



Κλασική Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 12: PI-controllers, Lag compensators

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

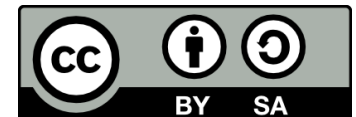


Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα Ενότητας

- Ποσοστό Υπερύψωσης (Maximum Overshoot) M_p .
- Ideal integral compensation.
- Lag compensator.



Σκοποί Ενότητας

- Υπολογισμός και κατασκευή αντισταθμιστών.

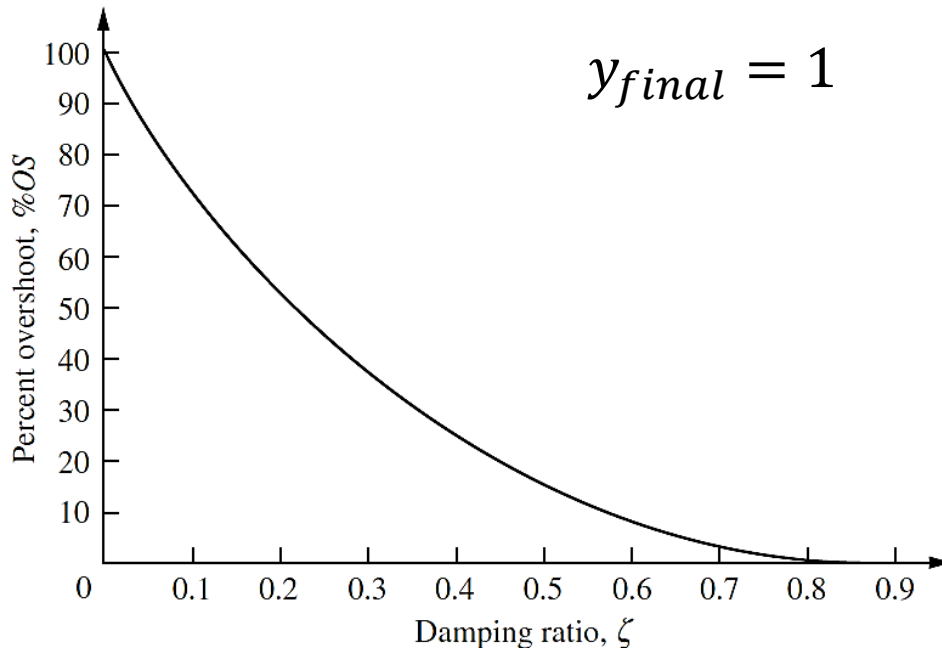


Ποσοστό Υπερύψωσης M_p (Maximum Overshoot) (1/2)

$$M_p = 100 \frac{y_{max} - 1}{1} = 100 e^{\left(-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)} \leftrightarrow \zeta = -\frac{\ln(M_p/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p/100)}}$$

$$y_{final} = 1$$

Συντελεστής απόσβεσης
(damping ratio)



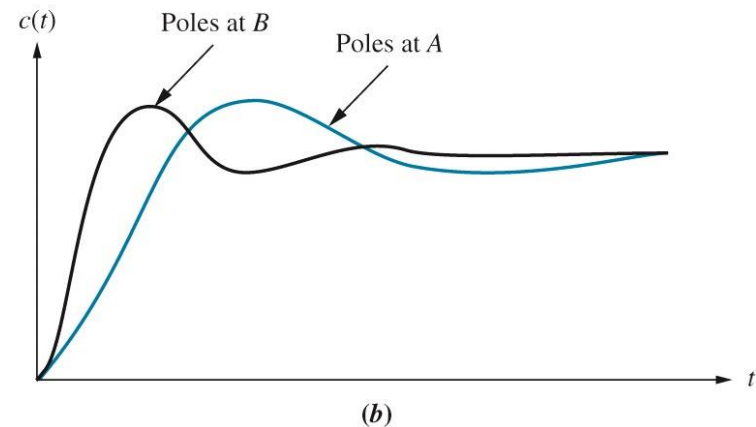
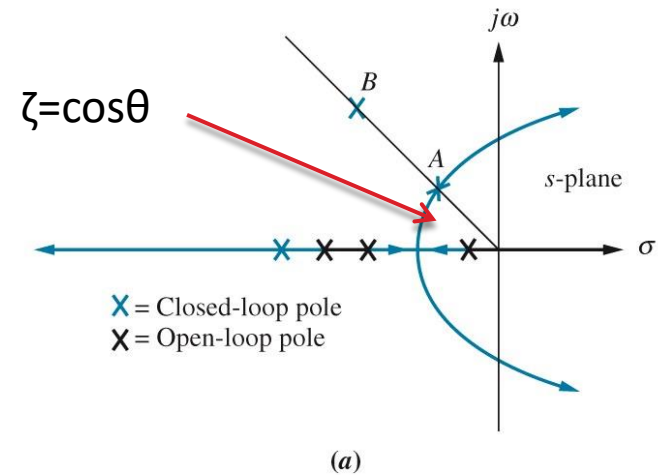
Συστήματα δεύτερης τάξης

$$\zeta = 0.7071 \rightarrow M_p = 4.32\%$$



Ποσοστό Υπερύψωσης M_p (Maximum Overshoot) (2/2)

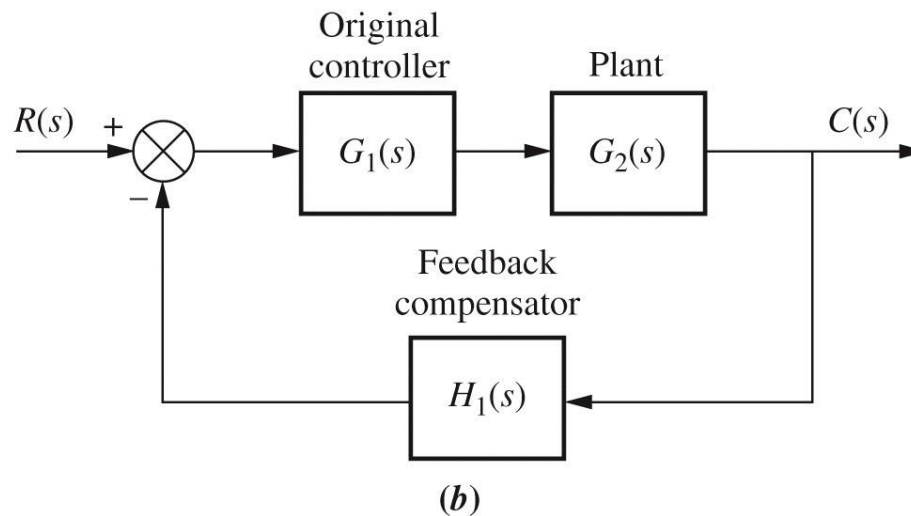
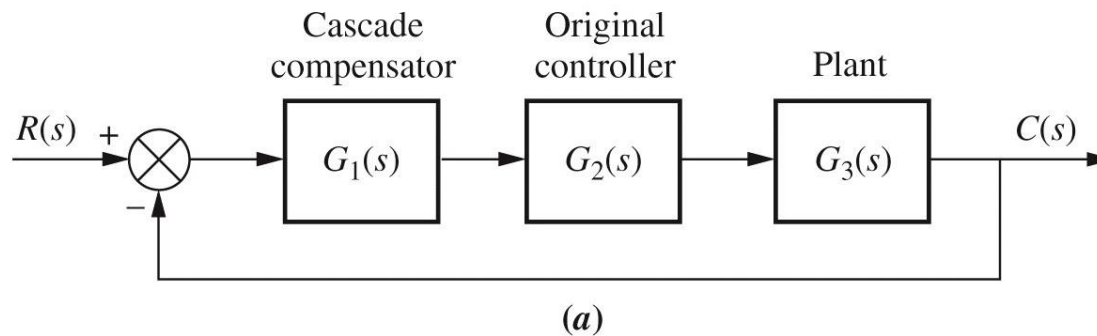
- Τα σημεία A, B έχουν το ίδιο maximum overshoot.



