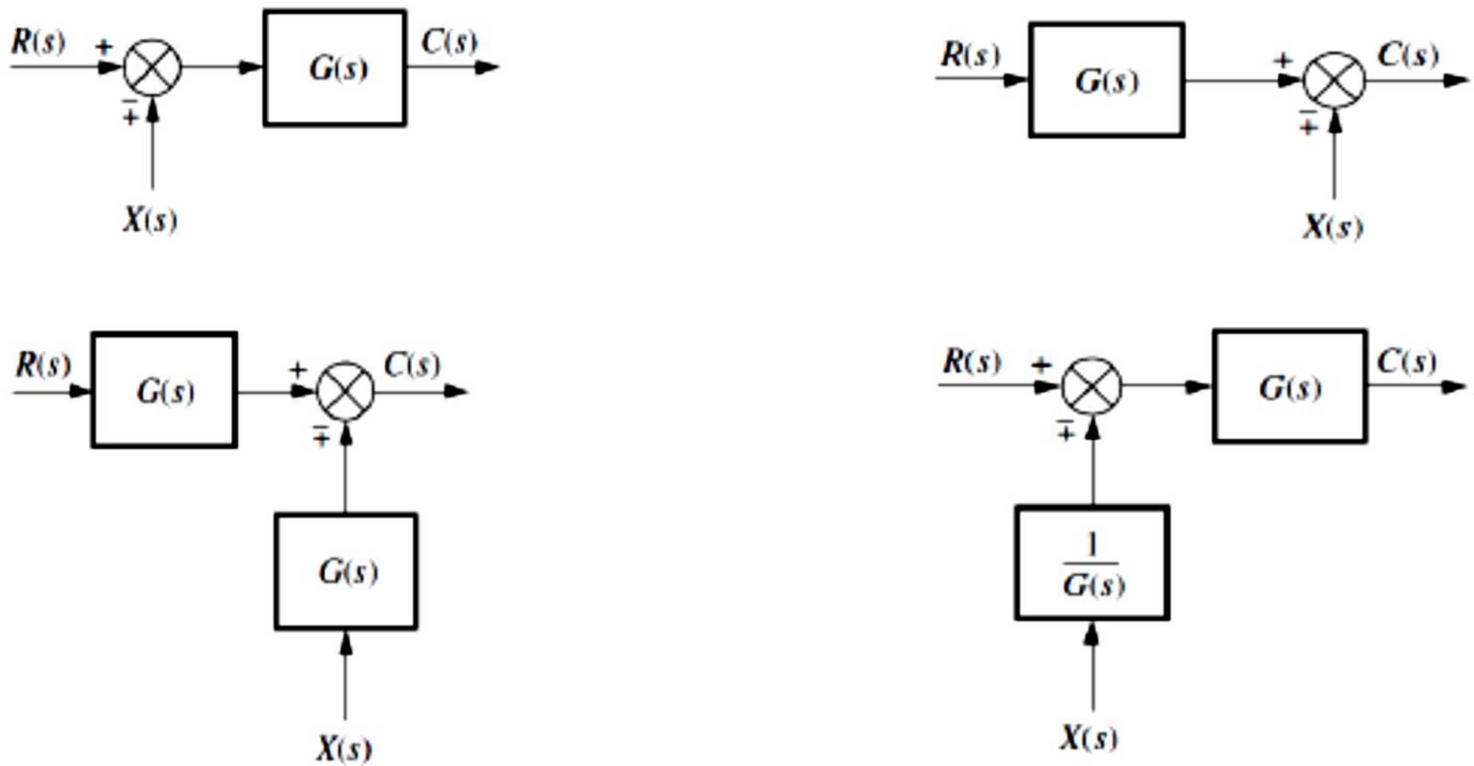
$$\begin{cases} Y(s) = Y_1(s) = H(s)Y_c(s) \\ Y_c(s) = H_c(s)X(s) \\ X_c(s) = X(s) - Y(s) \end{cases}$$

$$Y(s) = H(s)H_c(s)[X(s) - Y(s)] \Rightarrow$$

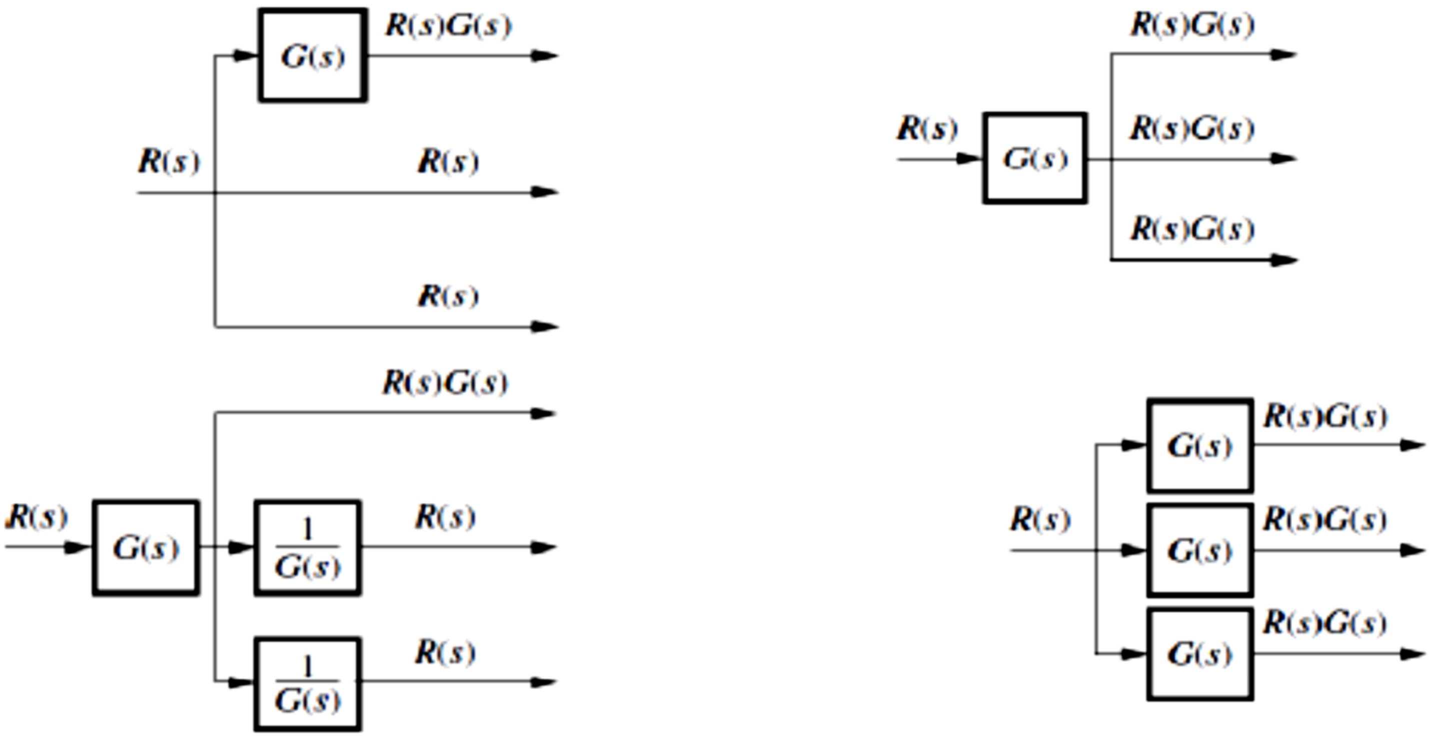
$$[1 + H(s)H_c(s)]Y(s) = H(s)H_c(s)X(s)$$

$$H(s) = \frac{H_1(s)H_c(s)}{1 + H_1(s)H_c(s)}$$

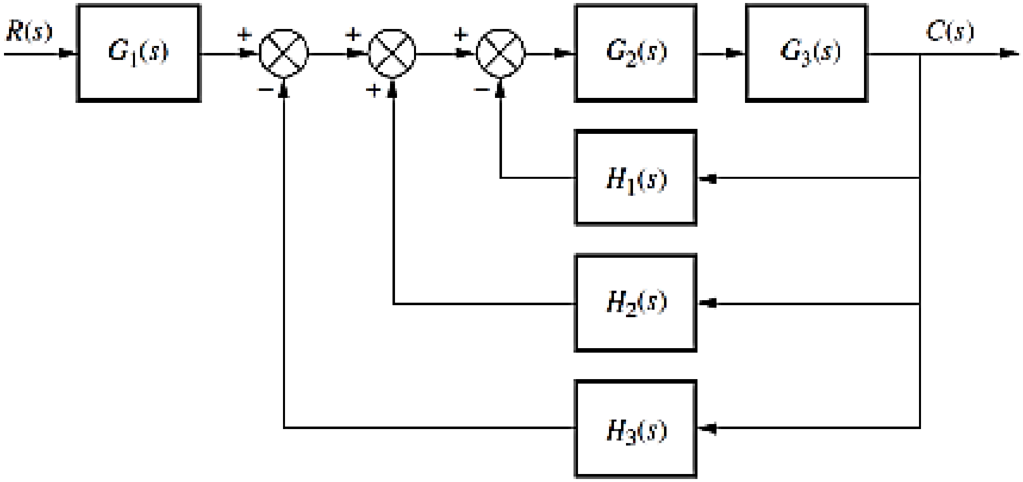
Συνδεσμολογία
Ισοδύναμες μορφές (1)



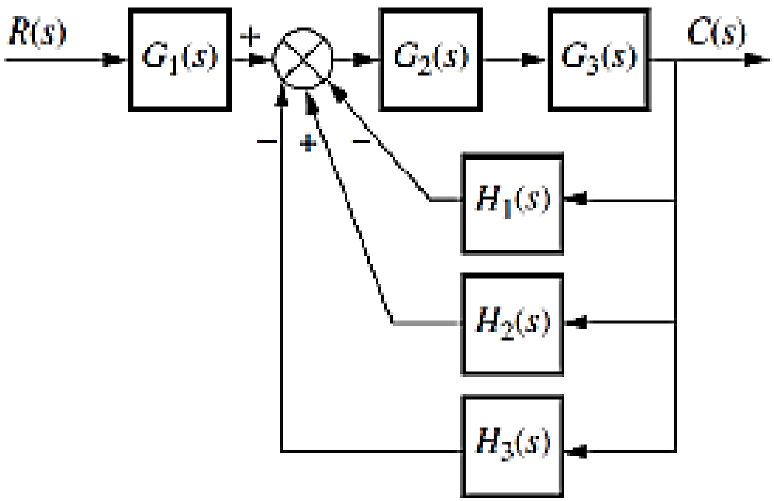
Συνδεσμολογία
Ισοδύναμες μορφές (2)

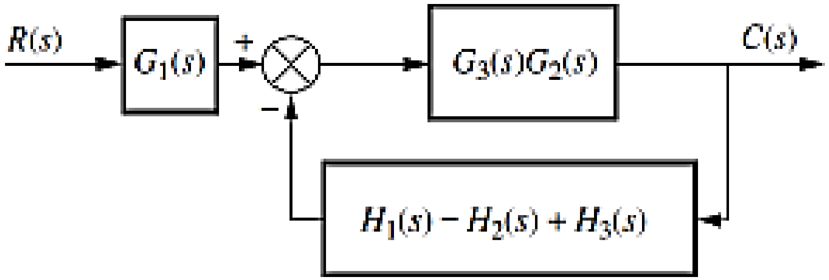


Παράδειγμα 5 (1)

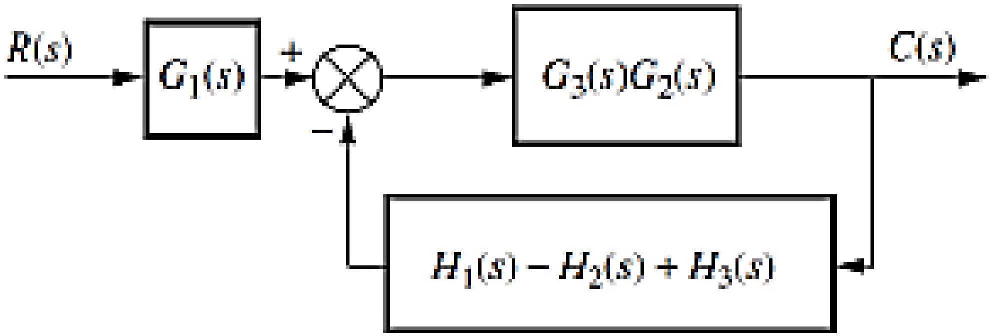


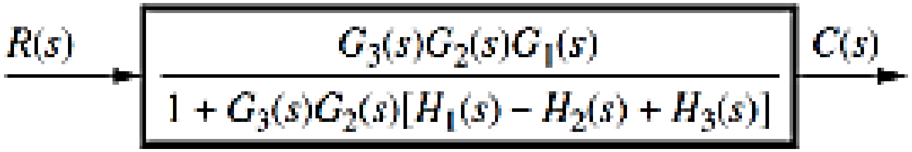
Παράδειγμα 5 (2)