Εικόνα 1



Cascade compensator Feedback compensator



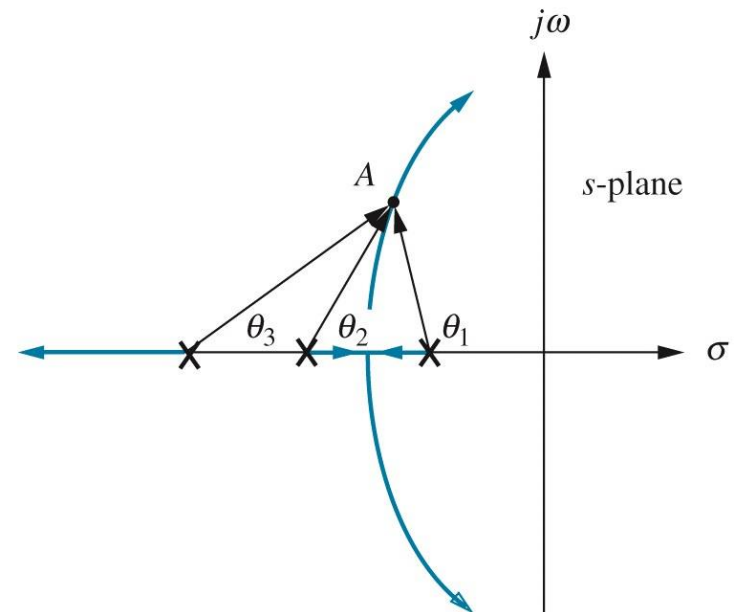
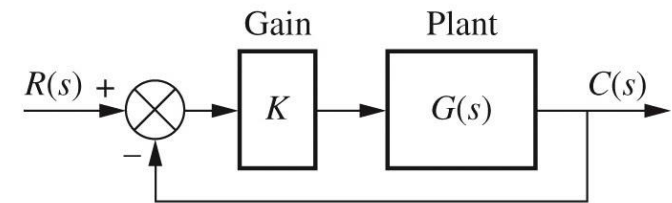
Εικόνα 2



Ideal integral compensation (1/3)

- Βελτίωση του steady state error.
- Το σημείο A ανήκει στον γ.τ.ρ. αν ικανοποιείται η παρακάτω ισότητα

$$-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = (2\kappa + 1)180^\circ$$



Εικόνα 3

$$-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = (2k + 1)180^\circ$$

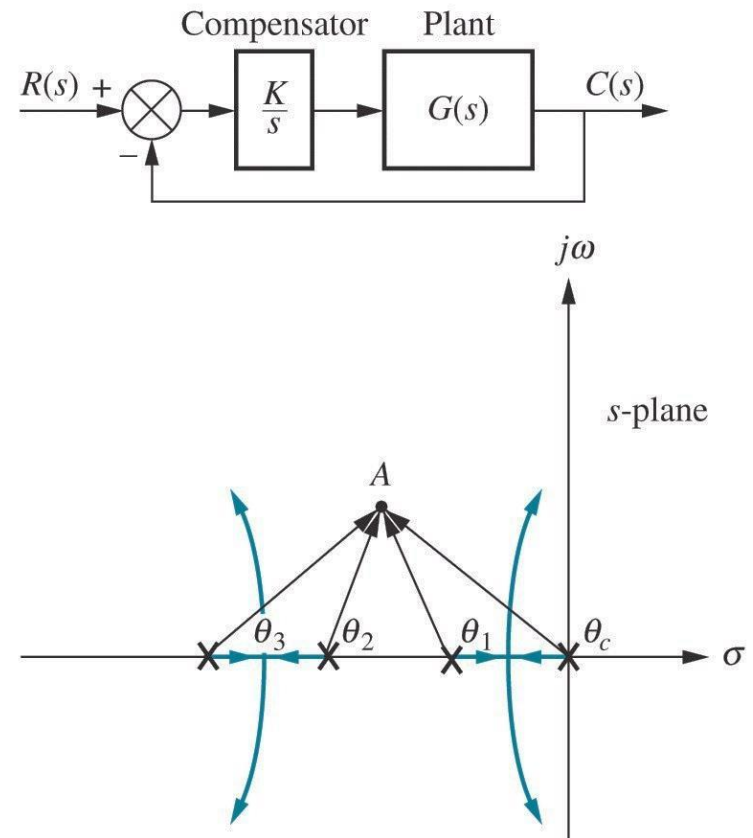
(a)



Ideal integral compensation (2/3)

- Η τοποθέτηση ενός πόλου στο 0 έχει ως συνέπεια να απομακρύνει το A από τον γ.τ.ρ.

$$-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 \neq (2k + 1)180^\circ$$



Εικόνα 4

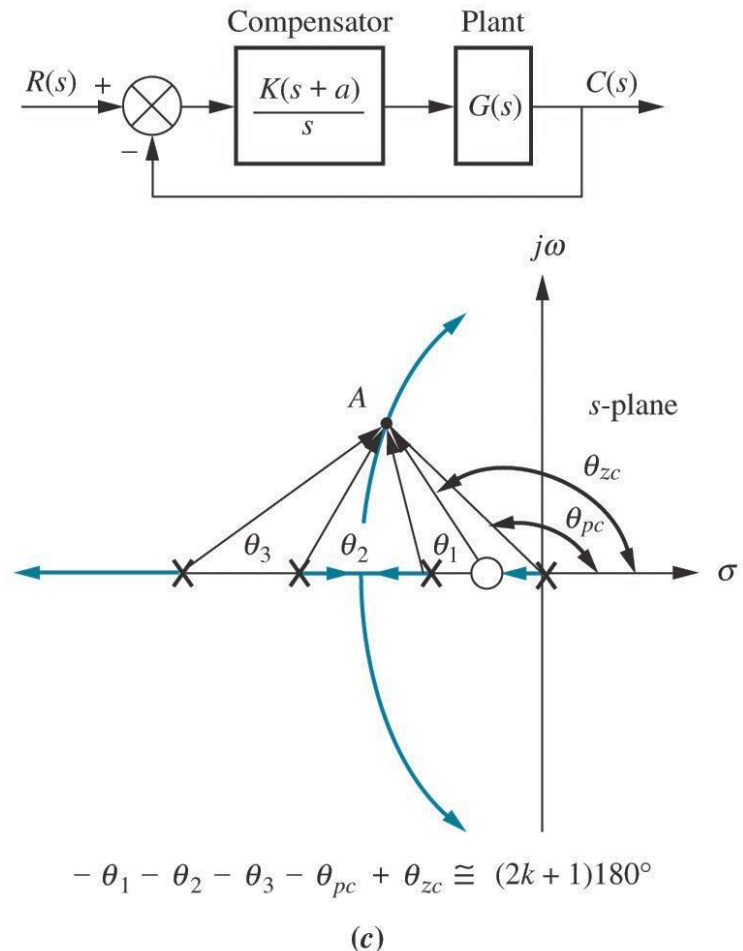
$$-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_c \neq (2k + 1)180^\circ$$