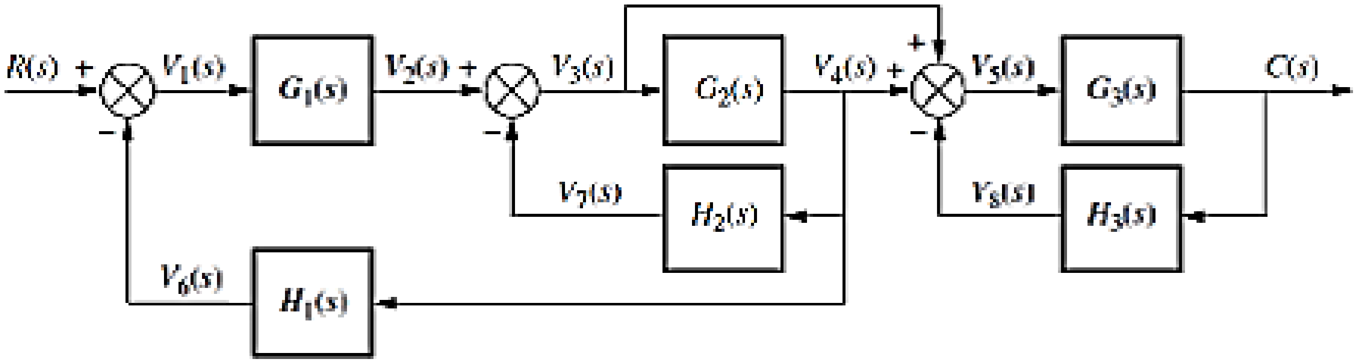


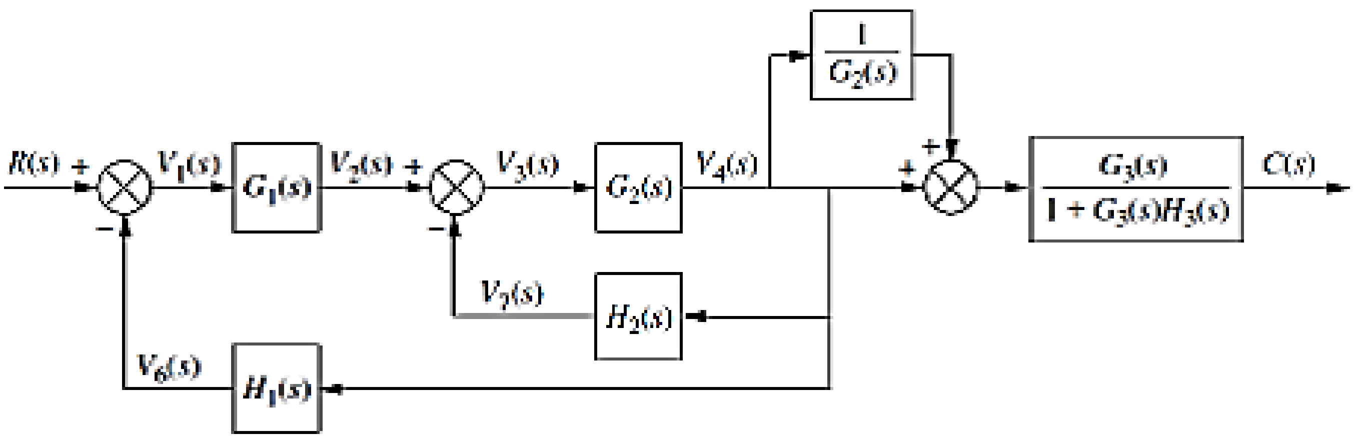
Παράδειγμα 5 (3)



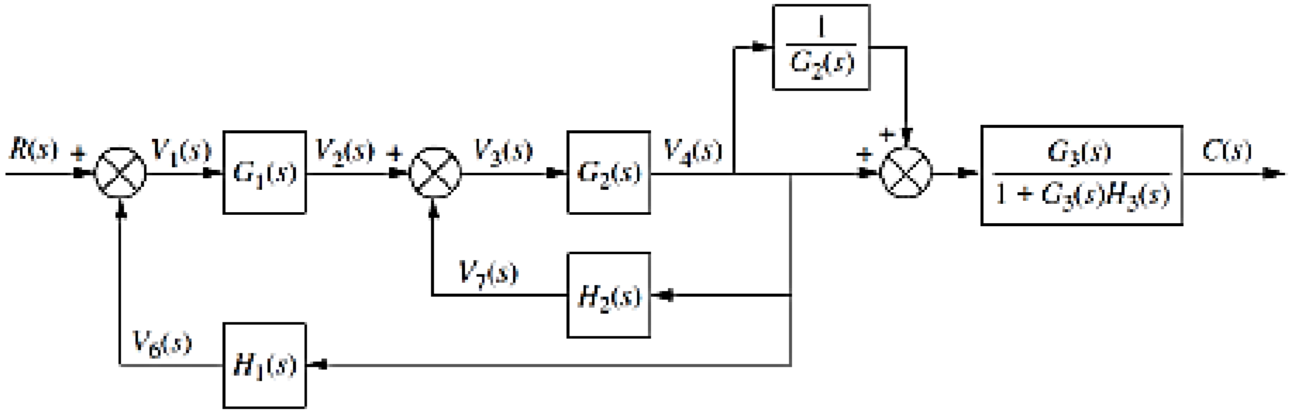


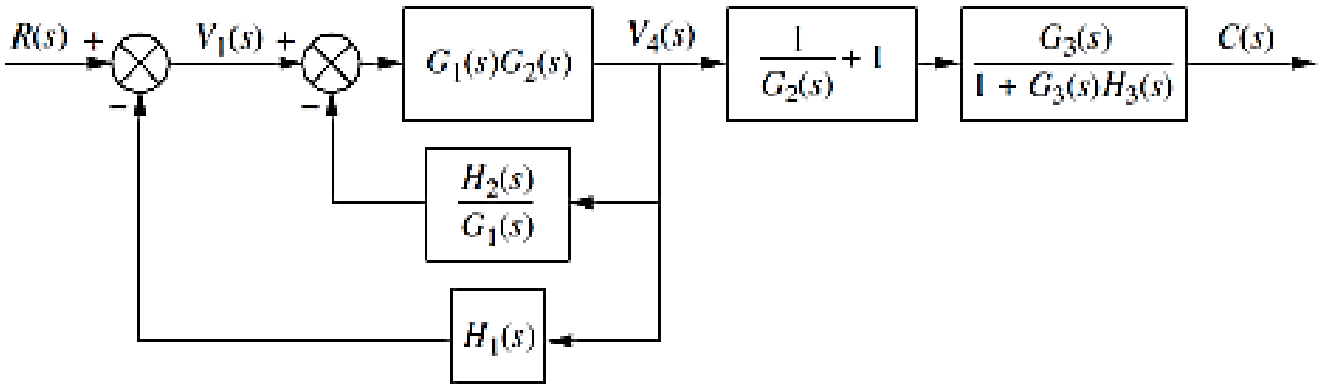
Παράδειγμα 6 (1)



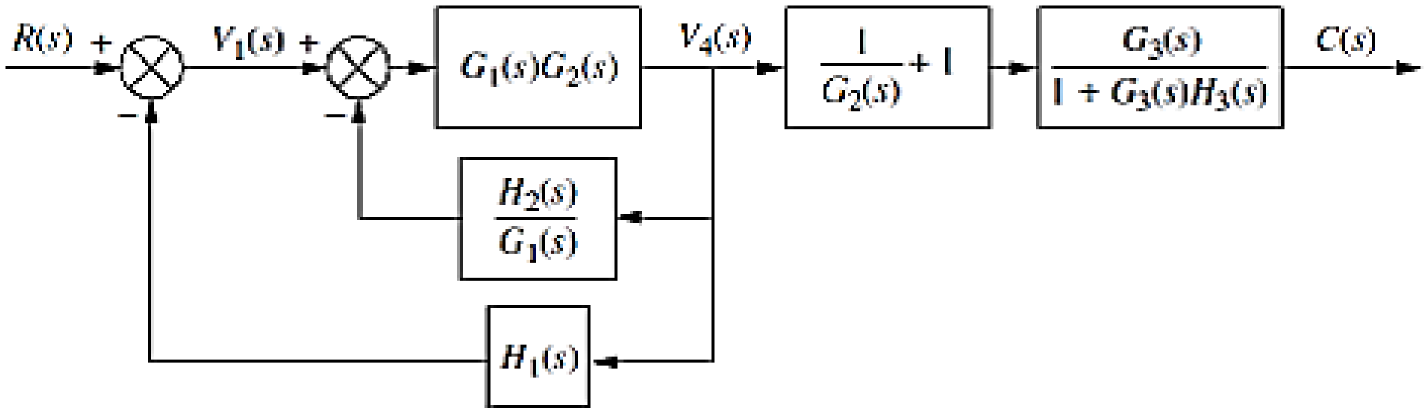


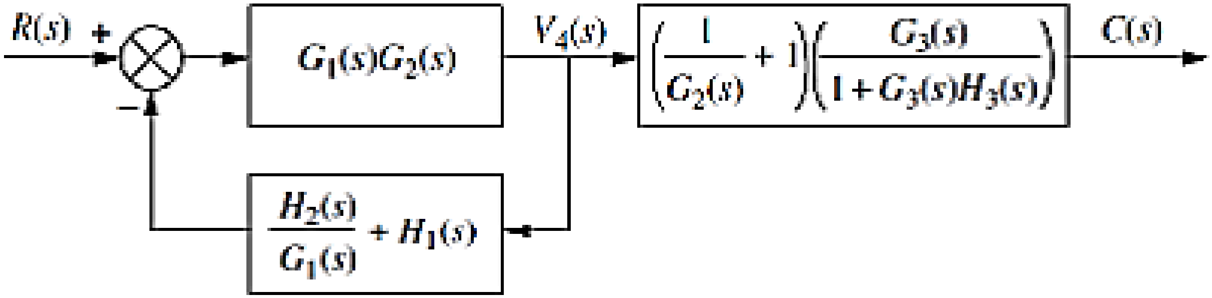
Παράδειγμα 6 (2)



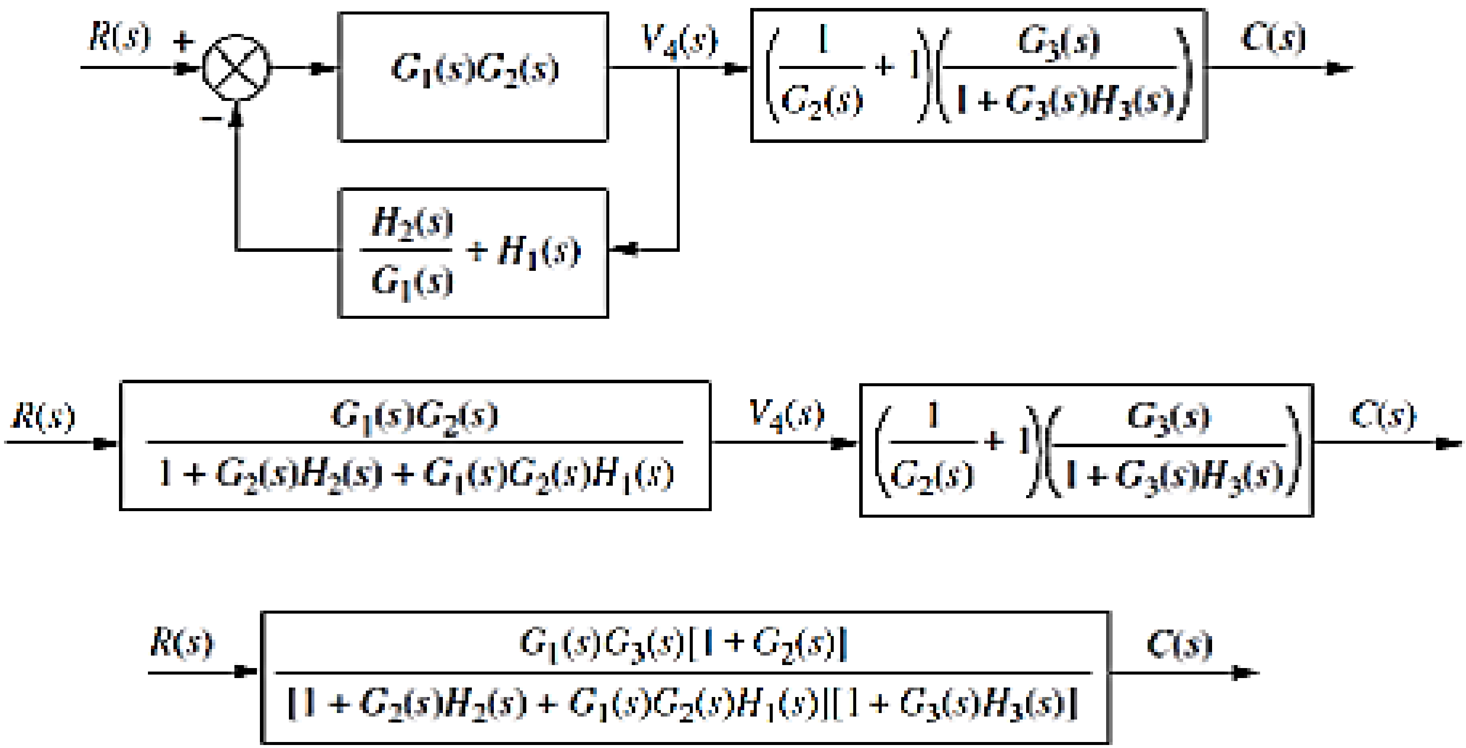


Παράδειγμα 6 (3)

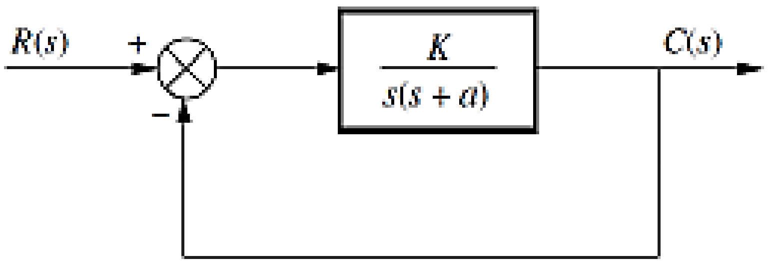




Παράδειγμα 6 (4)

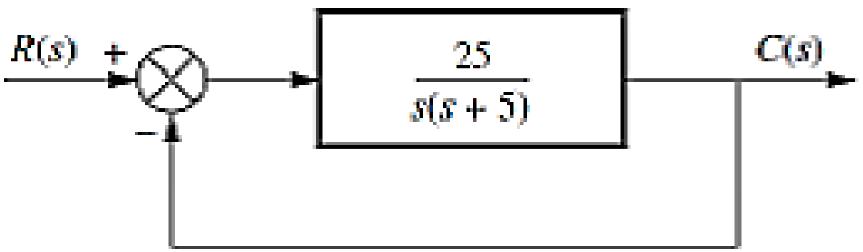


Παράδειγμα 7 (1)



$$G(s) = \frac{\dfrac{k}{s(s+5)}}{1+\dfrac{k}{s(s+5)}} = \frac{k}{s^2+5s+k}$$

Παράδειγμα 7 (2)



$$G(s) = \frac{\dfrac{25}{s(s+5)}}{1 + \dfrac{25}{s(s+5)}} = \frac{25}{s^2 + 5s + 25}$$

$$\omega_n = \sqrt{25} = 5$$

$$2\zeta\omega_n = 5 \Rightarrow \zeta = 0{,}5$$

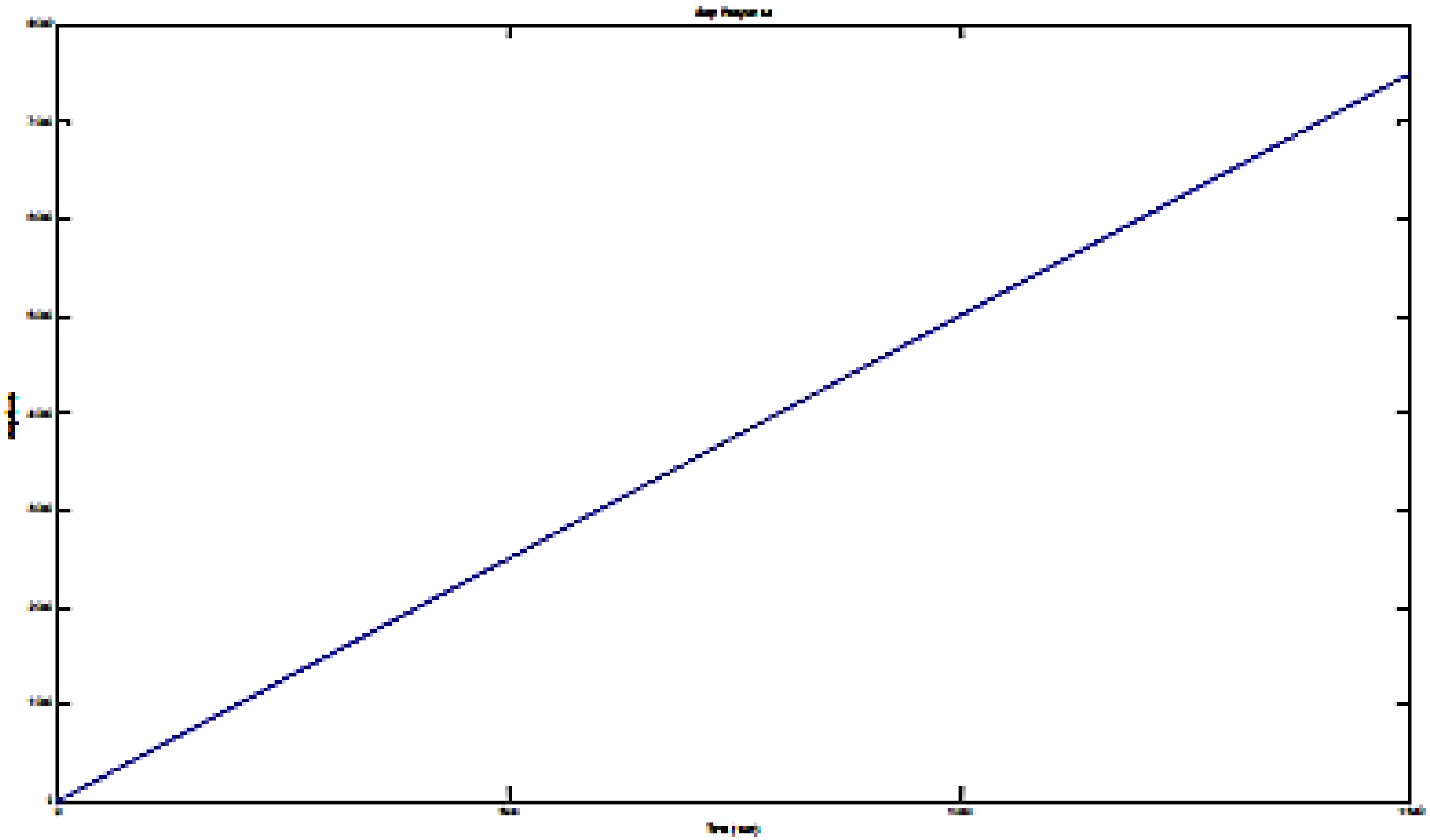
Παράδειγμα 7 (3)

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0{,}726\; second$$

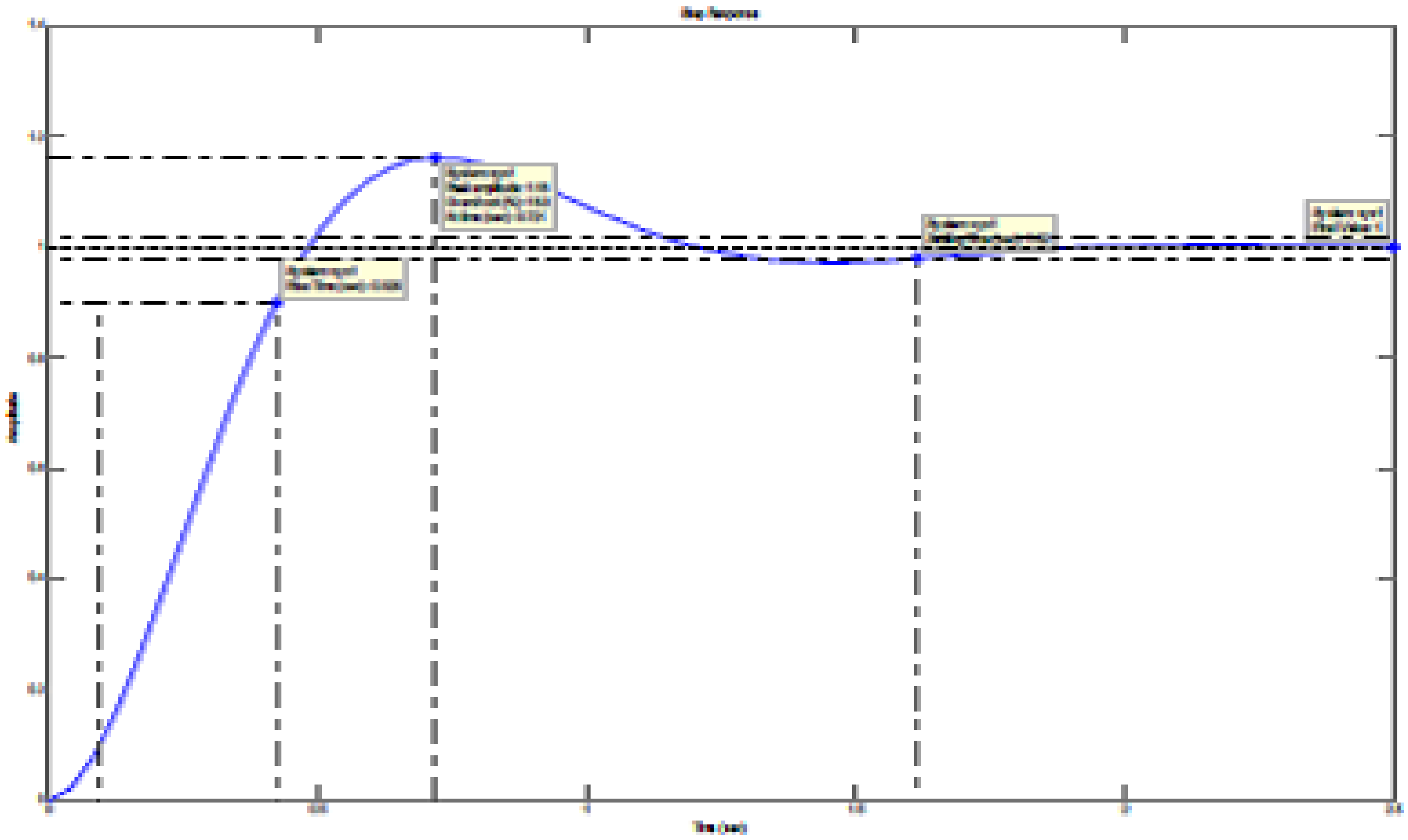
$$\%OS = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100 = 16{,}303$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 1.6\; seconds$$

Πριν από ανάδραση εξόδου

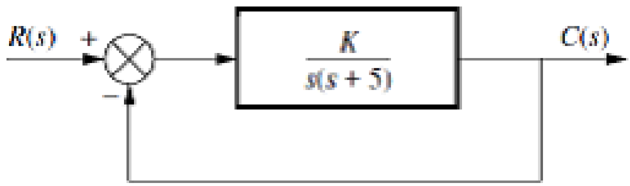


Μετά από ανάδραση εξόδου



Παράδειγμα 7 (4)

Αν θέλω overshoot %OS=10% ;