(b)



Ideal integral compensation (3/3)

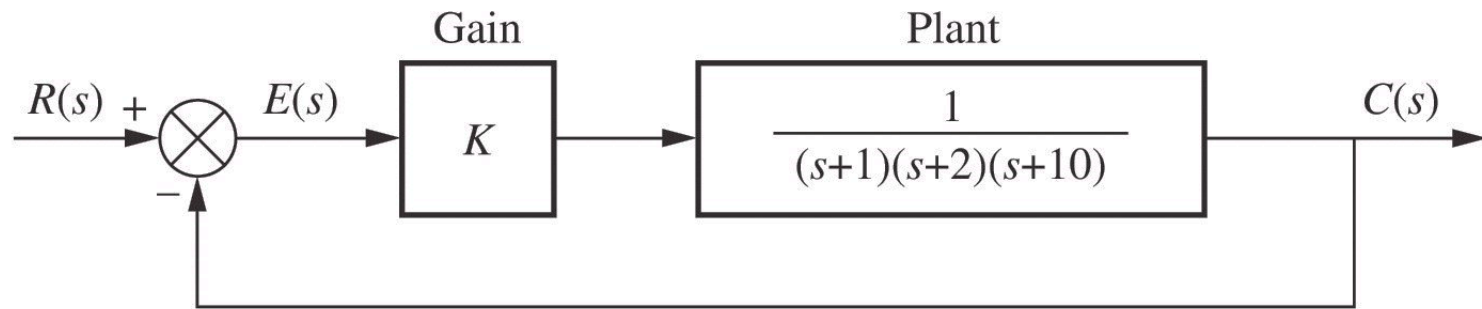
Η τοποθέτηση ενός μηδενικού στο $-a$ και ενός πόλου στο 0 έχει ως συνέπεια την προσθήκη μιας γωνίας $+\theta_{zc}-\theta_{pc}$ η οποία αν είναι μικρή διατηρεί το σημείο A στον γ.τ.ρ. και συνεπώς η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος παραμένει αναλλοίωτη, ενώ το steady-state error μηδενίζεται.



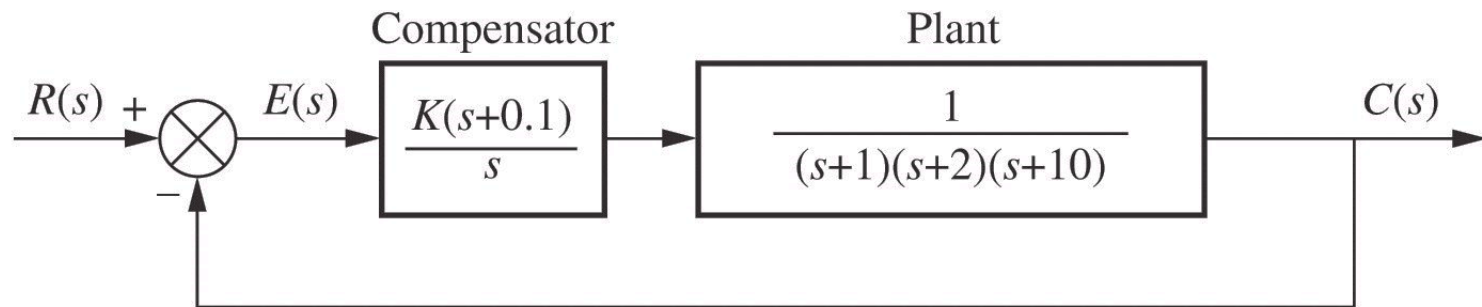
Εικόνα 5



Παράδειγμα (1/4)



(a)



(b)

Εικόνα 6



Παράδειγμα (2/4)

$$\zeta = 0.174$$

↓

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ &= -0.174\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-0.174^2} \\ &= -0.174\omega_n \pm i0.98474\omega_n \end{aligned}$$

Τα σημεία του γ.τ.ρ. ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\begin{aligned} 1 + G(s)K = 0 &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+10)}K = 0 \Leftrightarrow \\ &(s+1)(s+2)(s+10) + K = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$



Παράδειγμα (3/4)

$$s^3 + 13s^2 + 32s + 20 + K = 0$$

↓

$$(-0.174\omega_n + i0.98474\omega_n)^3 + 13(-0.174\omega_n + i0.98474\omega_n)^2 + 32(-0.174\omega_n + i0.98474\omega_n) + 20 + K = 0 \Leftrightarrow$$

Πραγματικό μέρος

$$20 + K - 5.568\omega_n - 12.21267\omega_n^2 + 0.5009\omega_n^3 = 0$$

Φανταστικό μέρος

$$-31.51168\omega_n - 4.45496\omega_n^2 - 0.865473\omega_n^3 = 0$$



Παράδειγμα (4/4)

```
In[12]:= NSolve[ | 31.5117 w_n - 4.45496 w_n^2 - 0.865473 w_n^3 == 0,
                20 + K - 5.568 w_n - 12.2127 w_n^2 + 0.500922 w_n^3 == 0 | , | w_n, K | ]
```

```
Out[12]= | | w_n + 9.13373, K + 1329.68 | , | w_n + 3.9863, K + 164.532 | , | w_n + 0., K + 20. | )
```

```
In[13]:= . 0.174 w_n + I 0.98474 w_n | . | w_n + 3.986301616215044`, K + 164.5320978304263` |
```