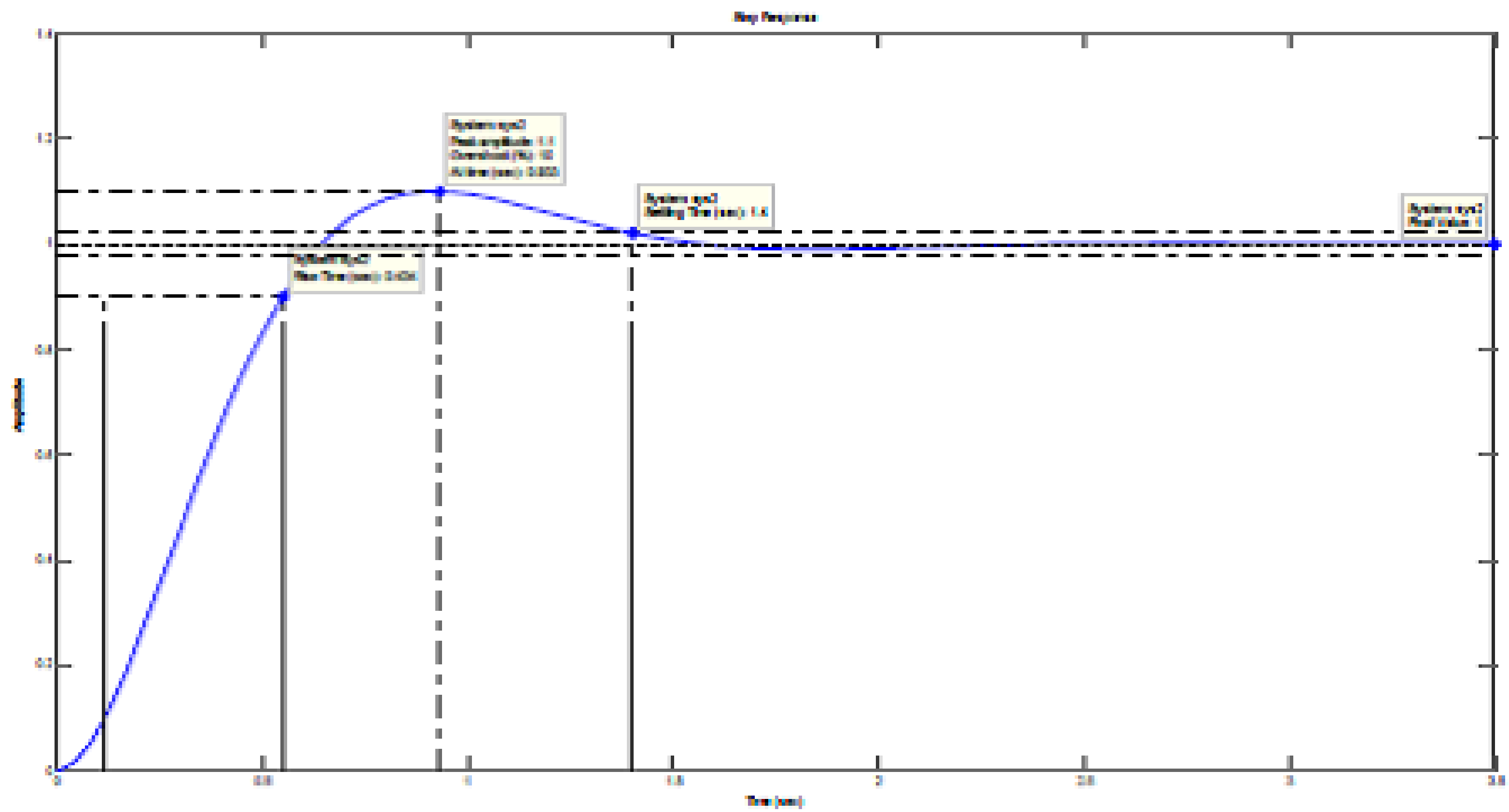
$$T(s) = \frac{K}{s^2 + 5s + K}$$

$$2\zeta\omega_n = 5$$

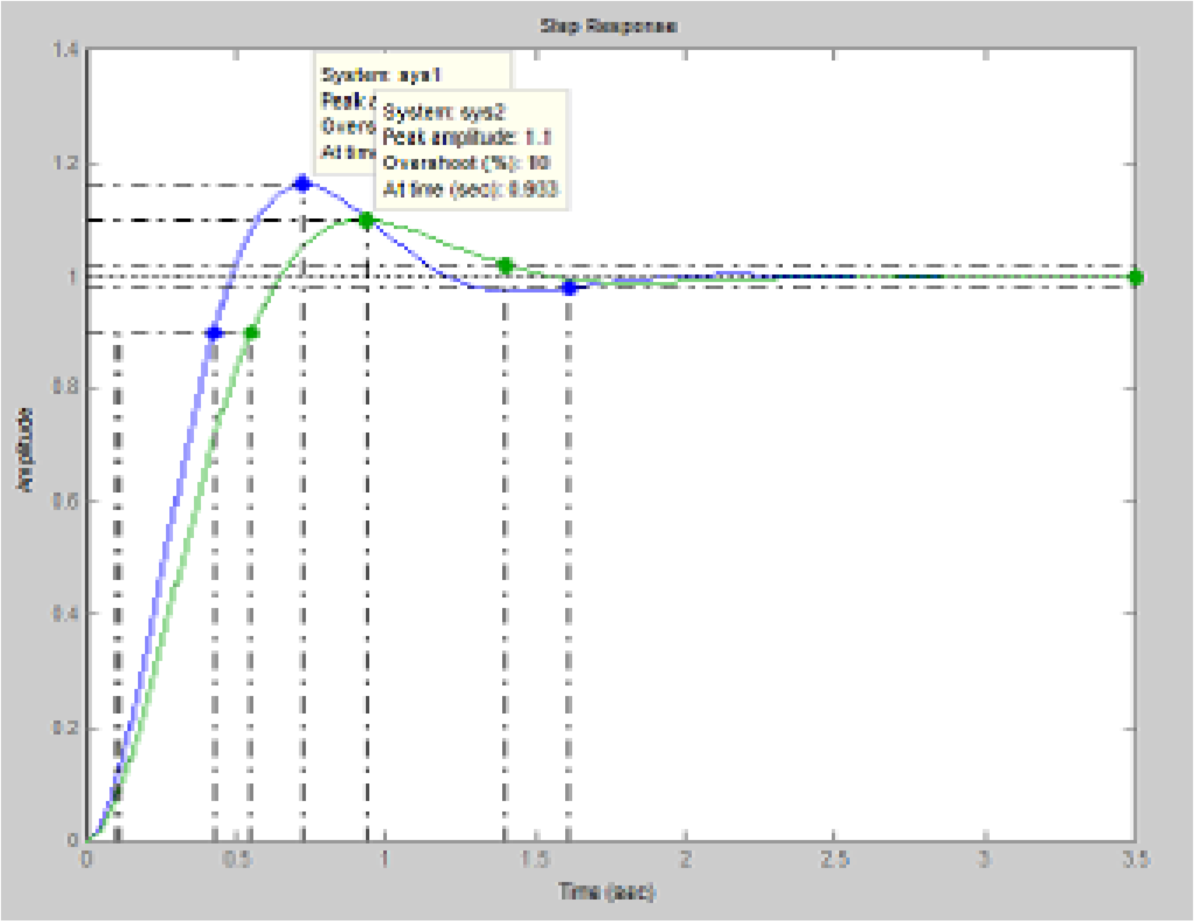
$$\omega_n = \sqrt{K} \Rightarrow \zeta = \frac{5}{2\sqrt{K}}, K = 17.9$$

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + ln^2(\%OS/100)}} \xrightarrow{\%OS=10\%} \zeta = 0.591$$

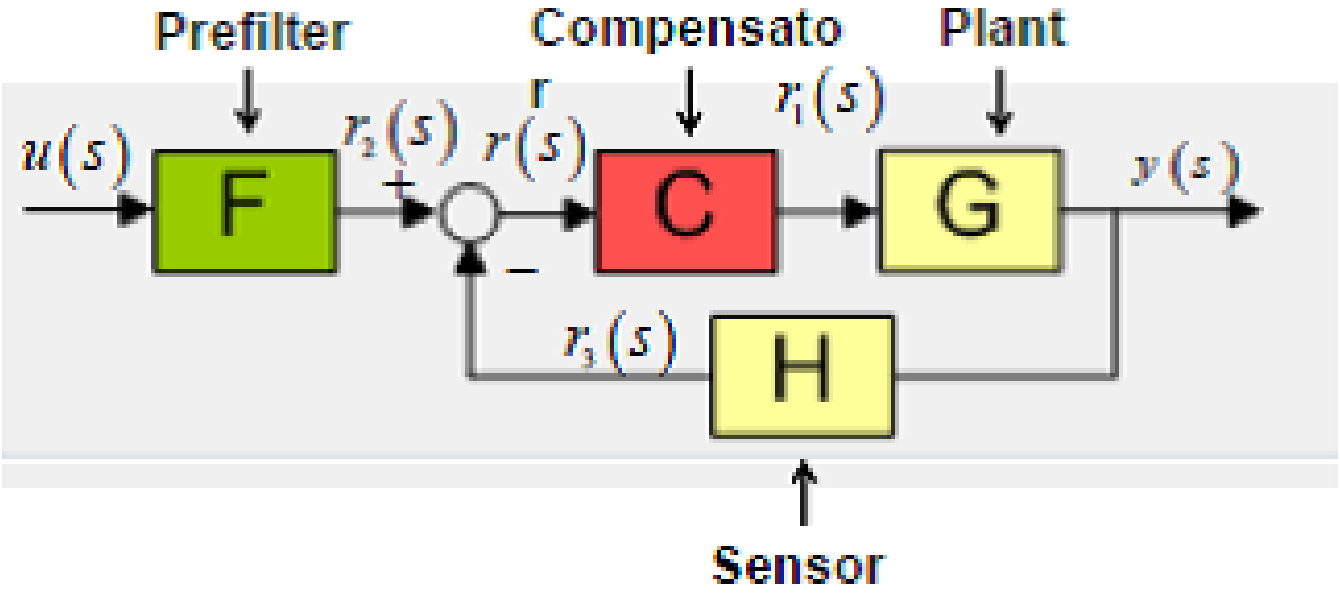
Παράδειγμα 7 (5)



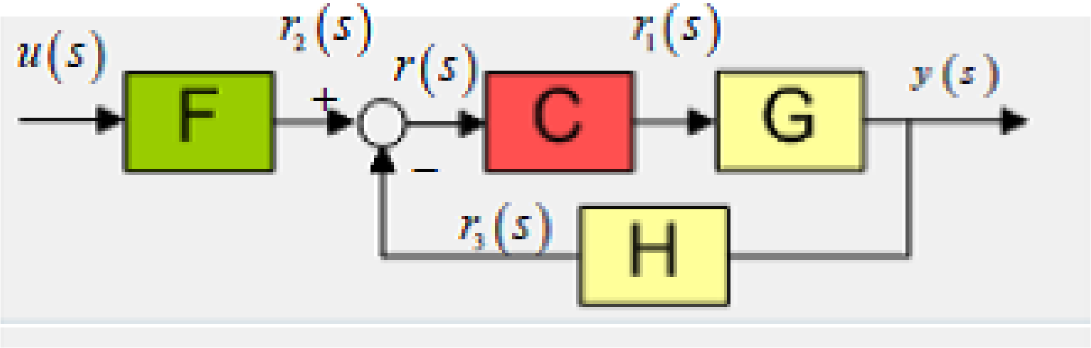
Παράδειγμα 7 (6)



Παράδειγμα 8 (1)

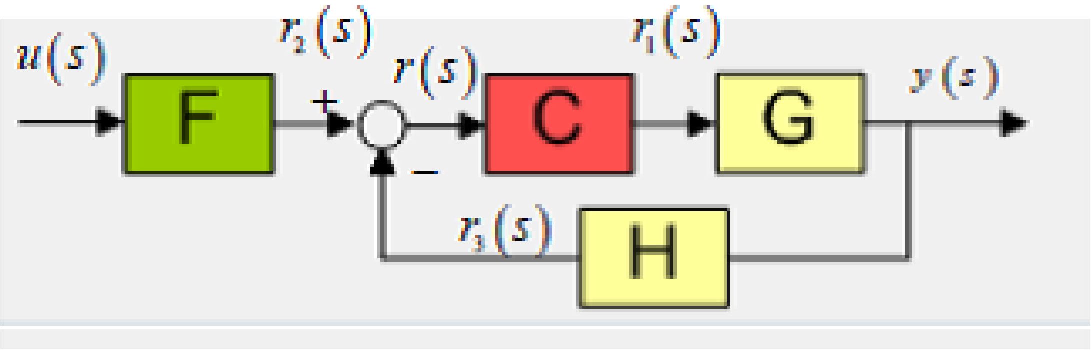


Παράδειγμα 8 (2)



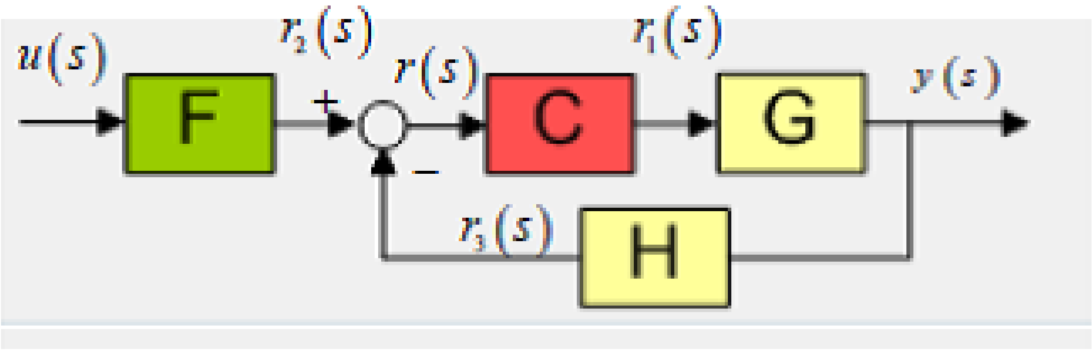
$$y(s) = G(s)r_1(s) = G(s)\big(C(s)r(s)\big)$$
$$= G(s)C(s)(r_2(s) - r_3(s))$$
$$= G(s)C(s)\big(F(s)u(s) - H(s)y(s)\big) \Leftrightarrow$$
$$\big(1 + G(s)C(s)H(s)\big)y(s) = G(s)C(s)F(s)u(s) \Leftrightarrow$$
$$y(s) = \left[\frac{G(s)C(s)F(s)}{1 + G(s)C(s)H(s)}\right]u(s)$$

Παράδειγμα 8 (3)