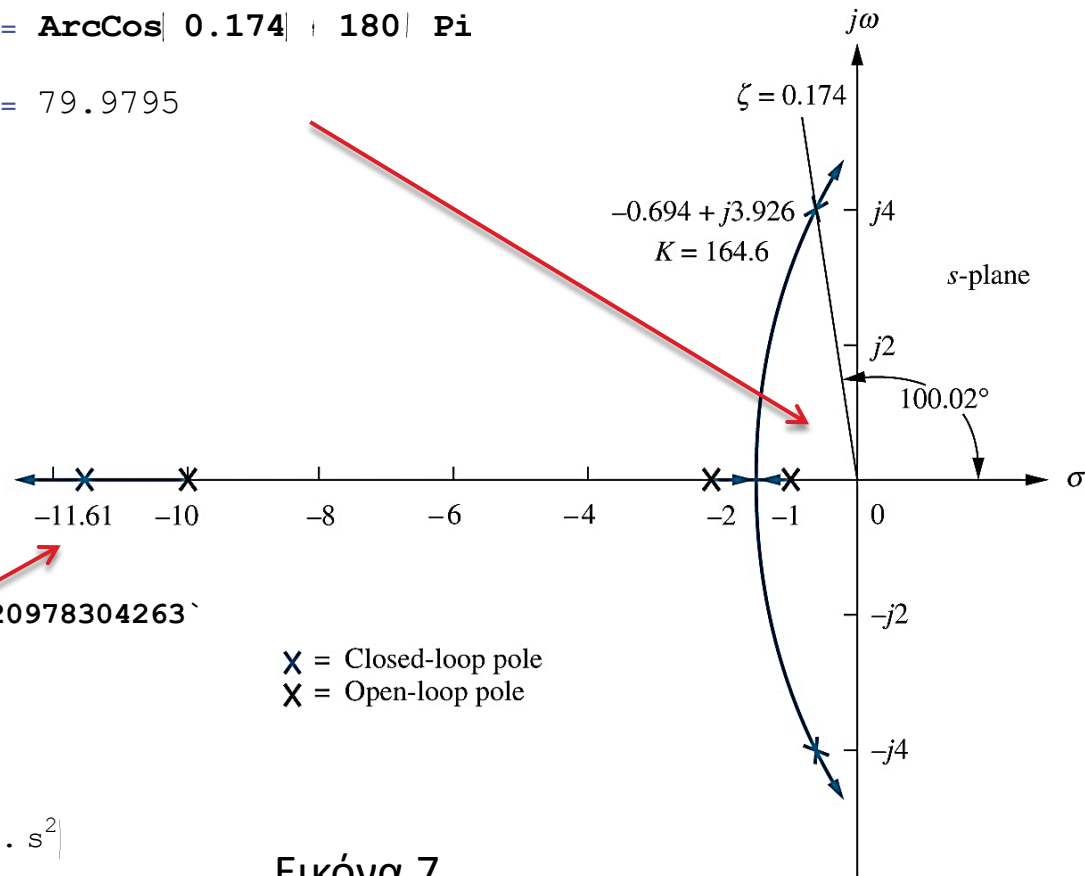
```
Out[13]= . 0.693616 + 3.92547 i
```



Σύστημα χωρίς Ideal Integral Compensator (1/3)

In[15]:= ArcCos[0.174] | 180 | Pi

Out[15]= 79.9795



In[16]:= (s + 1) (s + 2) (s + 10) + K | . K + 164.5320978304263`

Out[16]= 164.532 + (1 + s) (2 + s) (10 + s)

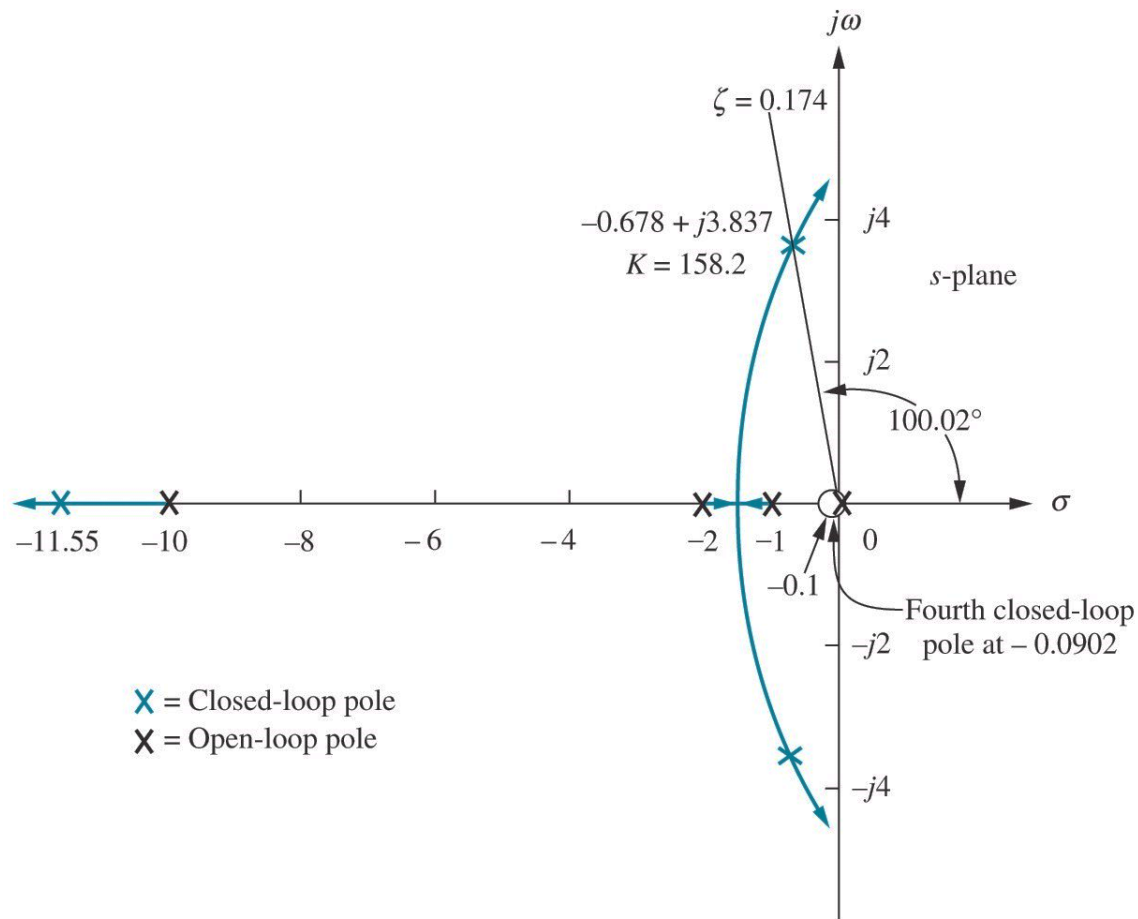
In[17]:= Factor[|]

Out[17]= (11.6128 + 1. s) (15.8904 + 1.38723 s + 1. s^2)

Εικόνα 7



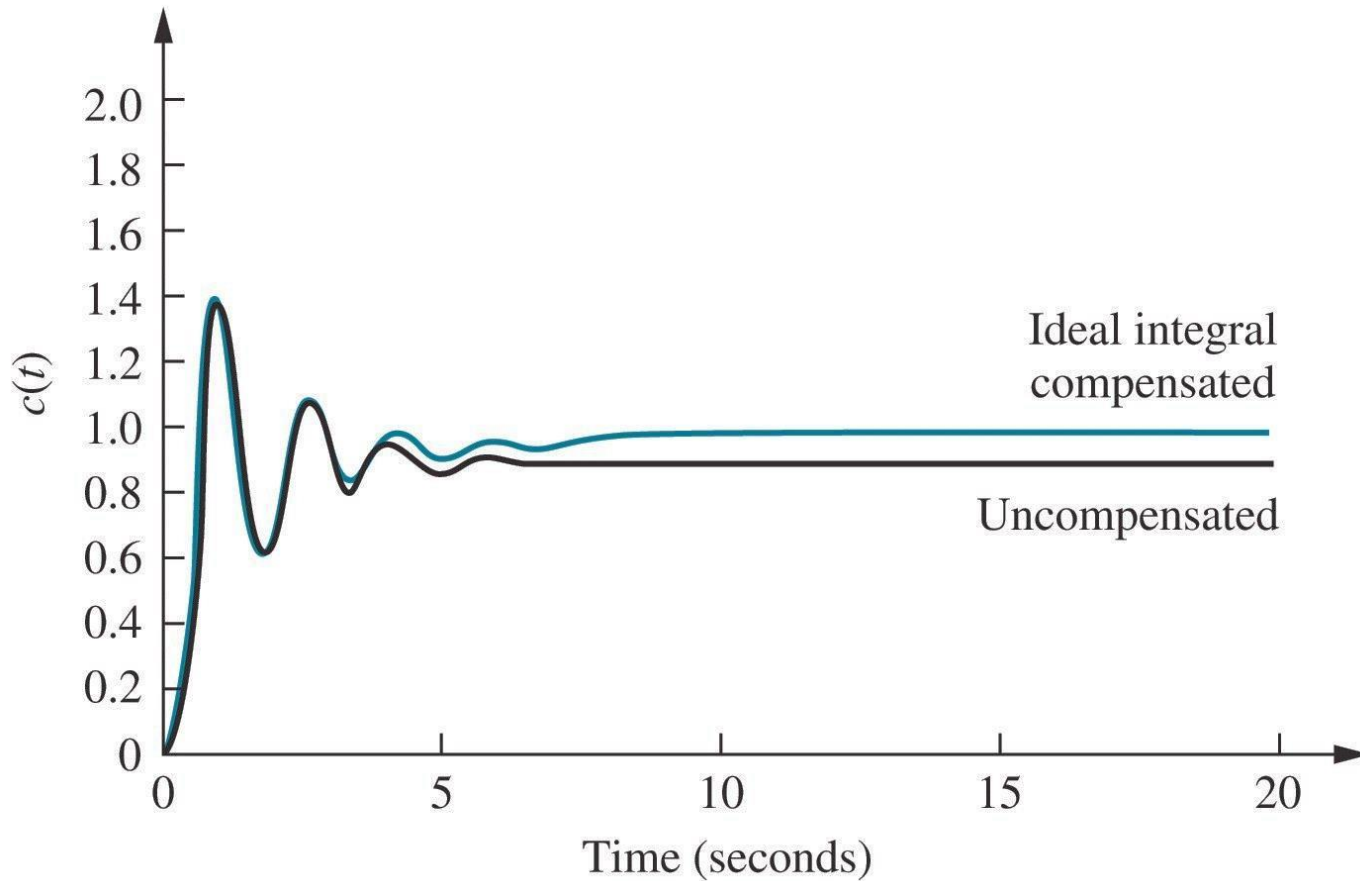
Σύστημα χωρίς Ideal Integral Compensator (2/3)



Εικόνα 8



Σύστημα χωρίς Ideal Integral Compensator (3/3)

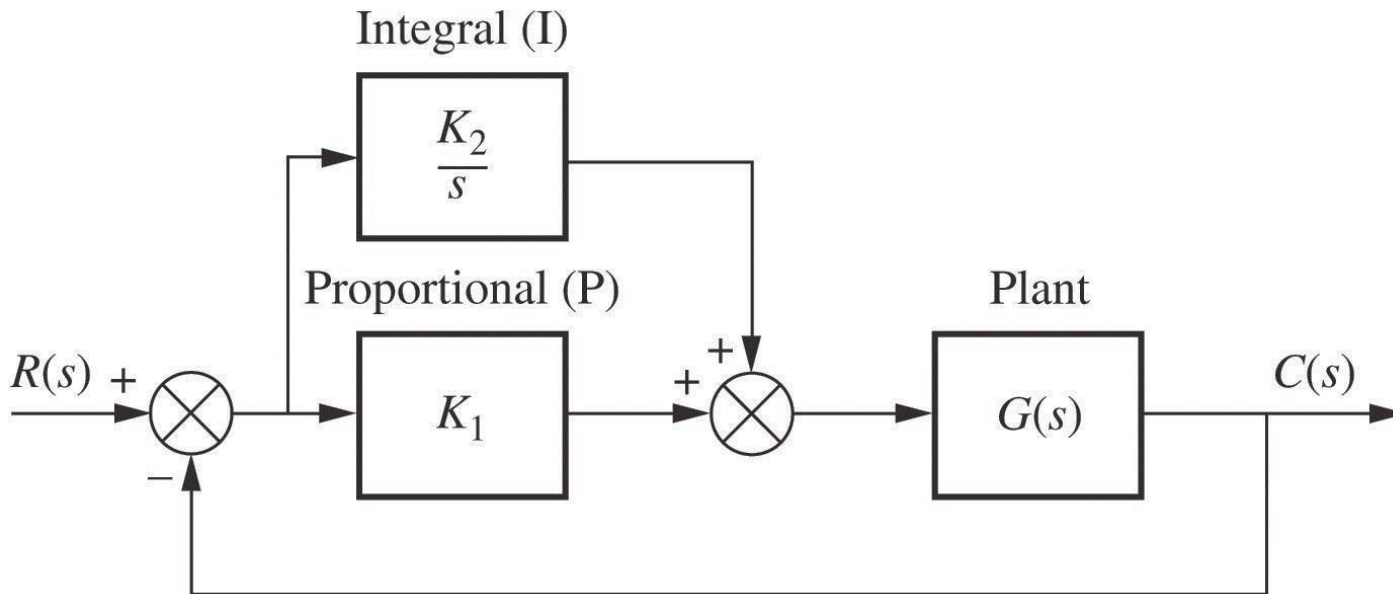


Εικόνα 9



Παράδειγμα 2

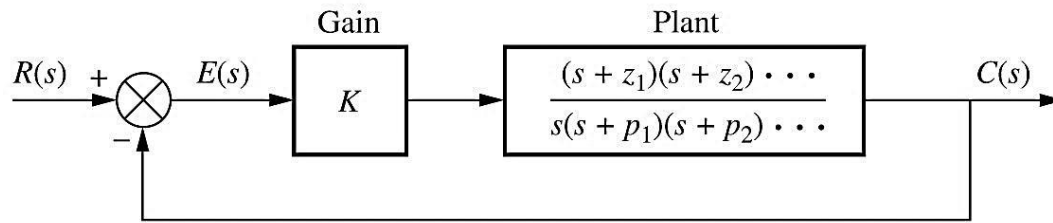
$$K_1 + \frac{K_2}{s} = \frac{K_1 s + K_2}{s} = \frac{K_1 \left(s + \frac{K_2}{K_1} \right)}{s}$$