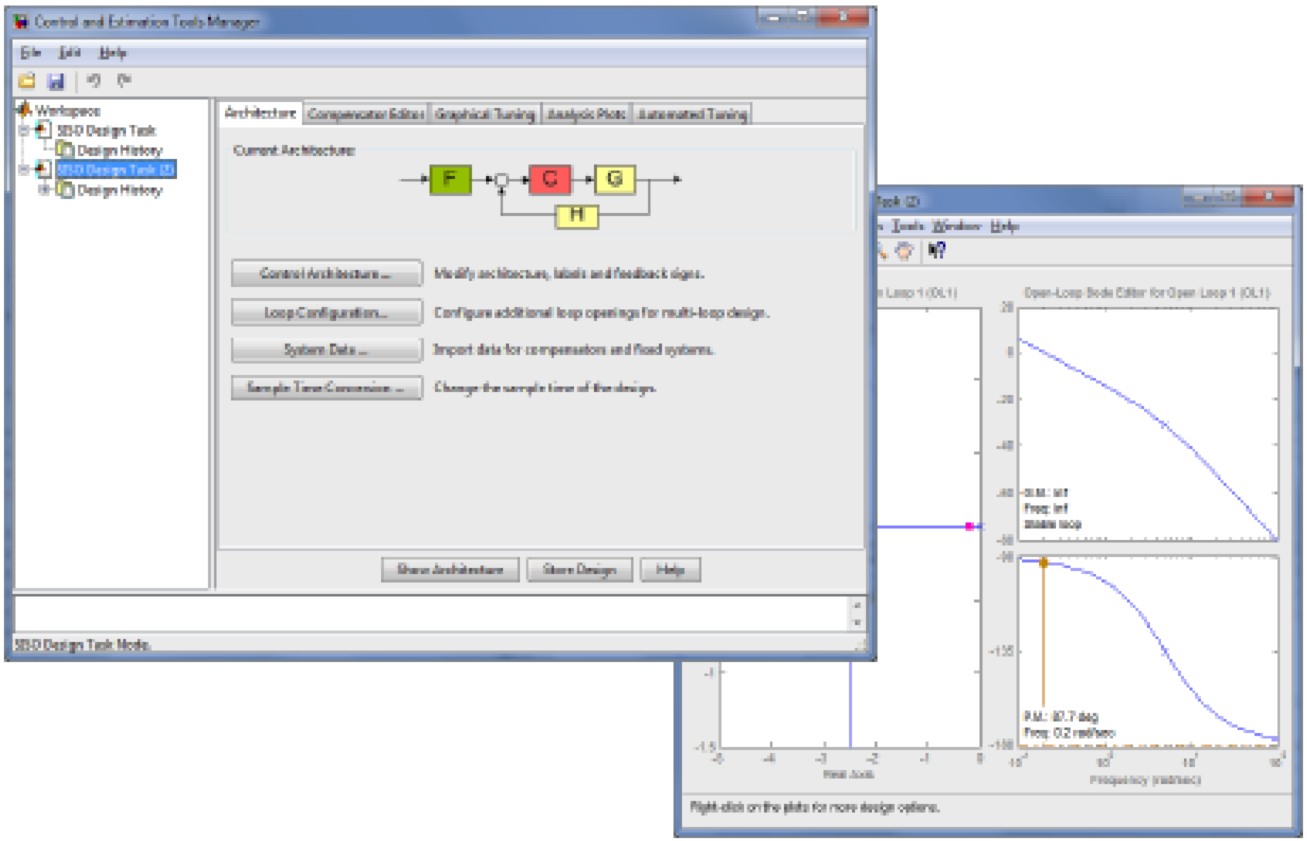
$$
\begin{aligned}
r(s) = r_2(s) - r_3(s) &= F(s)u(s) - H(s)y(s) \\
&= F(s)u(s) - H(s)G(s)r_1(s) = \\
&= F(s)u(s) - H(s)G(s)C(s)r(s) \Leftrightarrow \\
\big(1 + H(s)G(s)C(s)\big)r(s) &= F(s)u(s) \Leftrightarrow \\
r(s) &= \left[\frac{F(s)}{1 + H(s)G(s)C(s)}\right]u(s)
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 8 (4)

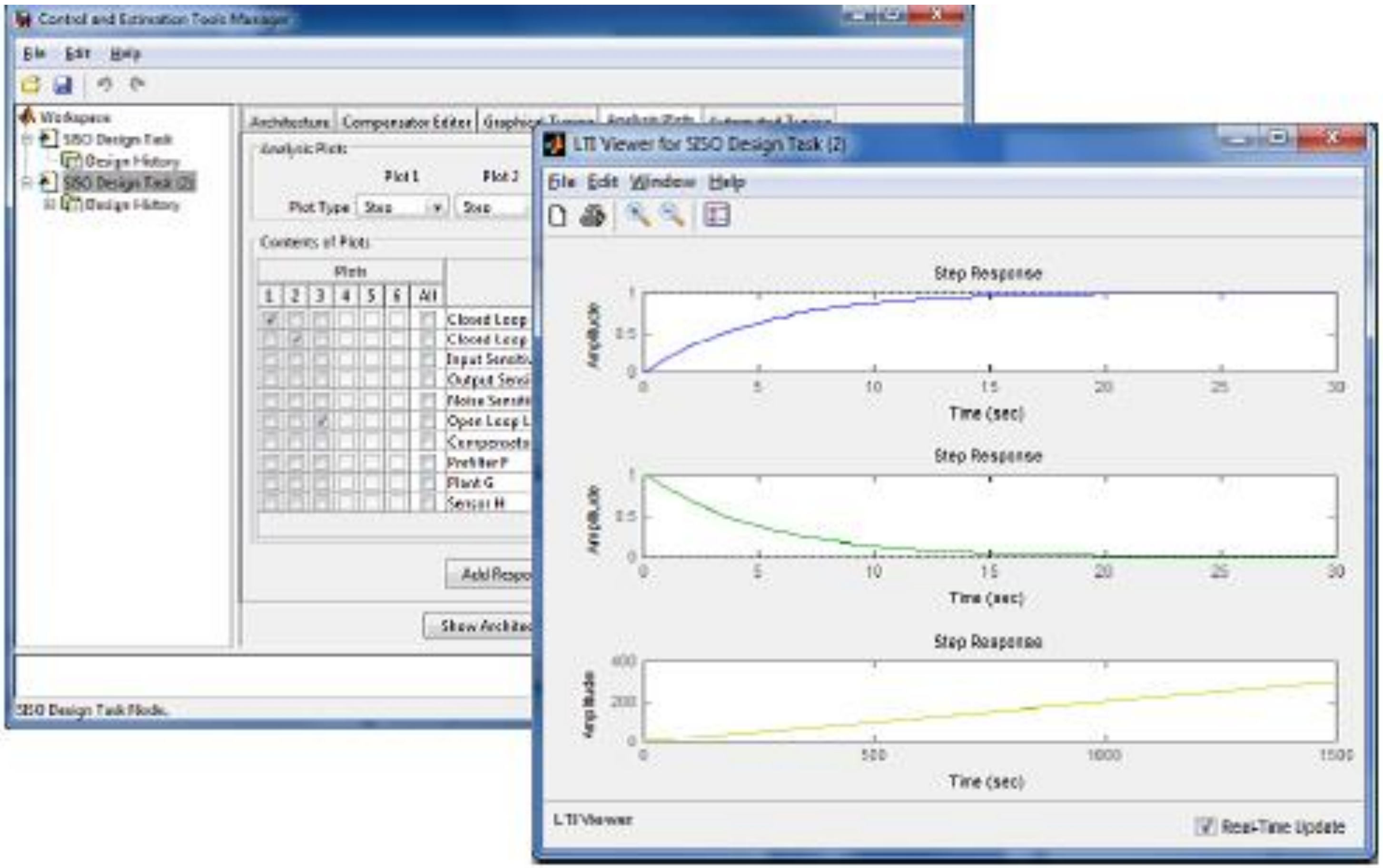


Sisotool
>>sys=zpk([],[0,-5],1)
Zero/pole/gain:
1/s(s+5)
>>sisotools

Παράδειγμα 8 (5)

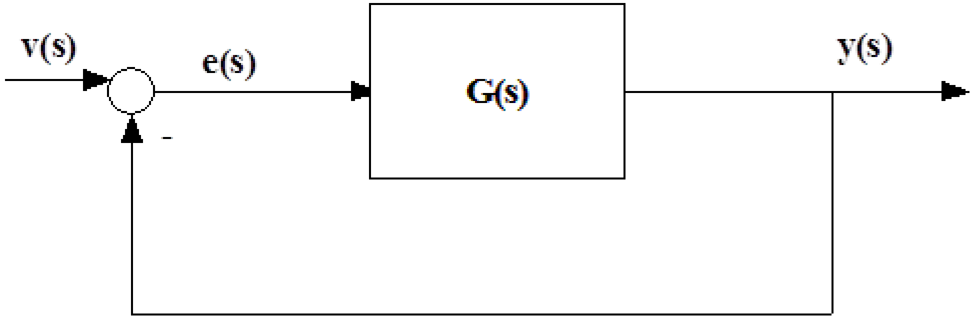


Παράδειγμα 8 (6)



Σταθερά σφάλματος θέσης K_p (1)

Μέτρο σφάλματος στη μόνιμη κατάσταση ισορροπίας, μεταξύ της εισόδου και της εξόδου, όταν η είσοδος του συστήματος μοναδιαίας ανάδρασης τύπου l διεγείρεται από την μοναδιαία βηματική συνάρτηση.



$$G(s) = \frac{KB_1(s)}{s^l B_2(s)}$$

$$e(s) = v(s) - y(s) = v(s) - G(s)e(s) \Rightarrow$$

Σταθερά σφάλματος θέσης K_p (2)

$$\left(I+G(s)\right)e(s)=v(s)\Rightarrow e(s)=\left(I+G(s)\right)^{-1}v(s)\Rightarrow$$

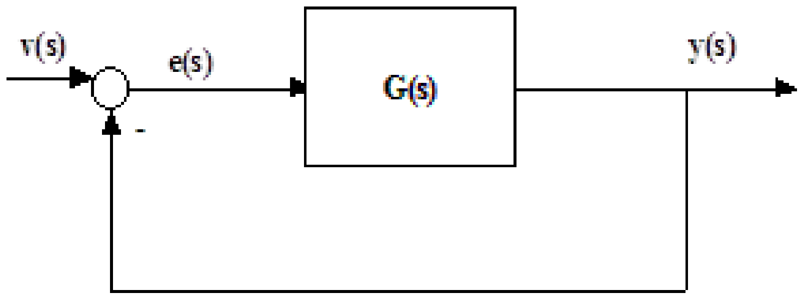
$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} s\left(I+G(s)\right)^{-1}v(s)$$

$$K_p=\lim_{s\to 0} G(s)=\begin{cases}\dfrac{KB_1(0)}{B_2(0)} & l=0\\ \infty & l>0\end{cases}$$

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty} e(t)=\frac{1}{1+K_p}=\begin{cases}\dfrac{B_2(0)}{B_2(0)+KB_1(0)} & l=0\\ 0 & l>0\end{cases}$$

Σταθερά σφάλματος ταχύτητας K_u (1)

Μέτρο σφάλματος στη μόνιμη κατάσταση ισορροπίας, μεταξύ της εισόδου και της εξόδου, όταν η είσοδος του συστήματος μοναδιαίας ανάδρασης τύπου l διεγείρεται από την μοναδιαία συνάρτηση κλίσης.



$$G(s) = \frac{KB_1(s)}{s^l B_2(s)}$$

Σταθερά σφάλματος ταχύτητας K_u (2)

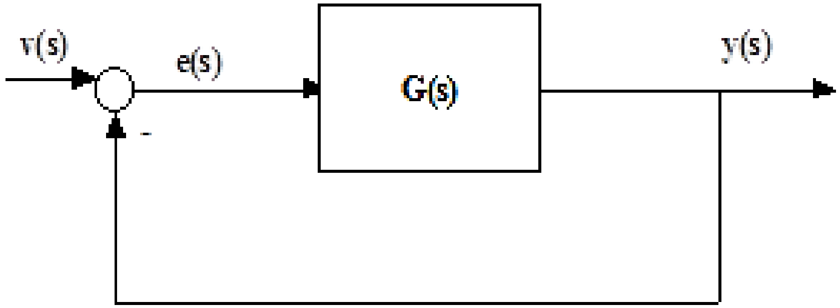
$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\big(I + G(s)\big)^{-1} v(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sG(s)}$$

$$K_u = \lim_{s\to 0} sG(s) = \begin{cases} 0 & l = 0 \\ \dfrac{KB_1(0)}{B_2(0)} & l = 1 \\ \infty & l > 1 \end{cases}$$

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{K_u} = \begin{cases} \infty & l = 0 \\ \dfrac{B_2(0)}{KB_1(0)} & l = 1 \\ 0 & l > 1 \end{cases}$$

Σταθερά σφάλματος επιτάχυνσης K_α (1)