Εικόνα 10

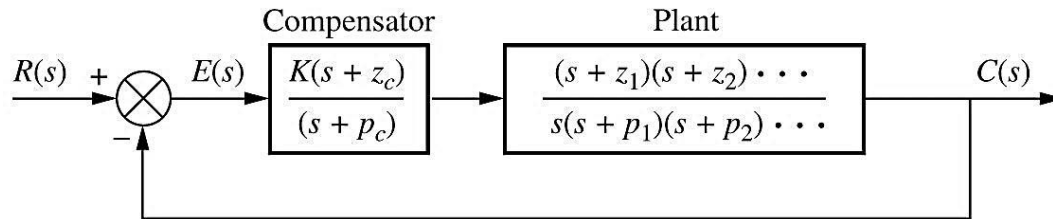


Lag compensator (1/2)



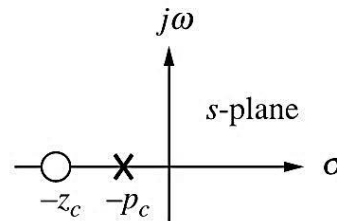
(a)

Lag compensator



(b)

$$G_C(s) = \frac{(s + z_c)}{(s + p_c)}$$

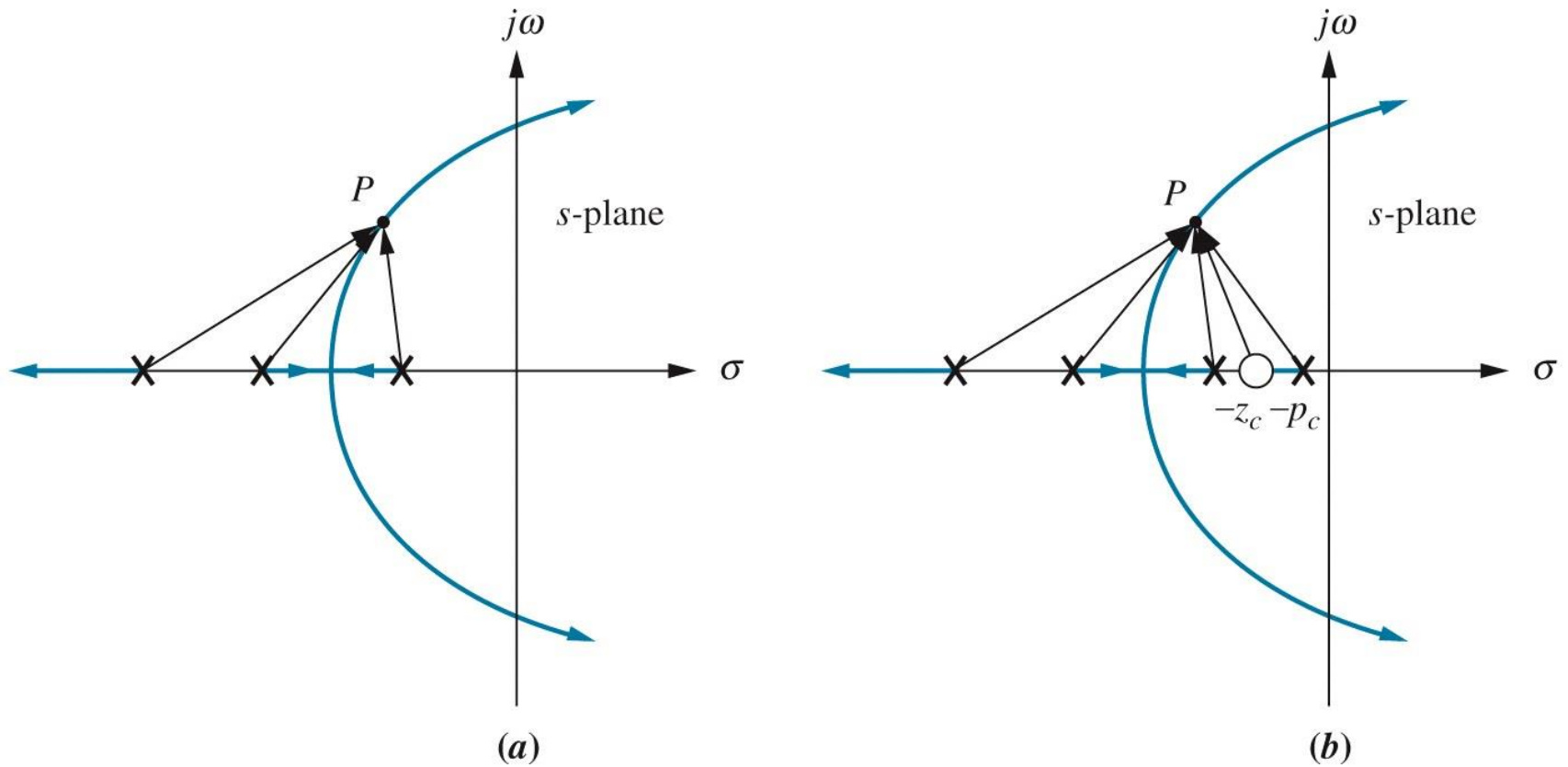


(c)

Εικόνα 11



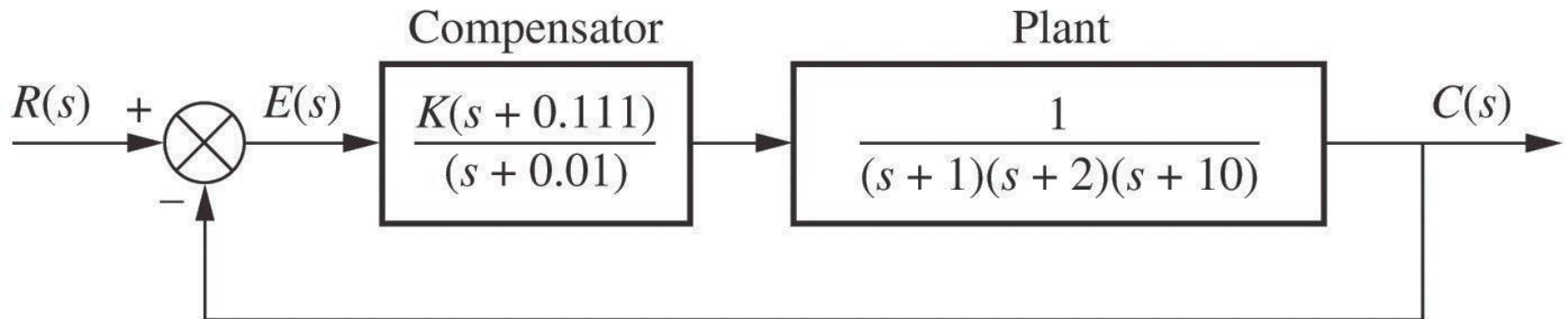
Lag compensator (2/2)



Εικόνα 12



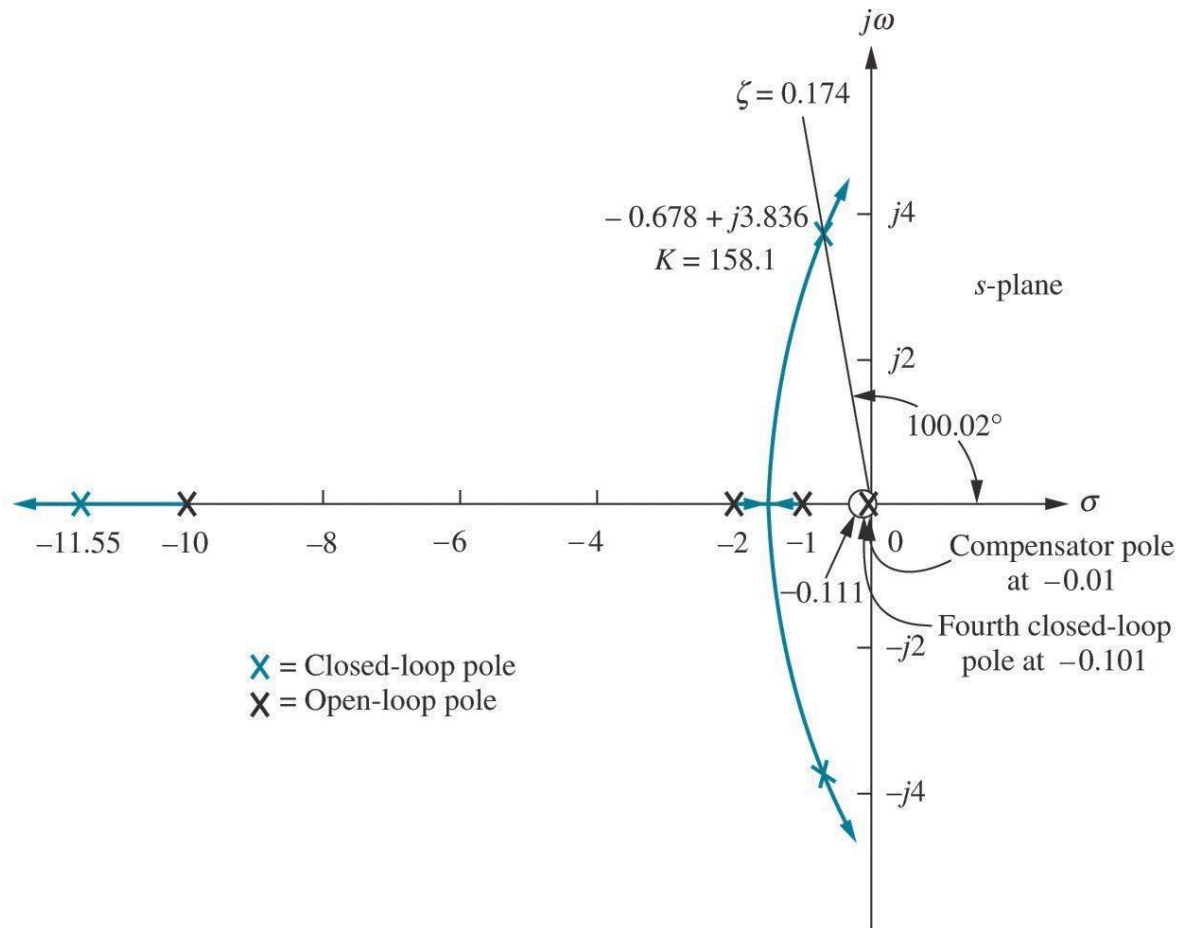
Παράδειγμα 2 (1/3)



Εικόνα 13



Παράδειγμα 2 (2/3)



Εικόνα 14



Παράδειγμα 2 (3/3)

| Parameter | Uncompensated | Lag-compensated |
|-----------------------------|------------------------------|---|
| Plant and compensator | $\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+10)}$ | $\frac{K(s+0.111)}{(s+1)(s+2)(s+10)(s+0.01)}$ |
| K | 164.6 | 158.1 |
| K_p | 8.23 | 87.75 |
| $e(\infty)$ | 0.108 | 0.011 |
| Dominant second-order poles | $-0.694 \pm j3.926$ | $-0.678 \pm j3.836$ |
| Third pole | -11.61 | -11.55 |
| Fourth pole | None | -0.101 |
| Zero | None | -0.111 |

Πίνακας 1



Παράδειγμα 3 (1/3)

Να βελτιωθεί το steady state error κατά **10 φορές** αν το σύστημα έχει damping ratio $\zeta=0.174$.

$$e(\infty) = \frac{0.108}{10} = 0.0108$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_{p,new}} = 0.0108 \Rightarrow$$