Μέτρο σφάλματος στη μόνιμη κατάσταση ισορροπίας, μεταξύ της εισόδου και της εξόδου, όταν η είσοδος του συστήματος μοναδιαίας ανάδρασης τύπου l διεγείρεται από την μοναδιαία συνάρτηση παραβολής $u = t^2/2$.



$$G(s) = \frac{KB_1(s)}{s^l B_2(s)}$$

Σταθερά σφάλματος επιτάχυνσης K_α (2)

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = \begin{cases} 0 & l = 0,1 \\ \dfrac{KB_1(0)}{B_2(0)} & l = 2 \\ \infty & l > 2 \end{cases}$$

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\big(I + G(s)\big)^{-1} v(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 G(s)}$$

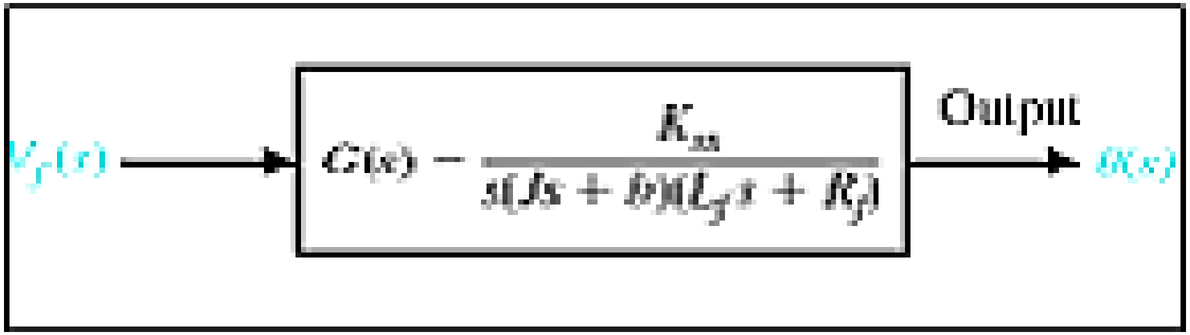
$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{K_a} = \begin{cases} \infty & l = 0,1 \\ \dfrac{B_2(0)}{KB_1(0)} & l = 2 \\ 0 & l > 2 \end{cases}$$

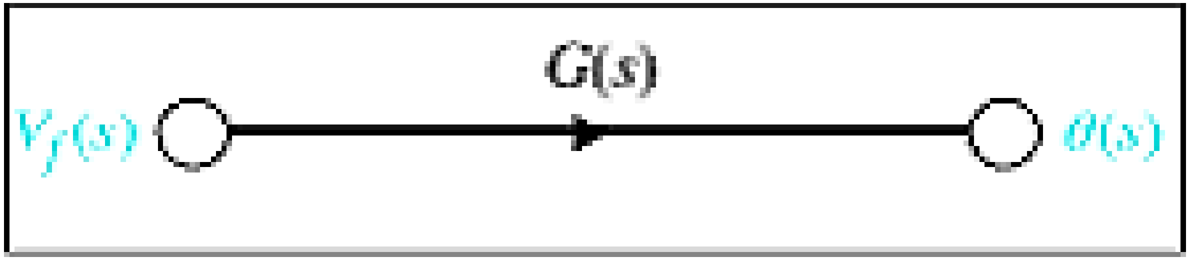
Κανόνας του Mason (1)

Συσχέτιση του λειτουργικού διαγράμματος (block diagram) με το διάγραμμα ροής σήματος (signal flow graph)

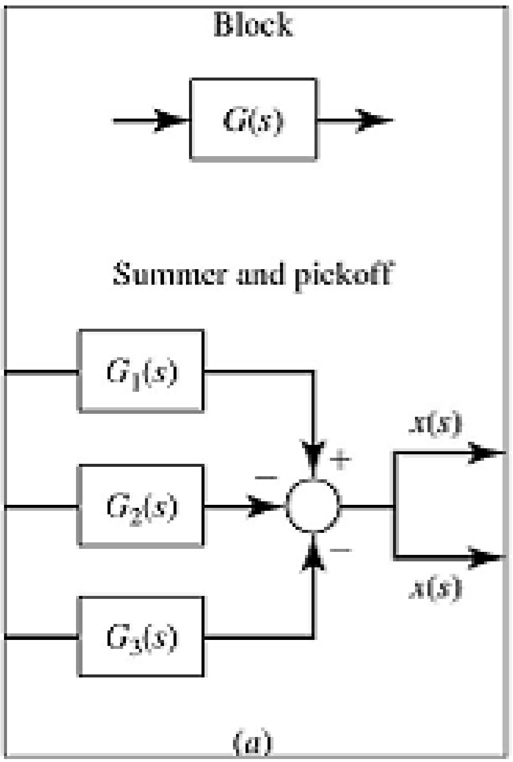
Διάγραμμα ροής σήματος		**Λειτουργικό διάγραμμα**
Κόμβος εισόδου	$\longleftrightarrow$	Σήμα εισόδου
Κόμβος εξόδου	$\longleftrightarrow$	Σήμα εξόδου
Κλάδος	$\longleftrightarrow$	Block
Κόμβος	$\longleftrightarrow$	Σήμα

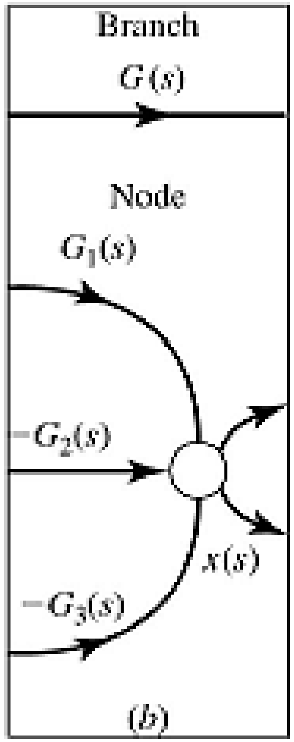
Κανόνας του Mason (2)



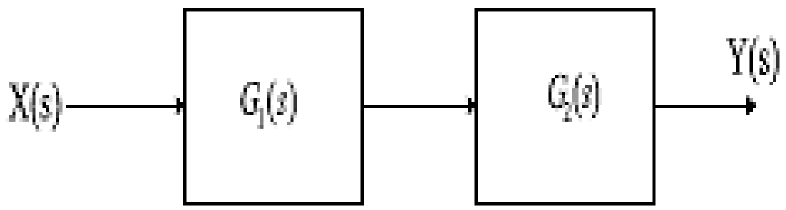


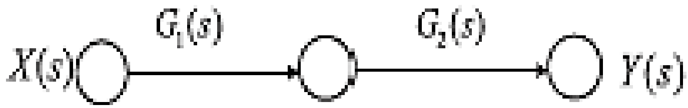
Κανόνας του Mason (3)



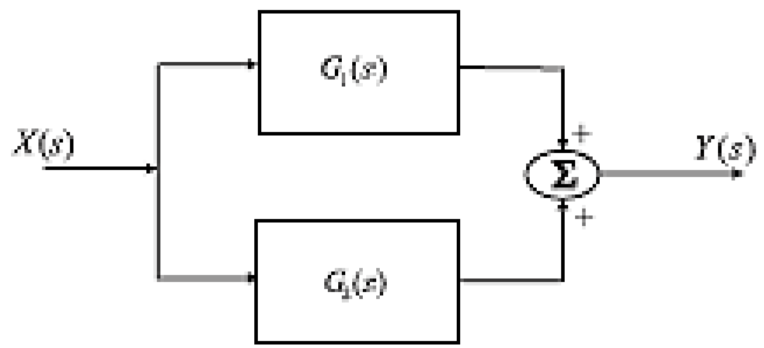


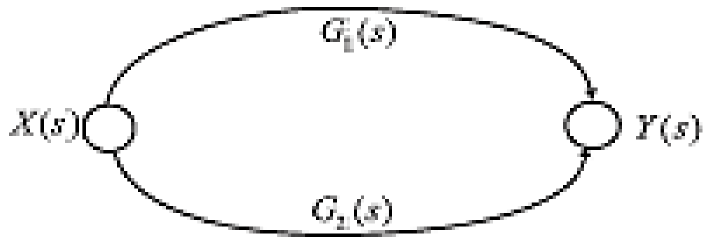
Διάγραμμα Ροής Σήματος
Συστήματα σε σειρά





Διάγραμμα Ροής Σήματος
Παράλληλα Συστήματα





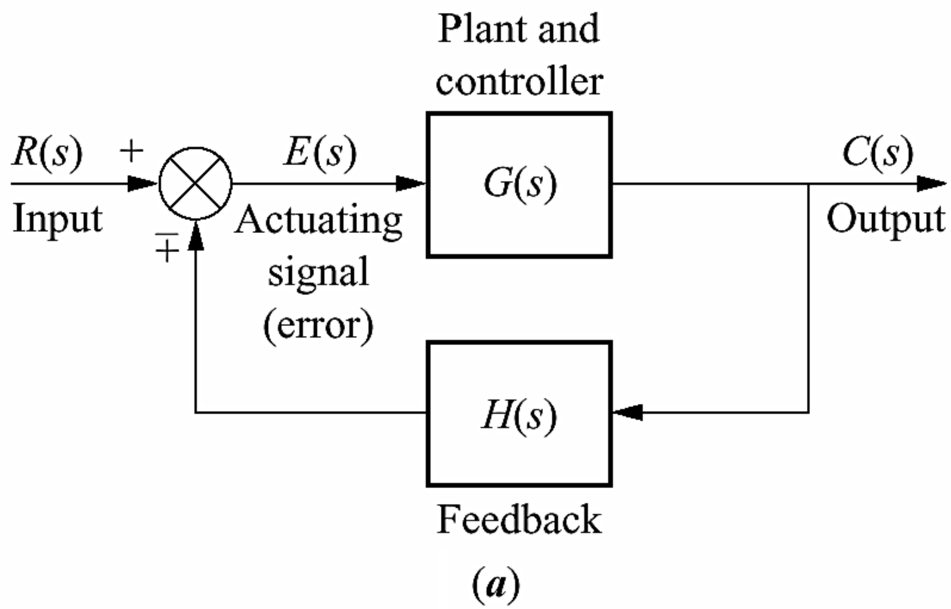
Κανόνας του Mason (4)

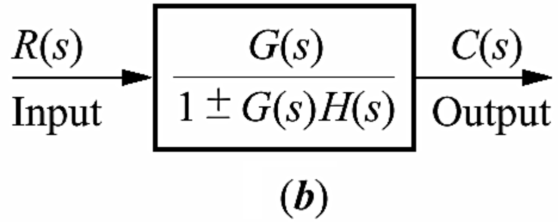
Συσχέτιση του λειτουργικού διαγράμματος (block diagram) με το διάγραμμα ροής σήματος (signal flow graph)

Σύστημα με ανάδραση

Συνάρτηση μεταφοράς	$\leftrightarrow$	$G_1(s) = \dfrac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$

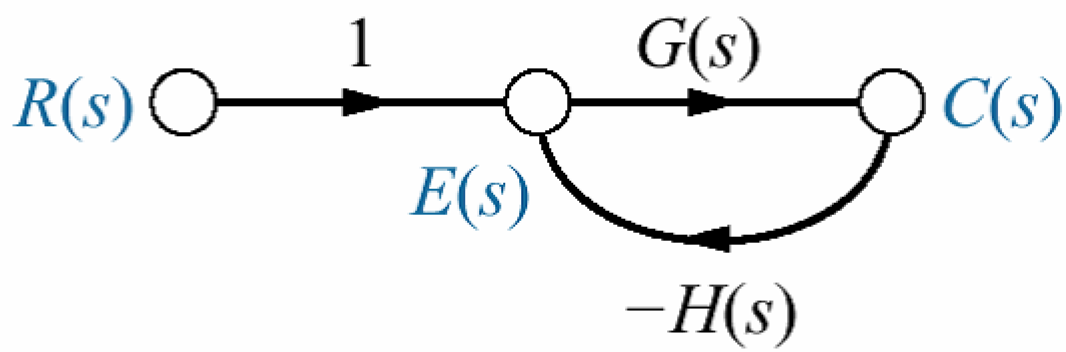
Λειτουργικό διάγραμμα



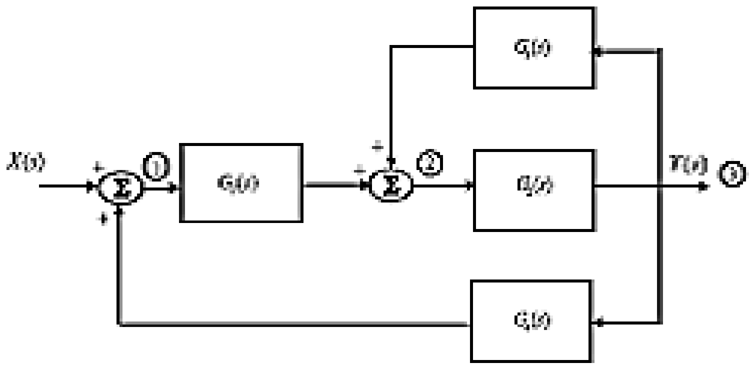


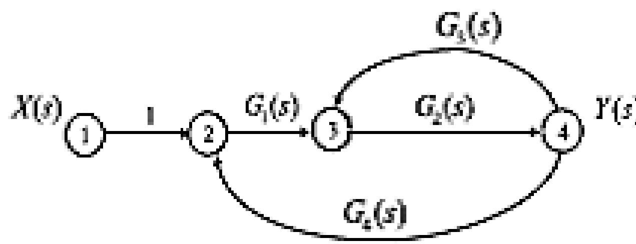
Διάγραμμα Ροής Σήματος
Συστήματα με ανάδραση