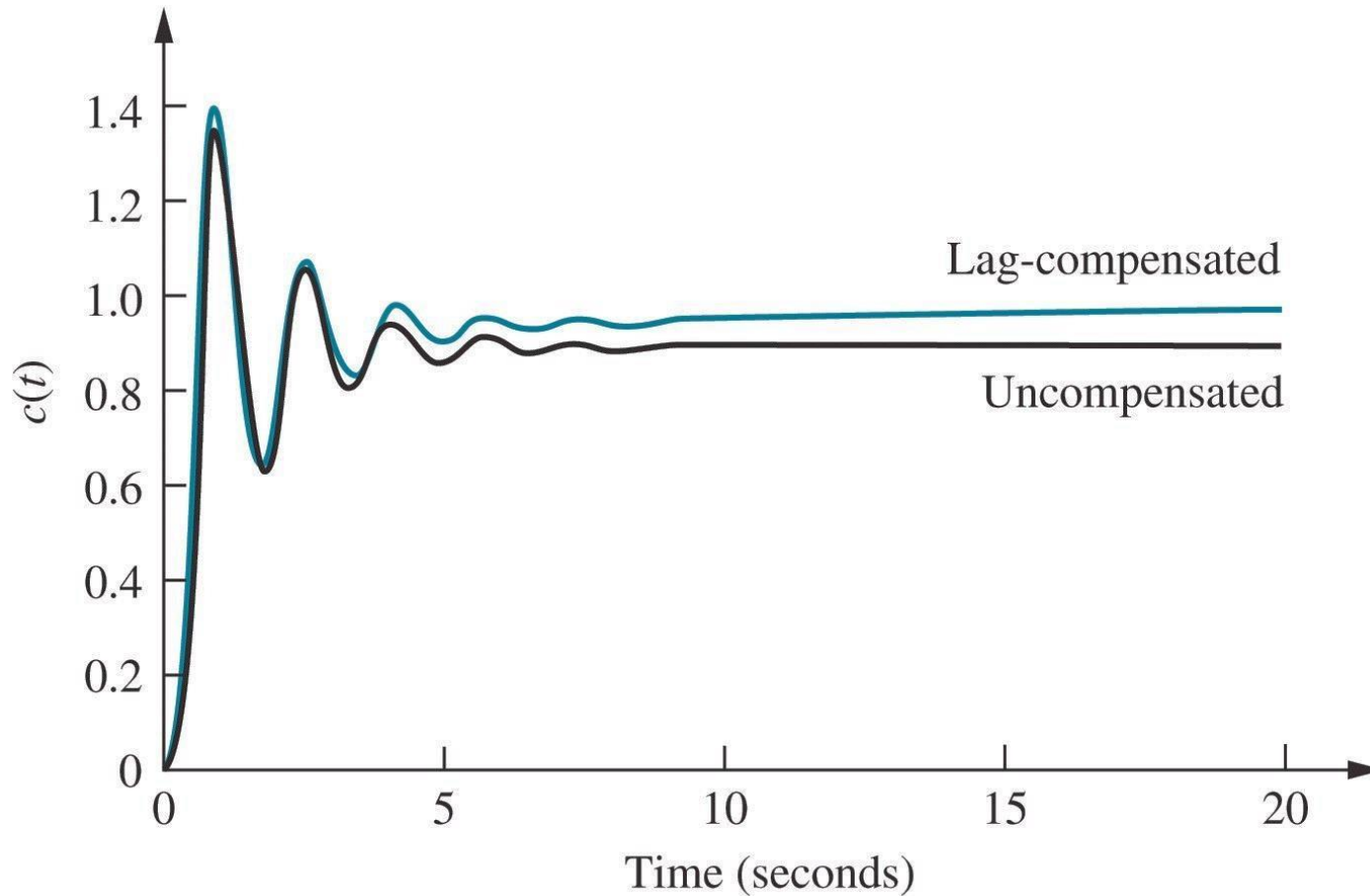
$$K_{p,new} = \frac{1 - e(\infty)}{e(\infty)} = \frac{1 - 0.0108}{0.0108} = 91.59$$

$$\frac{z_c}{p_c} = \frac{K_{p,new}}{K_{p,old}} = \frac{91.59}{8.23} = 11.13$$

$$p_c = 0.01 \Rightarrow z_c = 11.13p_c \approx 0.111$$



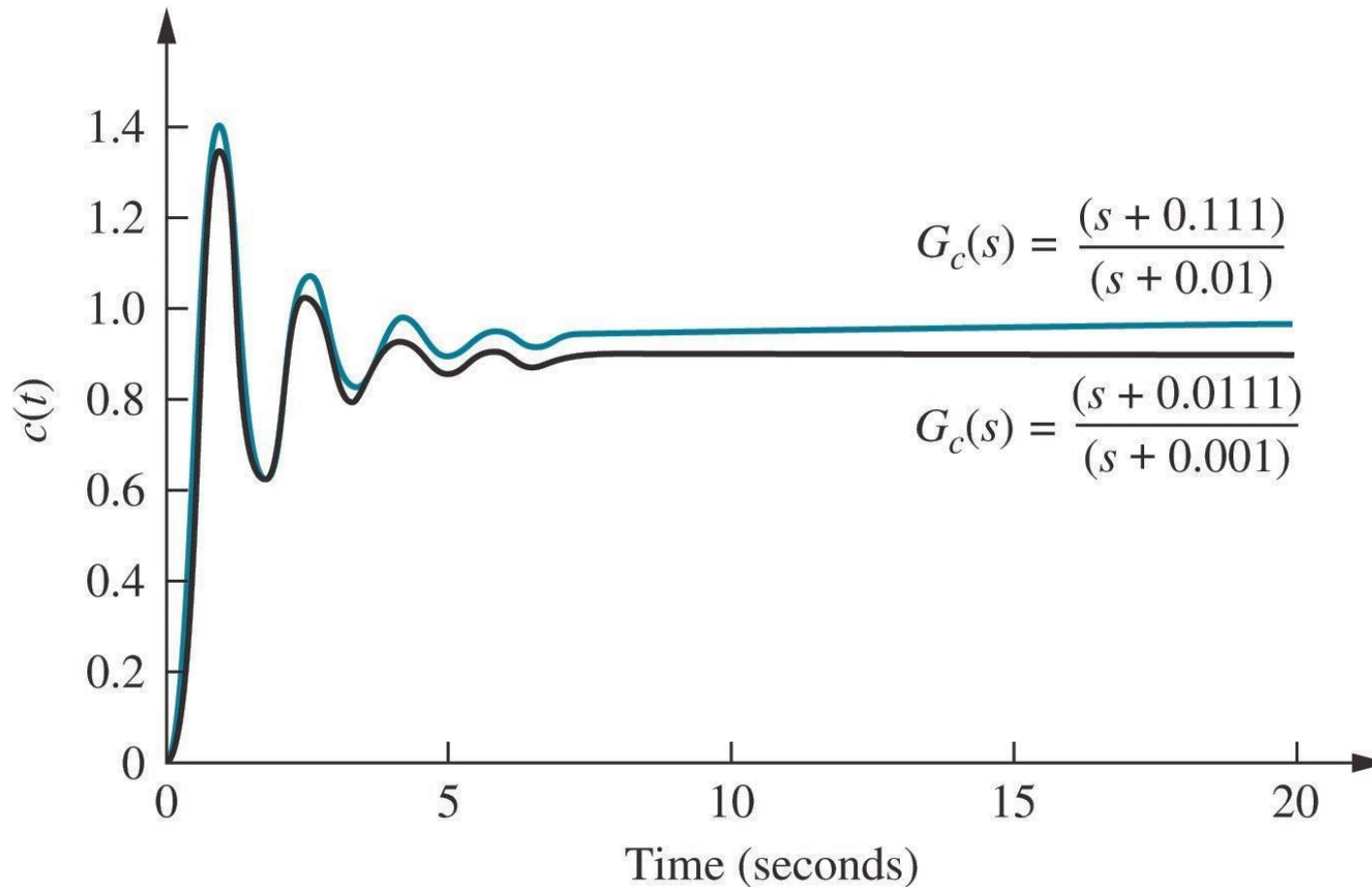
Παράδειγμα 3 (2/3)



Εικόνα 15



Παράδειγμα 3 (3/3)



Εικόνα 16



Βιβλιογραφία

- Norman Nise, Control Systems Engineering, 2011, John Wiley & Sons, Inc.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

- **Εικόνες 1 έως 16:** Norman Nise, Control Systems Engineering, 2011, John Wiley & Sons, Inc.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

- **Πίνακας 1:** Norman Nise, Control Systems Engineering, 2011, John Wiley & Sons, Inc.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Κλασική Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 12: PI-controllers, Lag compensators». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

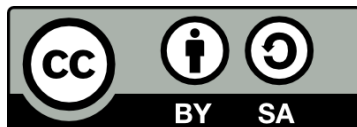
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS432/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