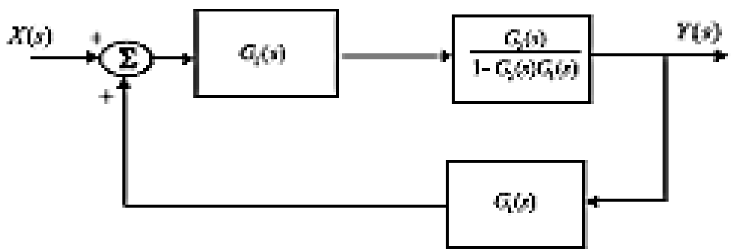
Διάγραμμα ροής σήματος (το σήμα ανάδρασης θεωρείται ότι αφαιρείται)

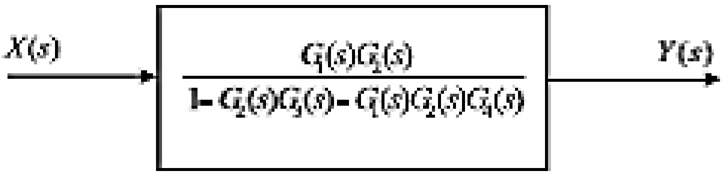


Γράφημα Ροής



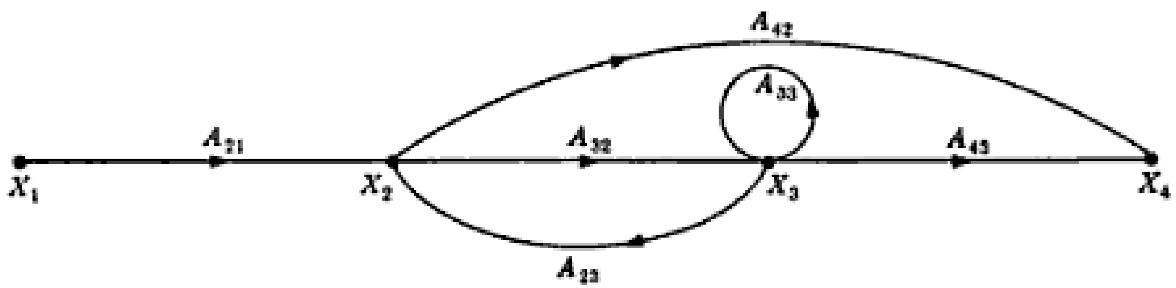






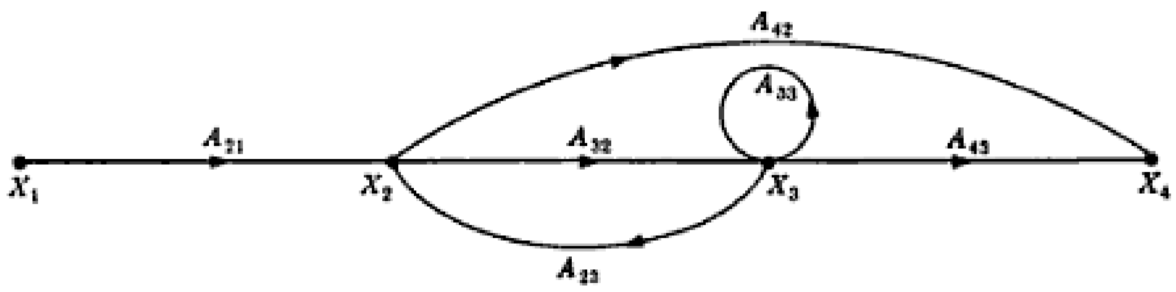
$$\frac{G_1(s)G_2(s)}{1-G_2(s)G_3(s)-G_1(s)G_2(s)G_4(s)}$$

Κανόνας του Mason (5)



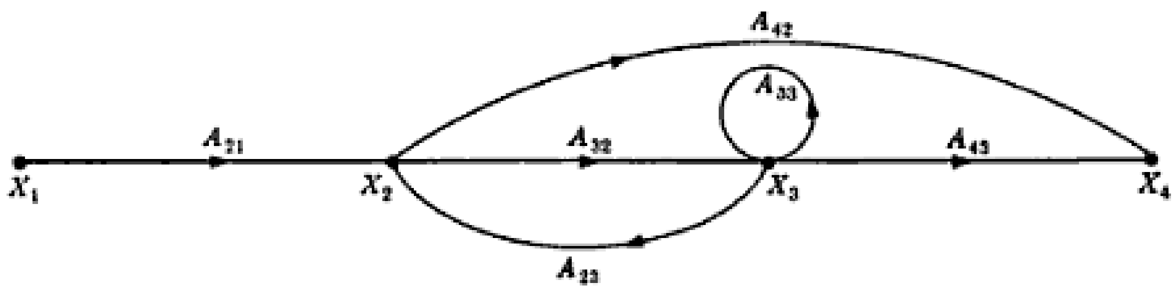
- **Κόμβος εισόδου (input node):** ο κόμβος που έχει μόνο εξερχόμενους κλάδους από αυτόν.
- **Κόμβος εξόδου (output node):** ο κόμβος που έχει μόνο εισερχόμενους σε αυτόν, κλάδους.
- **Διαδρομή (path):** είναι μια διαδοχή κλάδων (ή τουλάχιστον ένας), που διαρρέονται από το σήμα που κυκλοφορεί μεταξύ δύο κόμβων.

Κανόνας του Mason (6)



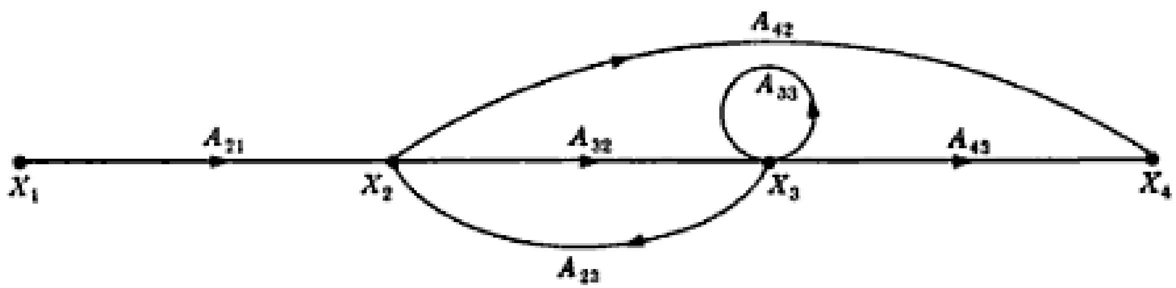
- **Βρόχος (loop):** είναι μια κλειστή διαδρομή η οποία αναχωρεί από έναν κόμβο και καταλήγει στον ίδιο, διερχόμενη από τους υπόλοιπους κόμβους το πολύ μια φορά.
- **Βρόχοι μη γειτονικοί ή ξένοι μεταξύ τους (non touching loops):** Δυο βρόχοι που δεν έχουν κανένα κοινό κόμβο.
- **Βρόχοι γειτονικοί μεταξύ τους (touching loops):** Δύο βρόχοι που έχουν τουλάχιστον έναν κοινό κόμβο.

Κανόνας του Mason (7)



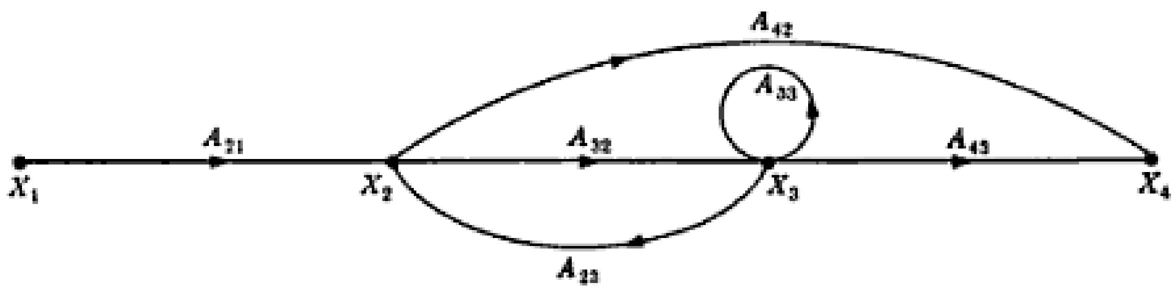
- **Κέρδος (gain)** ενός κλάδου είναι η συνάρτηση μεταφοράς του κλάδου αυτού.
- **Κέρδος διαδρομής (path gain):** είναι το γινόμενο των κερδών που αντιστοιχούν στους κλάδους που συναντούμε διατρέχοντας μια διαδρομή.

Κανόνας του Mason (8)



- **Διαδρομή ορθής ροής (forward path):** η διαδρομή από τον κόμβο εισόδου προς τον κόμβο εξόδου, στην οποία κάθε κόμβος περιλαμβάνεται το πολύ μια φορά.
- **Κέρδος μιας διαδρομής ορθής ροής (forward path gain):** είναι το γινόμενο των κερδών, των κλάδων, από τους οποίους αποτελείται μια τέτοια διαδρομή.

Κανόνας του Mason (9)



- **Κέρδος βρόχου (loop gain):** είναι το γινόμενο των κερδών των κλάδων του βρόχου.
- **Κέρδος βρόχων ξένων μεταξύ τους (nontouching loop gain):** είναι το γινόμενο των κερδών, των αντίστοιχων-ξένων μεταξύ τους-βρόχων.

Κανόνας του Mason (Mason' Rule) (1)

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_k T_k \Delta_k}{\Delta}$$

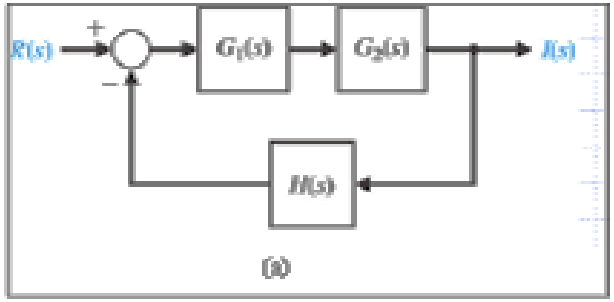
- k =ο αριθμός των διαδρομών ορθής ροής (forward paths)
- T_k =το κέρδος της k-ιοστής διαδρομής ορθής ροής (forward path gain).
- $\Delta = 1 - \Sigma$(κερδών όλων των βρόχων)+Σ(γινομένων των κερδών βρόχων, που αντιστοιχούν σε ζεύγη ξένων μεταξύ τους βρόχων)−Σ(γινομένων των κερδών βρόχων που αντιστοιχούν σε τριάδες, ξένων μεταξύ τους βρόχων).

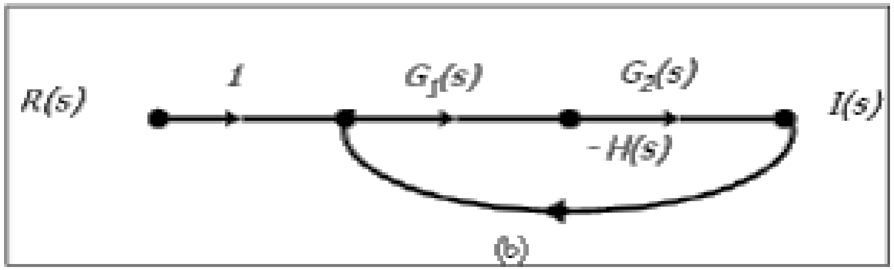
Κανόνας του Mason (Mason’ Rule) (2)

- $\Delta_k = \Delta -$(άθροισμα των όρων, που περιλαμβάνουν κέρδη βρόχων (loop gains) , οι οποίοι (βρόχοι), άπτονται της k-οστης διαδρομής ορθής ροής (forward path).
- Δηλαδή η Δ_k προκύπτει από τη Δ, αν μηδενίσουμε τα κέρδη εκείνων των βρόχων, οι οποίοι άπτονται των διαδρομών ορθής ροής.

Παράδειγμα 9 (1)

- <u>Υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς</u> <u>για σύστημα με βρόχο ανάδρασης</u>





Παράδειγμα 9 (2)

<u>Ο τύπος του Mason είναι:</u>

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_k T_k \Delta_k}{\Delta}$$

Μια διαδρομή ορθής ροής $P1$: $k = 1$

Κέρδος διαδρομής: $T_1 = G_1(s)G_2(s)$

Μόνο ένας βρόχος, άρα κέρδος βρόχου:

$$L_1 = -G_1(s)G_2(s)H(s)$$

Ορίζουσα του συστήματος:

$$\Delta = 1 - L_1 = 1 + G_1(s)G_2(s)H(s)$$

Παράδειγμα 9 (3)

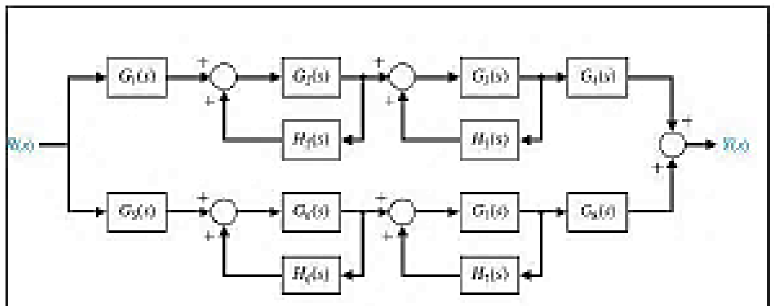
Είναι: $\Delta_1 = 1$

Άρα:

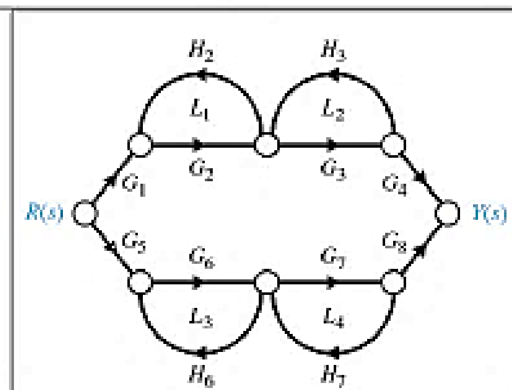
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{T_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{[1 + G_1(s)G_2(s)H(s)]}$$

Παράδειγμα 10 (1)

<u>Υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς για σύστημα που διέπεται από εσωτερικές αλληλεπιδράσεις, δύο διαδρομών.</u>



(b)



Παράδειγμα 10 (2)

Αριθμός διαδρομών ορθής ροής $k = 2$.

Κέρδη διαδρομών ορθής ροής:

$$T_1 = G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)$$
$$T_2 = G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)$$

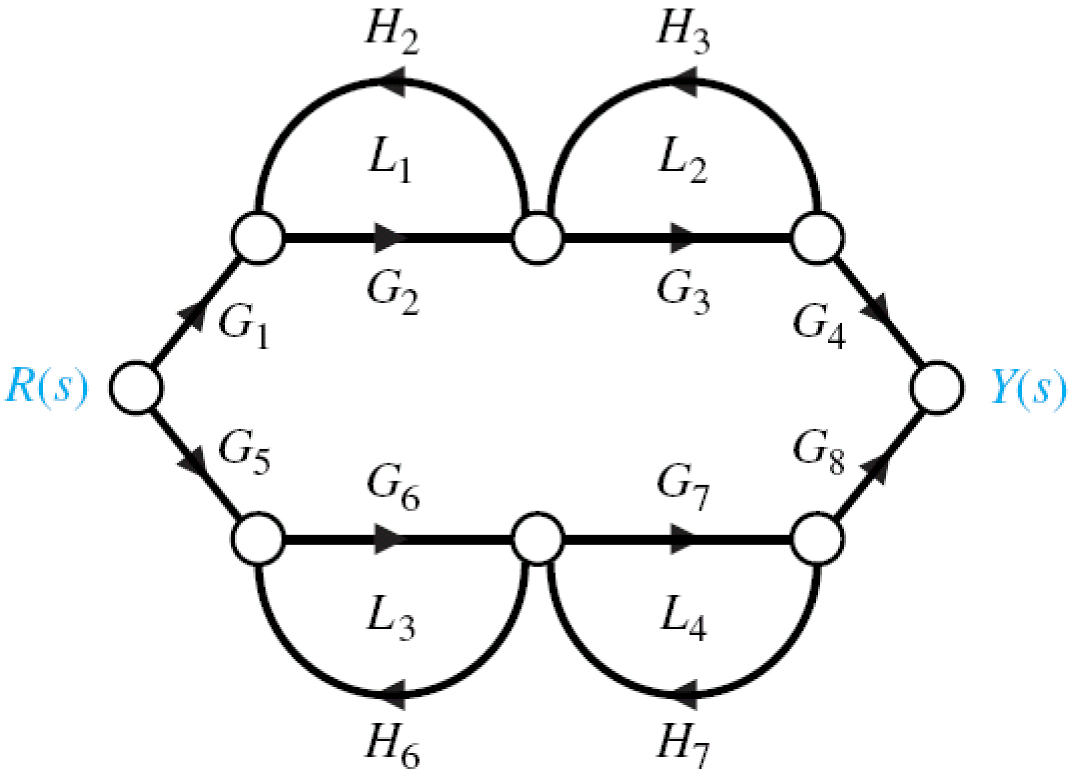
4 βρόχοι ανάδρασης:

Κέρδη βρόχων: $L_1 = G_2(s)H_2(s), L_2 = G_3(s)H_3(s),$

$$L_3 = G_6(s)H_6(s), L_4 = G_7(s)H_7(s).$$

Βρόχοι ξένοι μεταξύ τους: $L_1, L_2 \; και \; L_3, L_4$.

Παράδειγμα 10 (3)



Παράδειγμα 10 (4)

Κέρδη ζευγών, βρόχων ξένων μεταξύ τους	**Βρόχοι (1) και (3):** L_1L_3	$L_1L_3 = G_2(s)H_2(s)G_6(s)H_6(s)$
	Βρόχοι (1) και (4): L_1L_4	$L_1L_4 = G_2(s)H_2(s)G_7(s)H_7(s)$
	Βρόχοι (2) και (3): L_2L_3	$L_2L_3 = G_3(s)H_3(s)G_6(s)H_6(s)$
	Βρόχοι (2) και (4): L_2L_4	$L_2L_4 = G_3(s)H_3(s)G_7(s)H_7(s)$

Παράδειγμα 10 (5)

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_3 + L_2 L_4)$$

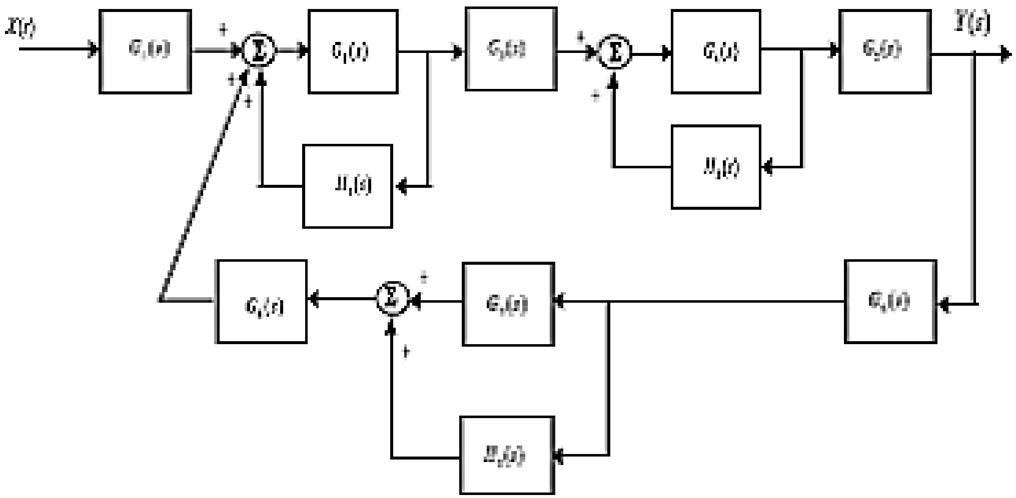
$$\Delta_1 = 1 - (L_3 + L_4)$$

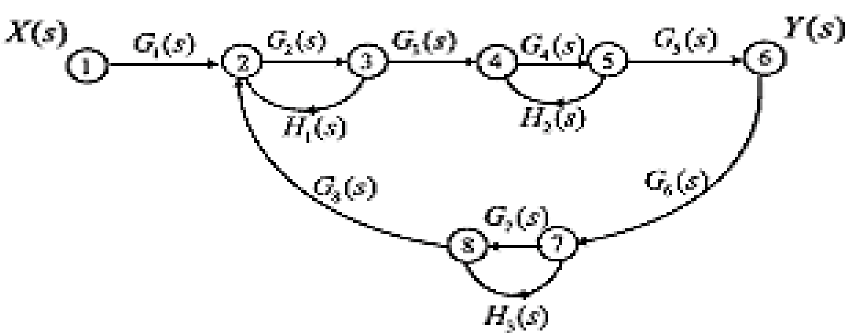
$$\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{T_1 \Delta_1 + T_2 \Delta_2}{\Delta}$$

$$= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)(1 - L_3 - L_4) + G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)(1 - L_1 - L_2)}{[1 + G_1(s)G_2(s)H(s)]}$$

Παράδειγμα 11 (1)





Παράδειγμα 11 (2)

Κέρδος διαδρομής προς τα εμπρός.

$$G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)$$

Τα κέρδη των βρόχων είναι

$$G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)$$

$$G_7(s)H_3(s)$$

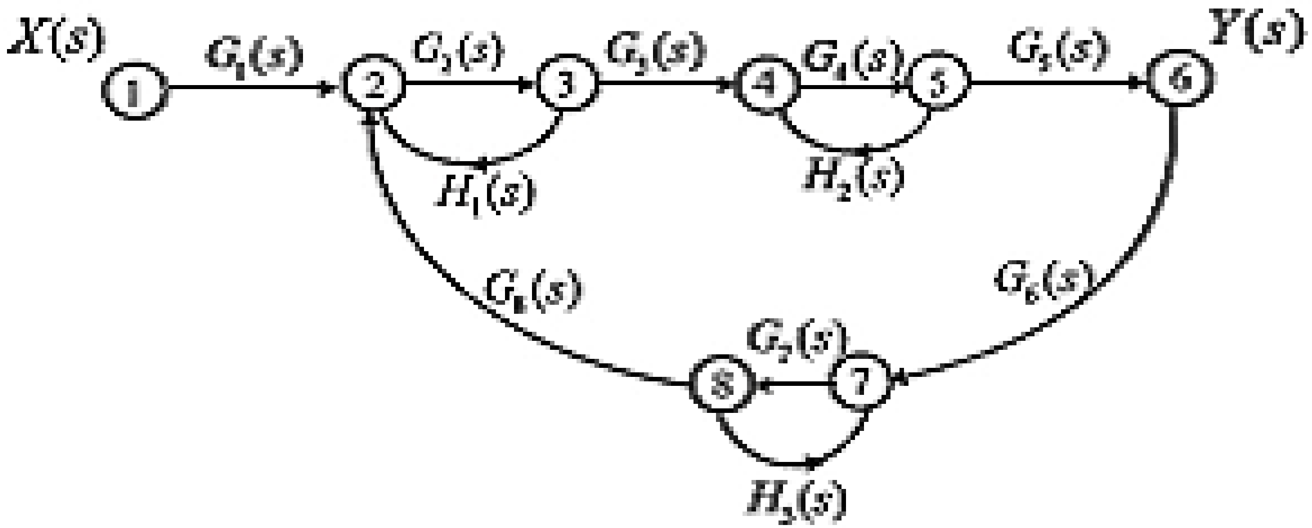
$$G_4(s)H_2(s)$$

$$G_2(s)H_1(s)$$

Συνδυασμοί ανά δύο: βρόχοι 2 και 3, βρόχοι 2 και 4, βρόχοι 3 και 4.

Συνδυασμοί ανά τρεις: βρόχοι 2, 3 και 4.

Παράδειγμα 11 (3)



Παράδειγμα 11 (4)

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)\big(1 - G_7(s)H_3(s)\big)}{\Delta}$$

$$\begin{aligned}\Delta = 1 - (&G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)\\ &+ G_7(s)H_3(s) + G_4(s)H_2(s) + G_2(s)H_1(s))\\ &+ (G_7(s)H_3(s)G_4(s)H_2(s) + G_7(s)H_3(s)G_2(s)H_1(s)\\ &+ G_4(s)H_2(s)G_2(s)H_1(s))\\ &- G_7(s)H_3(s)G_4(s)H_2(s)G_2(s)H_1(s)\end{aligned}$$

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι., 2011, *Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Συστημάτων και Ελέγχου*, Τόμος Α: Κλασική Θεωρία Ελέγχου, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Πουλιέζος Αναστάσιος, 2013, *Περί Συστημάτων Ελέγχου. Εισαγωγικό Εγχειρίδιο της Σύγχρονης Θεωρίας Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου*, ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε.
- Norman Nise, 2011, *Control Systems Engineering*, 6th Edition, John Willey.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Κλασσική Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 9: Περιγραφή συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS432/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης