



Κλασική Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 14: Κριτήριο Nyquist

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα Ενότητας

- Απεικονίσεις Γ κλειστών καμπύλων μέσω κανονικών ρητών συναρτήσεων.
- Διάγραμμα Nyquist.
- Θεώρημα Nyquist.



Σκοποί Ενότητας

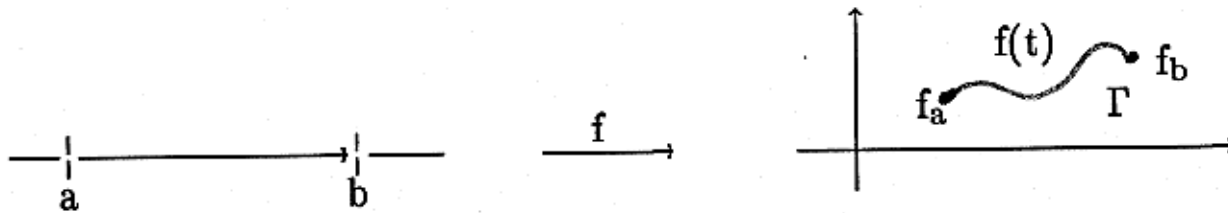
- Παρουσιάζεται μια γραφική τεχνική για τον υπολογισμό της ευστάθειας ενός συστήματος (κριτήριο ευστάθειας Nyquist).



Καμπύλη Γ

Καμπύλη Γ : Καμπύλη Γ μιας συνάρτησης $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ καλείται η γραφική παράσταση της

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$



ή ισοδύναμα ο δρόμος που διαγράφει το σημείο $f(t)$ όταν το $t \in [a, b]$.



Κλειστή καμπύλη Γ

Κλειστή Καμπύλη Γ : Κλειστή καμπύλη Γ μιας συνάρτησης $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ καλείται αυτή για την οποία ισχύει:

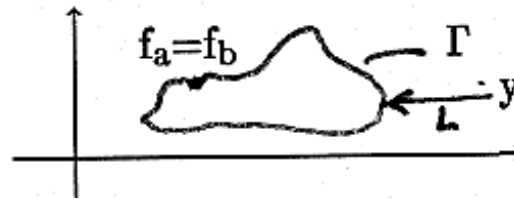
$$\forall t_1, t_2 \in [a, b], (t_1 < t_2 \text{ και } f(t_1) = f(t_2)) \Rightarrow (t_1 = a \text{ και } t_2 = b)$$



Αριθμός περιστροφών κλειστής καμπύλης

Αριθμός περιστροφών κλειστής καμπύλης Γ περι σημείο $y \in \mathbb{C}$.

Έστω κλειστή καμπύλη $\Gamma \in \mathbb{C}$ και σημείο $y \in \mathbb{C}, y \notin \Gamma$.



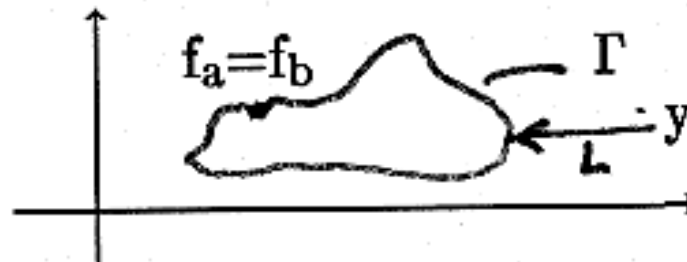
Ο αριθμός των πλήρων περιστροφών της ακτίνας L περί το y όταν το άκρο της L κινείται πάνω στην Γ ονομάζεται αριθμός περιστροφών της Γ περί το y και συμβολίζεται $N(y, \Gamma)$.



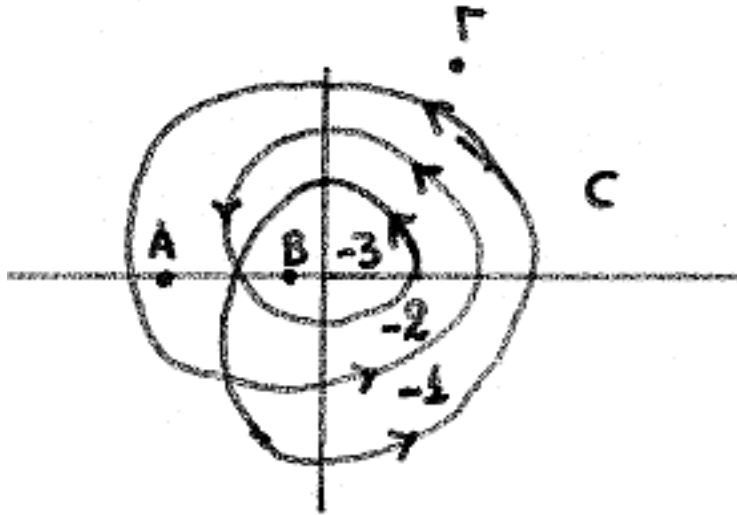
Σύμβαση

Σύμβαση:

- i.* $N(y, \Gamma) > 0$ όταν το άκρο της L κινείται σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού.
- ii.* $N(y, \Gamma) < 0$ όταν το άκρο της L κινείται αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού.



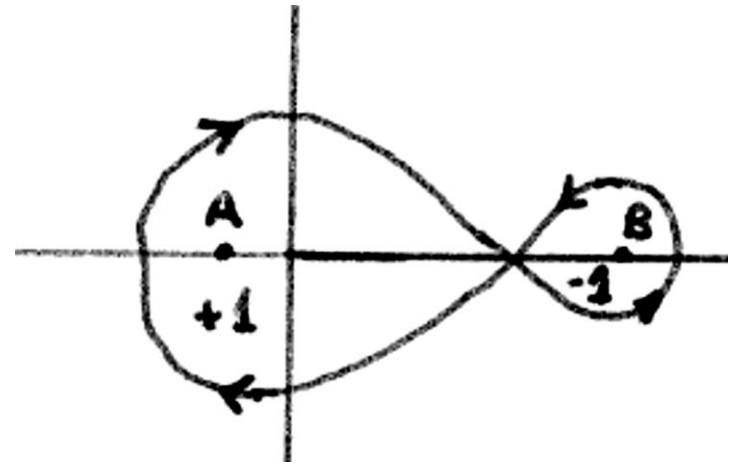
Παράδειγμα 1



$$N(A, C) = -1$$

$$N(B, C) = -3$$

$$N(\Gamma, C) = 0$$



$$N(A, C) = +1$$

$$N(B, C) = -1$$



Απεικονίσεις Γ κλειστών καμπύλων μέσω κανονικών ρητών συναρτήσεων

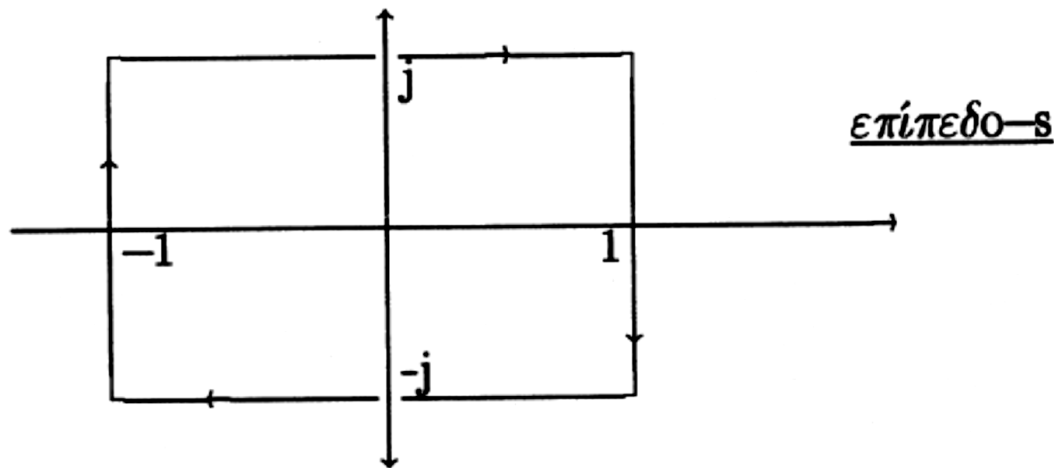
Μπορούμε να θεωρήσουμε επίσης απεικονίσεις Γ κλειστών καμπύλων C του μιγαδικού επιπέδου \mathbb{C} μέσω κανονικών ρητών συναρτήσεων

$$F(s) = \frac{h(s)}{d(s)} \text{ όπου } \deg(h(s)) < \deg(d(s)).$$



Παράδειγμα 2 (1)

Να βρεθεί η απεικόνιση της κλειστής καμπύλης



μέσω της ρητής συνάρτησης

$$F(s) = \frac{s}{s+2}$$



Παράδειγμα 2 (2)

- $s = -1 + jw$ για $w \in [-1,1]$

$$F(-1 + jw) = \frac{-1 + jw}{1 + jw} = \frac{(-1 + w^2) + j(2w)}{1 + w^2} = \frac{(-1 + w^2)}{1 + w^2} + j \frac{2w}{1 + w^2}$$

- $s = 1 + jw$ για $w \in [-1,1]$

$$F(1 + jw) = \frac{1 + jw}{3 + jw} = 1 + j \frac{2w}{3 + w^2}$$

- $s = w + j$ για $w \in [-1,1]$

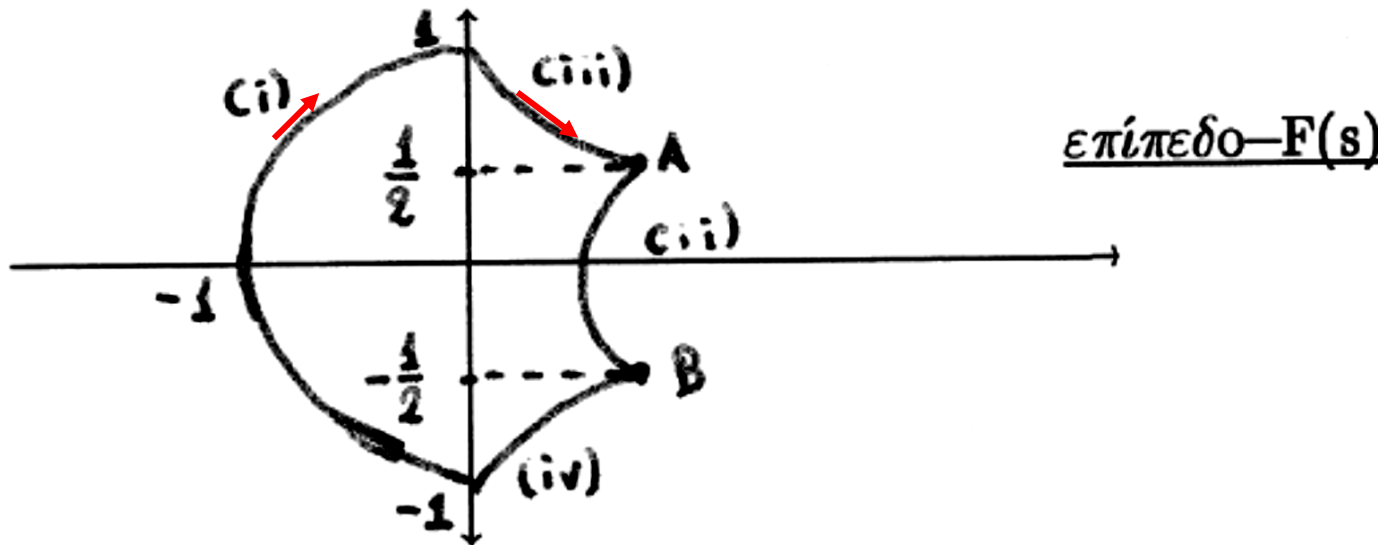
$$F(w + j) = \frac{w + j}{(w + 2) + j} = \frac{w^2 + 2w + 1}{(w + 2)^2 + 1^2} + j \frac{2}{(w + 2)^2 + 1^2}$$

- $s = w - j$ για $w \in [-1,1]$

$$F(w - j) = \frac{w - j}{(w + 2) - j} = \frac{w^2 + 2w + 1}{(w + 2)^2 + 1^2} - j \frac{2}{(w + 2)^2 + w^2}$$



Παράδειγμα 2 (3)



Θεώρημα 1

Θεώρημα 1: Έστω C κλειστή καμπύλη στο επίπεδο \mathbb{C} . Έστω $f(s)$ συνάρτηση η οποία είναι αναλυτική πάνω και μέσα στην C (εκτός από έναν πεπερασμένο αριθμό πόλων εντός της C) Έστω Γ η κλειστή καμπύλη του επιπέδου $f(s)$ (Παράδειγμα 2), η οποία αποτελεί απεικόνιση της C μέσω της $f(s)$. Τότε ο αριθμός $N = N_{\Gamma}(0)$ περιστροφών της Γ περί το σημείο $(0,0)$ του επιπέδου $f(s)$ είναι:

$$N = Z - P$$

όπου

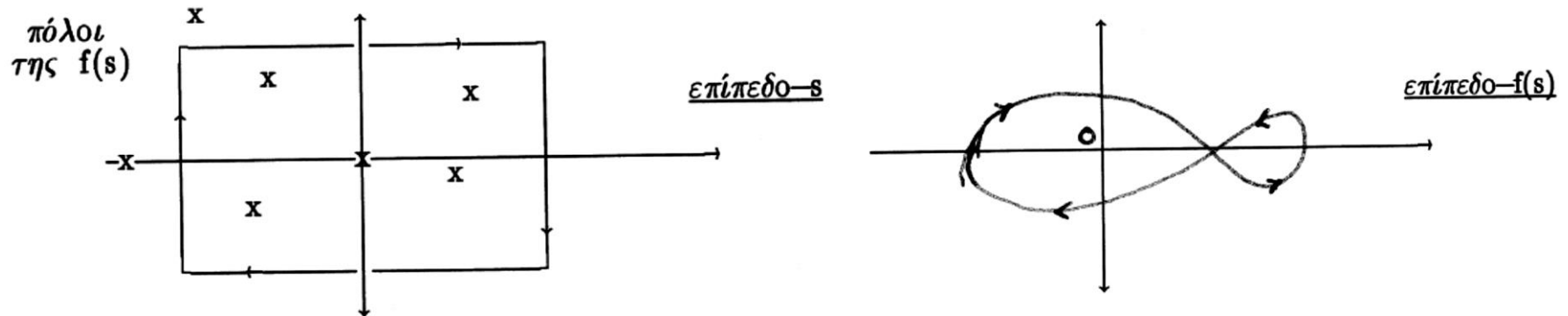
Z : αριθμός των μηδενικών της $f(s)$ μέσα στην C .

P : αριθμός των πόλων της $f(s)$ μέσα στην C .



Παράδειγμα 3

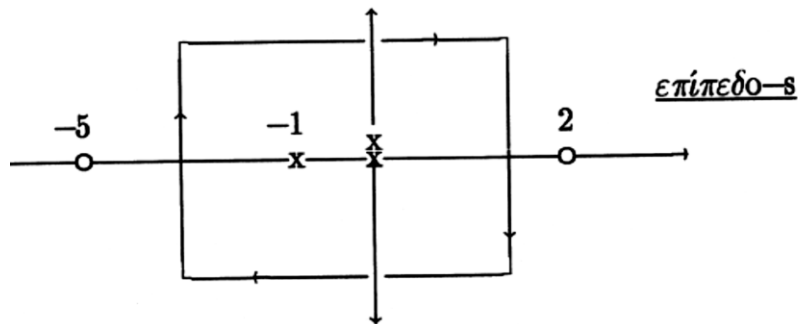
Να προσδιοριστεί ο αριθμός των μηδενικών της $f(s)$.



$$N = Z - P \Rightarrow Z = N + P = 5 + 1 = 6$$

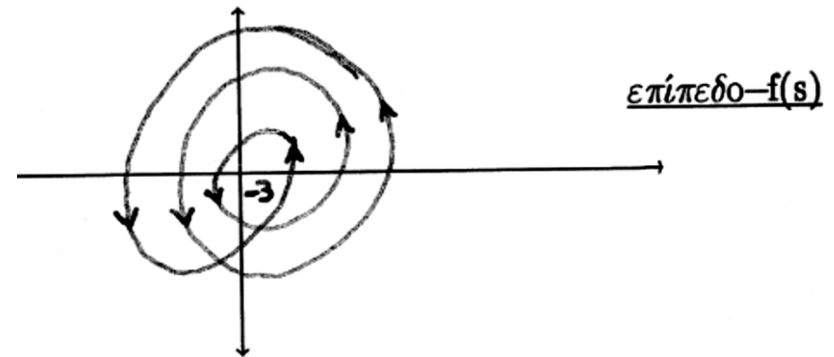


Παράδειγμα 4



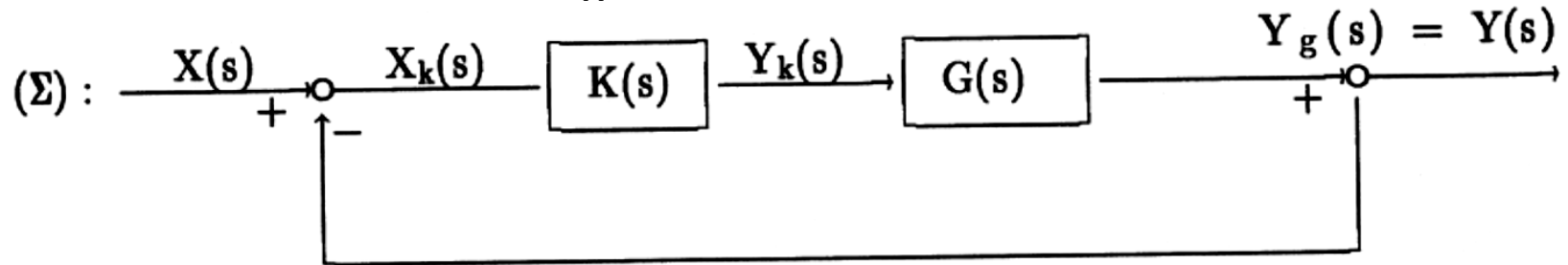
$$f(s) = \frac{k(s + 5)(s - 2)}{s^2(s + 1)}$$

$$N = Z - P = 0 - 3 = -3$$



Ασυμπτωτικά ευσταθές (1)

Έστω το κλειστό σύστημα:



Έστω $G(s) = \frac{h(s)}{d(s)}$ και $K(s) = \frac{h_k(s)}{d_k(s)}$. Η συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω κλειστού συστήματος θα είναι:

$$H(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{K(s)G(s)}{W(s)}$$

$$W(s) = 1 + K(s)G(s) = \frac{d(s)d_k(s) + h(s)h_k(s)}{d(s)d_k(s)} = \frac{p_c(s)}{p(s)}$$



Ασυμπτωτικά ευσταθές (2)

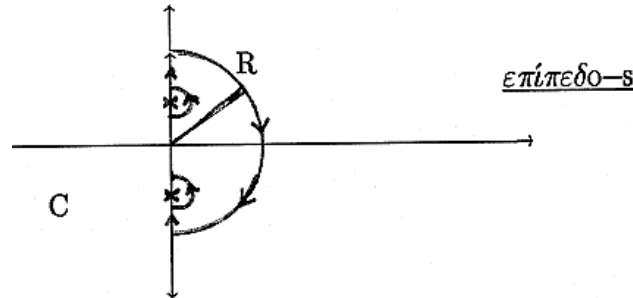
- $p(s)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ανοικτού συστήματος.
- $p_c(s)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος.

$$H(s) = \frac{h(s)h_k(s)}{d(s)d_k(s) + h(s)h_k(s)}$$

Το κλειστό σύστημα (Σ) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν και μόνο εάν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p_c(s)$ βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο.



Ασυμπτωτικά ευσταθές (3)



$$W(s) = 1 + K(s)G(s) = \frac{d(s)d_k(s) + h(s)h_k(s)}{d(s)d_k(s)} = \frac{p_c(s)}{p(s)}$$

Ο αριθμός περιστροφών $N_\Gamma(0)$ της Γ περί το σημείο $(0,0)$ του επιπέδου $-W(s)$ είναι:

$$N = Z - P$$

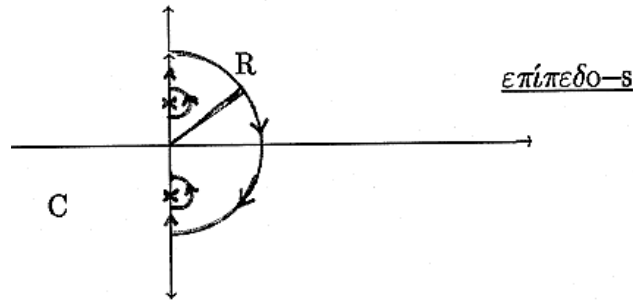
όπου

Z : αριθμός των μηδενικών της $W(s)$ μέσα στην C .

P : αριθμός των πόλων της $W(s)$ μέσα στην C .



Ασυμπτωτικά ευσταθές (4)



Όταν το $R \rightarrow \infty$ τότε
εσωτερικό της $C \equiv$ Δεξιό μιγαδικό επίπεδο

$$W(s) = 1 + K(s)G(s) = \frac{d(s)d_k(s) + h(s)h_k(s)}{d(s)d_k(s)} = \frac{p_c(s)}{p(s)}$$

Ο αριθμός περιστροφών $N_\Gamma(0)$ της Γ περί το σημείο $(0,0)$ του επιπέδου $-W(s)$ είναι:

$$N = Z - P$$

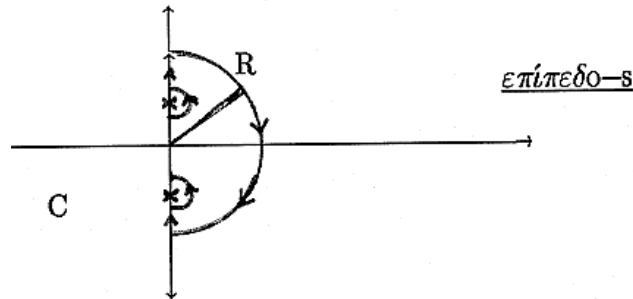
όπου

Z : αριθμός των μηδενικών της $W(s)$ στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο.

P : αριθμός των πόλων της $W(s)$ στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο.



Ασυμπτωτικά ευσταθές (5)



Όταν το $R \rightarrow \infty$ τότε
εσωτερικό της $C \equiv$ Δεξιό μιγαδικό επίπεδο

$W(s) = \frac{p_c(s)}{p(s)}$. Ο αριθμός περιστροφών $N_\Gamma(0)$ της Γ περί το σημείο $(0,0)$ του επιπέδου $-W(s)$ είναι:

$$N = Z - P$$

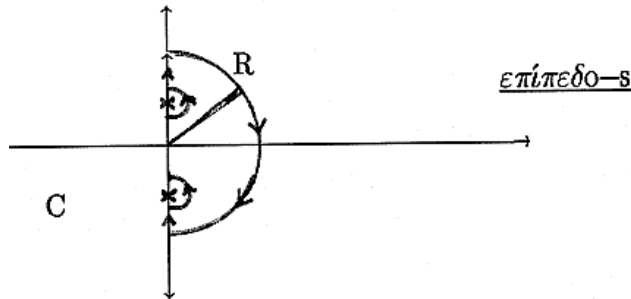
όπου

Z : αριθμός των **πόλων του κλειστού** συστήματος στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο.

P : αριθμός των **πόλων του ανοικτού** συστήματος στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο.



Ασυμπτωτικά ευσταθές (6)



Όταν το $R \rightarrow \infty$ τότε
εσωτερικό της $C \equiv$ Δεξιό μιγαδικό επίπεδο

$$W(s) = 1 + K(s)G(s) = \frac{d(s)d_k(s) + h(s)h_k(s)}{d(s)d_k(s)} = \frac{p_c(s)}{p(s)}$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το κλειστό σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές είναι να μην έχει πόλους στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο και συνεπώς

$$Z = 0$$

Άρα θα πρέπει

$$N = -P$$



Κριτήριο Nyquist

Πόρισμα (Κριτήριο Nyquist) Το κλειστό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν και μόνο εάν η απεικόνιση Γ της C μέσω της $W(s) = 1 + K(s)G(s)$ περιστρέφεται περί το σημείο $(0,0)$ του επιπέδου- $W(s)$

$$N = -P$$

φορές, όπου P ο αριθμός των πόλων του ανοικτού συστήματος (της $G(s)K(s)$) στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο.

Σημείωση. Παρατηρούμε ότι αν Γ' είναι η απεικόνιση της C κάτω από την $1 + G(s)K(s)$ και η Γ' περιστρέφεται περί το $(0,0)$ του επιπέδου $-1 + G(s)K(s)$ N φορές και αν Γ είναι η απεικόνιση της C κάτω από την $G(s)K(s)$ τότε



Γενικό Θεώρημα Nyquist

η Γ περιστρέφεται περί το $(-1,0)$ του επιπέδου $-G(s)K(s)$ επίσης N φορές και άρα μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω:

Γενικό Θεώρημα Nyquist

Το κλειστό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν και μόνο εάν η απεικόνιση Γ της C μέσω της $K(s)G(s)$ περιστρέφεται περί το σημείο $(-1,0)$ του επιπέδου $-K(s)G(s)$

$$N = -P$$

φορές, όπου P ο αριθμός των πόλων του ανοικτού συστήματος (της $G(s)K(s)$) στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο.



Κριτήριο Nyquist όταν $K(s) = K$ (σταθερά)

Στην περίπτωση που $K(s) = K$ (σταθερά) τότε το κριτήριο Nyquist μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Κριτήριο Nyquist

Το κλειστό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν και μόνο εάν η απεικόνιση Γ της C μέσω της $G(s)$ περιστρέφεται περί το σημείο $(-\frac{1}{K}, 0)$ του επιπέδου- $G(s)$

$$N = -P$$

φορές, όπου P ο αριθμός των πόλων του ανοικτού συστήματος (της $KG(s)$) στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο.

Διευκρίνιση: Ο όρος δεξιό μιγαδικό επίπεδο δεν συμπεριλαμβάνει τον άξονα των φανταστικών αριθμών.

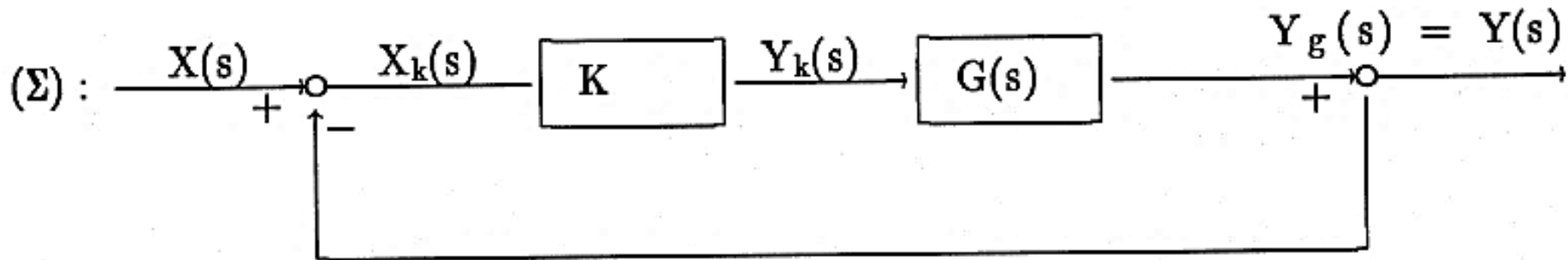


Παράδειγμα 5 (1)

Έστω ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς K για τις οποίες το κλειστό σύστημα

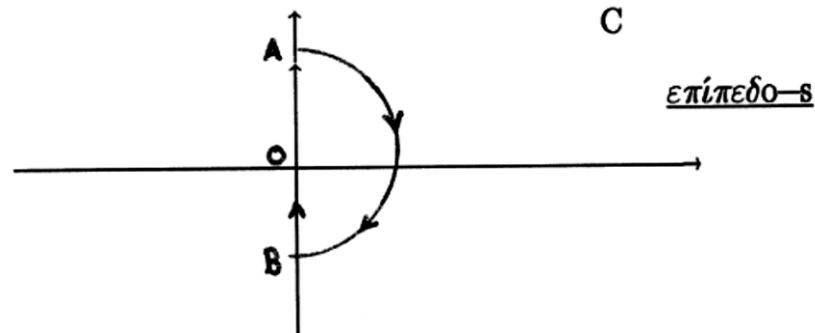


είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.



Παράδειγμα 5 (2)

Έστω το επίπεδο- s το δεξιό μιγαδικό επίπεδο

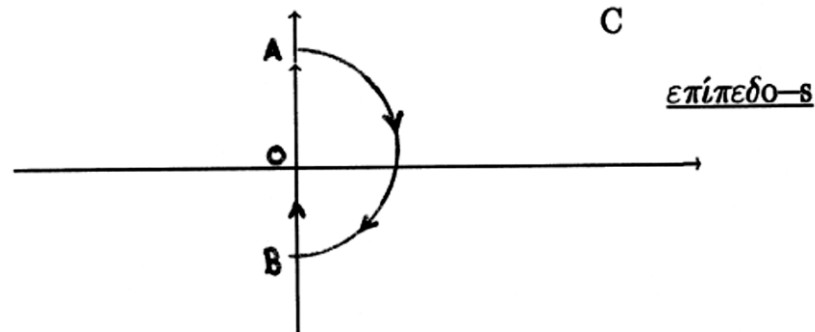


Συνήθως διαλέγουμε χαρακτηριστικές τιμές του w , όπως για παράδειγμα:

- τις τιμές $G(jw)$ όπου $w \in [-\infty, \infty]$ ($w = -\infty, +\infty, 0$ τις τιμές για τις οποίες η $G(jw)$ βρίσκεται στον πραγματικό άξονα ή στον φανταστικό άξονα),
- τις τιμές $G(s)$ για $s = (\rho + jw)e^{j\theta}$ του $\rho \rightarrow 0$ όπου jw ένας



Παράδειγμα 5 (3)



πόλος της $G(s)$ στον φανταστικό άξονα και $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$, καθώς και

- τις τιμές $G(s)$ για $s = Re^{j\theta}$ του $\rho \rightarrow \infty$ όπου $\theta \in [90^\circ, -90^\circ]$.

Παρατηρώ επίσης ότι

$$\|G(j\omega)\| = \|G(-j\omega)\| \text{ και } \theta(-j\omega) = -\theta(j\omega).$$



Παράδειγμα 5 (4)

Βήμα 1 Προσδιορίζουμε προσεγγιστικά το πολικό διάγραμμα της $G(s)$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \Rightarrow$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 11j\omega + 6} =$$

$$= \frac{1}{6(1 - \omega^2) + j(11\omega - \omega^3)}$$

$$= \frac{6(1 - \omega^2) - j(11\omega - \omega^3)}{36(1 - \omega^2)^2 + (11\omega - \omega^3)^2}$$

$$= \frac{6(1 - \omega^2)}{36(1 - \omega^2)^2 + (11\omega - \omega^3)^2} - j \frac{(11\omega - \omega^3)}{36(1 - \omega^2)^2 + (11\omega - \omega^3)^2}$$



Παράδειγμα 5 (5)

$$G(j\omega) = \frac{6(1 - \omega^2)}{36(1 - \omega^2)^2 + (11\omega - \omega^3)^2} - j \frac{(11\omega - \omega^3)}{36(1 - \omega^2)^2 + (11\omega - \omega^3)^2}$$

| Τιμές της $G(s)$ για s πάνω στον φανταστικό άξονα της C | |
|--|---------------------------|
| Αρχική τιμή | |
| $\omega = 0$ | $G(j0) = 1/6$ |
| $Re(G(j\omega)) = 0 \Rightarrow 1 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \pm 1$ | |
| $\omega = 1$ | $G(j1) = -j 1/10$ |
| $\omega = -1$ | $G(j(-1)) = +j 1/10$ |
| $Im(G(j\omega)) = 0 \Rightarrow \omega(11 - \omega^2) = 0 \Rightarrow \omega \in \{0, \sqrt{11}, -\sqrt{11}\}$ | |
| $\omega = \sqrt{11}$ | $G(j(\sqrt{11})) = -1/60$ |
| $\omega = -\sqrt{11}$ | $G(j(-\sqrt{11})) = 1/60$ |



Παράδειγμα 5 (6)

Τιμές της $G(s)$ για s πάνω στον φανταστικό άξονα της C

| Τελική τιμή | |
|------------------------------|--|
| $\omega \rightarrow +\infty$ | $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(j\omega) = 0$ |
| $\omega \rightarrow -\infty$ | $\lim_{\omega \rightarrow -\infty} G(j\omega) = 0$ |



Παράδειγμα 5 (7)

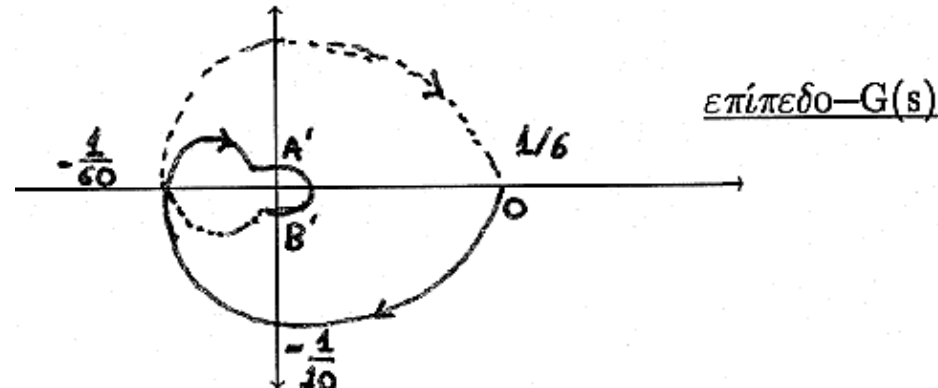
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Τιμές της $G(s)$ για s στο υπόλοιπο τμήμα της C .

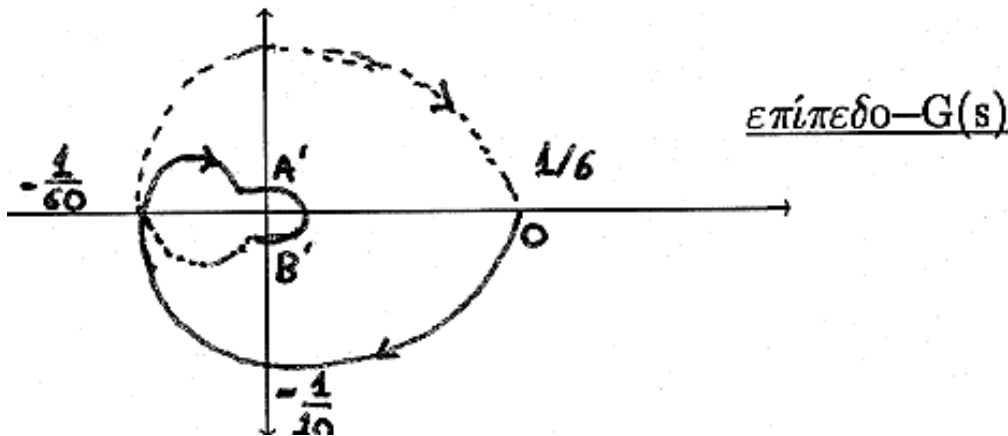
$$s = Re^{j\theta} \text{ όπου } R \rightarrow \infty$$

$$G(Re^{j\theta}) = \frac{1}{(Re^{j\theta} + 1)(Re^{j\theta} + 2)(Re^{j\theta} + 3)} \cong \frac{1}{R^3} e^{j(-3\theta)}$$

$$\theta \in [90^\circ, -90^\circ] \Rightarrow -3\theta \in [-270^\circ, 270^\circ] \text{ και } \|G(Re^{j\theta})\| \rightarrow 0$$



Παράδειγμα 5 (8)



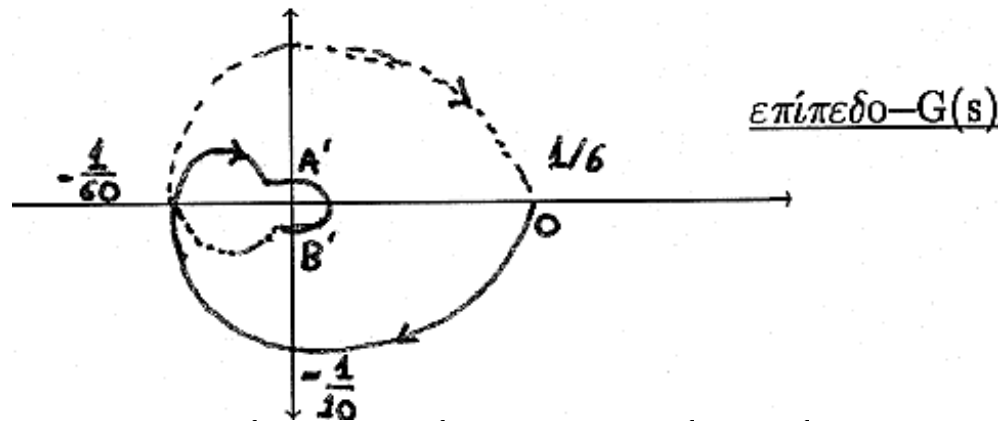
Το κλειστό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν και μόνο εάν η Γ περιστρέφει περί το σημείο $(-\frac{1}{K}, 0)$

$$N = -P \text{ φορές}$$

$P :=$ πόλοι της $G(s)$ στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο.



Παράδειγμα 5 (9)



$$-\frac{1}{k} < -\frac{1}{60} \text{ και } -\frac{1}{k} > \frac{1}{6} \Rightarrow$$
$$0 < k < 60 \text{ και } -6 < k < 0 \Rightarrow$$
$$-6 < k < 60$$

Για τις τιμές $k = -6$ και $k = 60$ το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές σε κύκλο πόλων $\{0\}$ και $\{j\sqrt{11}, -j\sqrt{11}\}$ αντίστοιχα, πολλαπλότητας ένα στο φανταστικό άξονα.



Παράδειγμα 5 (10)

Σημείωση: Το ίδιο πρόβλημα μπορεί να λυθεί βάσει του κριτηρίου Routh δεδομένου ότι η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{G(s)K}{1 + G(s)K} = \frac{\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}K}{1 + \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}} \\ &= \frac{K}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + K} \end{aligned}$$

Συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι

$$a(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + K$$



Παράδειγμα 5 (11)

Σχηματίζω τον πίνακα Routh

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & 6 & 6 + K \\ s^1 & \frac{60 - K}{K} & 0 \\ s^0 & 6 + K & 0 \end{array}$$

$$60 - K > 0 \text{ και } 6 + K > 0 \Rightarrow -6 < K < 60.$$

Για την τιμή $K = -6$ έχω ως πόλους τις τιμές

$\{0, -3 - j\sqrt{11}, -3 + j\sqrt{11}\}$ και συνεπώς το σύστημα είναι ευσταθές σε κύκλο επειδή έχει ένα πόλο πολλαπλότητας ένα στον φανταστικό άξονα. Για την τιμή $K = 60$ έχω ως πόλους τις τιμές $\{-6, j\sqrt{11}, -j\sqrt{11}\}$ και άρα το σύστημα είναι ευσταθές σε κύκλο για τον ίδιο λόγο.

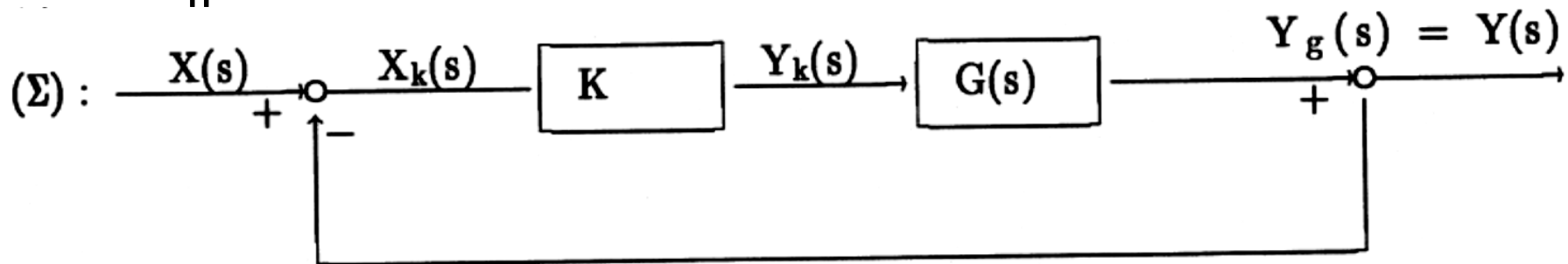


Παράδειγμα 6 (1)

Έστω ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς K για τις οποίες το κλειστό σύστημα

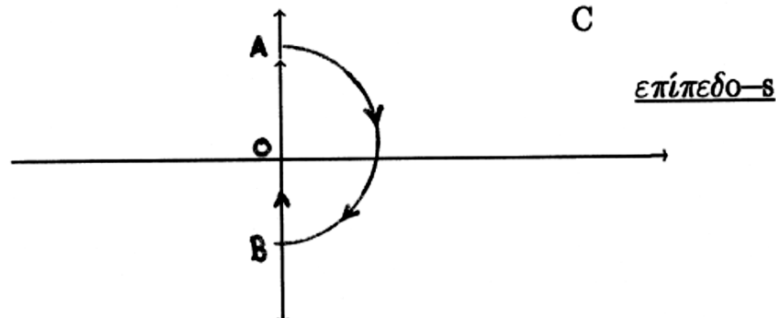


είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.



Παράδειγμα 6 (2)

Έστω το επίπεδο- s το δεξιό μιγαδικό επίπεδο



Τιμές της $G(s)$ για s πάνω στον φανταστικό άξονα της C .

Αρχική τιμή.

$s = \rho e^{j\theta}$ όπου $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$, και $\rho \rightarrow 0$

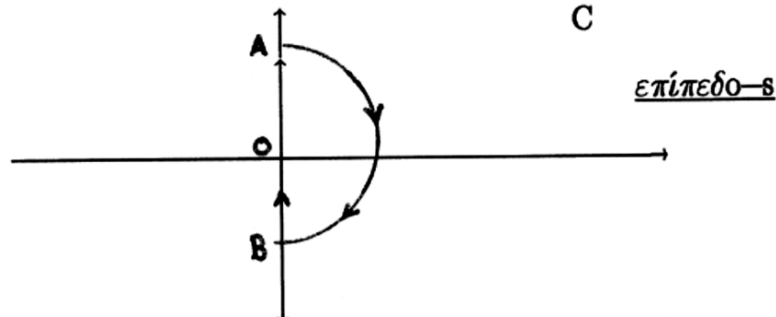
$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G(\rho e^{j\theta}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho e^{j\theta} (\rho e^{j\theta} + 1)} \cong \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} e^{-j\theta} = \infty e^{-j\theta}$$

Καθώς το θ παίρνει τιμές στο διάστημα $[-90^\circ, 90^\circ]$ η $-\theta$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[90^\circ, -90^\circ]$.



Παράδειγμα 6 (3)

Έστω το επίπεδο-s το δεξιό μιγαδικό επίπεδο



Προσδιορίζουμε προσεγγιστικά το πολικό διάγραμμα της $G(s)$.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s(s+1)} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{1}{-\omega^2 + j\omega} \\ &= \frac{-\omega^2 - j\omega}{\omega^4 + \omega^2} = -\frac{1}{\omega^2 + 1} - j\frac{1}{\omega^3 + \omega} \end{aligned}$$



Παράδειγμα 6 (4)

$$G(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2 + 1} - j\frac{1}{\omega^3 + \omega}$$

Ενδιάμεσες τιμές στον φανταστικό άξονα

$$\omega = 1$$

$$G(j1) = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$$

$$\omega = 2$$

$$G(j2) = -\frac{1}{5} - j\frac{1}{10}$$

$$\omega = -1$$

$$G(-j1) = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$$

$$\omega = -2$$

$$G(-j2) = -\frac{1}{5} + j\frac{1}{10}$$

Τελική τιμή

$$\omega \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(j\omega) = 0$$

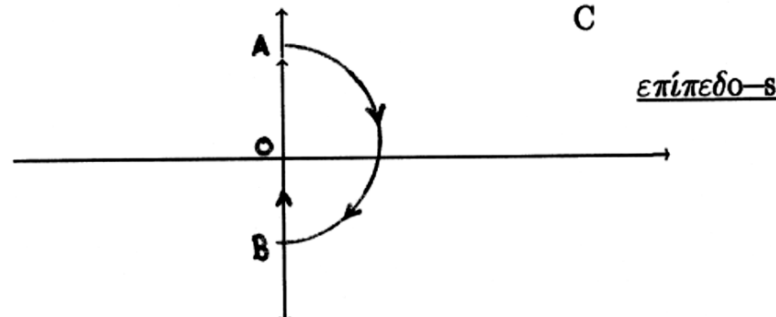
$$\omega \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} G(j\omega) = 0$$



Παράδειγμα 6 (5)

Έστω το επίπεδο- s το δεξιό μιγαδικό επίπεδο



Τιμές της $G(s)$ για s στο υπόλοιπο τμήμα της C .

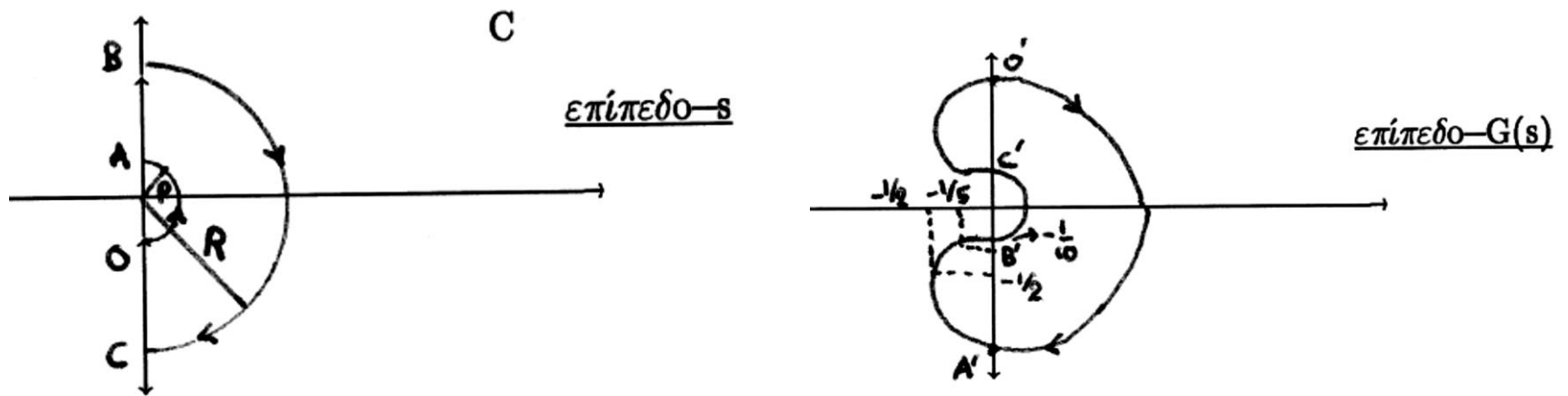
$$s = Re^{j\theta} \text{ όπου } R \rightarrow \infty$$

$$G(Re^{j\theta}) = \frac{1}{Re^{j\theta}(Re^{j\theta} + 1)} \cong \frac{1}{R^2} e^{j(-2\theta)}$$

$$\theta \in [90^\circ, -90^\circ] \Rightarrow -2\theta \in [-180^\circ, 180^\circ] \text{ και } \|G(Re^{j\theta})\| \rightarrow 0.$$



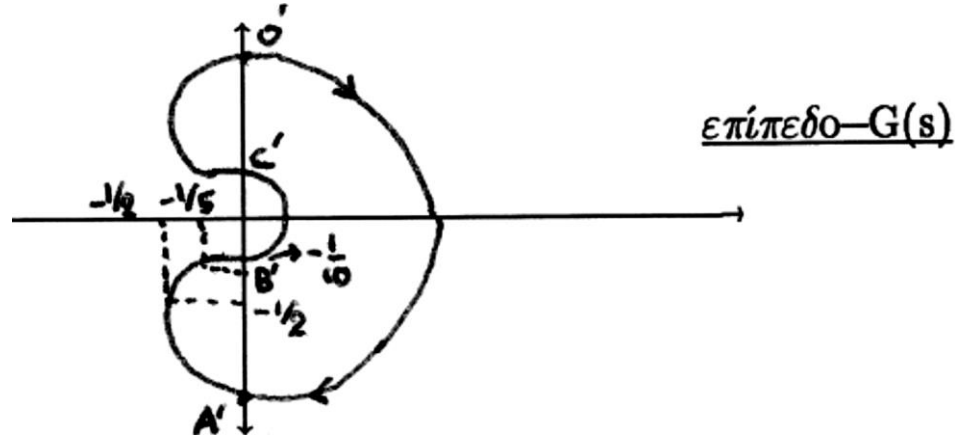
Παράδειγμα 6 (6)



$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$



Παράδειγμα 6 (7)



Το κλειστό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν και μόνο εάν η Γ περιστρέφει περί το σημείο $\left(-\frac{1}{k}, 0\right)$

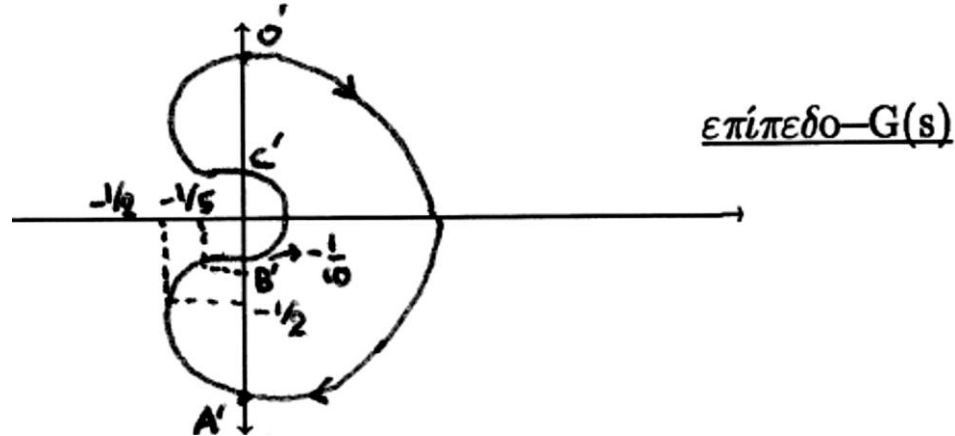
$$N = -P \text{ φορές}$$

$P :=$ πόλοι της $G(s)$ στο δεξιό μιγαδικό επίπεδο

$$-\frac{1}{k} < 0 \Rightarrow k > 0$$



Παράδειγμα 6 (8)



Άρα για θετικές τιμές του k το σύστημα μου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Για $k = 0$ το σύστημα μου είναι ανοικτό και είναι ευσταθές σε κύκλο λόγω του ότι έχει έναν πόλο $\{0\}$ στον φανταστικό άξονα πολλαπλότητας ένα.



Παράδειγμα 6 (9)

Σημείωση: Το ίδιο πρόβλημα μπορεί να λυθεί βάσει του κριτηρίου Routh δεδομένου ότι η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{G(s)K}{1 + G(s)K} = \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1 + \frac{K}{s(s+1)}} = \frac{K}{s^2 + s + K}$$

Συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι

$$a(s) = s^2 + s + K$$



Παράδειγμα 6 (10)

Σχηματίζω τον πίνακα Routh

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & k \\ s & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \end{array}$$

$$60 - K > 0 \text{ και } 6 + K > 0 \Rightarrow -6 < K < 60$$

Το σύστημα μου είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σύμφωνα με το κριτήριο Routh εάν και μόνο εάν $(a_i > 0, i = 0,1,2)$ και συνεπώς $k > 0$ και τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα Routh είναι θετικά, δηλαδή $k > 0$.

Για την τιμή $k = 0$ το σύστημα μου είναι ευσταθές σε κύκλο για τον λόγο που αναφέραμε και παραπάνω.



Πλεονεκτήματα κριτηρίου Nyquist έναντι Routh (1)

1. Η εφαρμογή του κριτηρίου Routh χρειάζεται την αναλυτική περιγραφή του συστήματος σε αντίθεση με το κριτήριο Nyquist όπου το διάγραμμα Nyquist μπορεί να επιτευχθεί πειραματικά χωρίς γνώση της αναλυτικής περιγραφής του συστήματος.

Ορισμός. Η έξοδος ενός ασυμπτωτικά ευσταθούς συστήματος στην μόνιμη κατάσταση υπό ημιτονοειδή διέγερση ονομάζεται **αρμονική απόκριση** του συστήματος.

Αν θεωρήσω ως είσοδο την ημιτονοειδή διέγερση

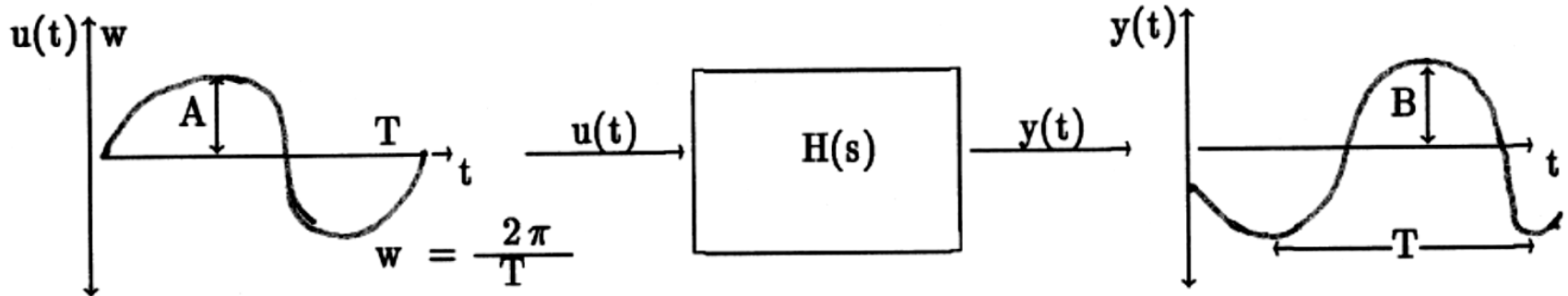
$$x(t) = A \sin(\omega t) \text{ (πλάτους } A \text{ και γωνιακής συχνότητας } \omega)$$



Πλεονεκτήματα κριτηρίου Nyquist έναντι Routh (2)

$$y_{\mu\omicron\nu}(t) = A|H(j\omega)| \sin(\omega t + \theta(\omega))$$

Συμπέρασμα: Το πλάτος της εξόδου είναι το πλάτος της εισόδου πολλαπλασιασμένο με $|H(j\omega)|$ ενώ η γωνιακή συχνότητα της εξόδου είναι η γωνιακή συχνότητα της εισόδου μετατοπισμένη κατά $\theta(\omega)$.

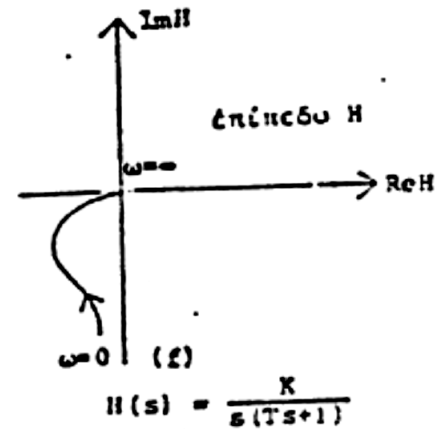
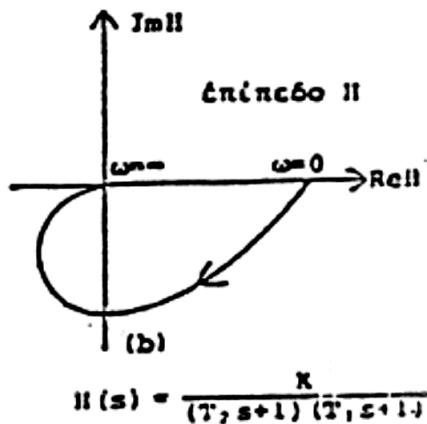
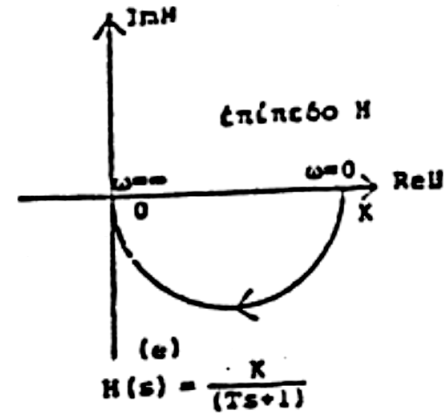
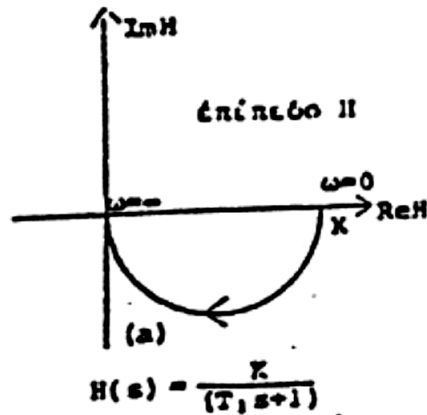


Πλεονεκτήματα κριτηρίου Nyquist έναντι Routh (3)

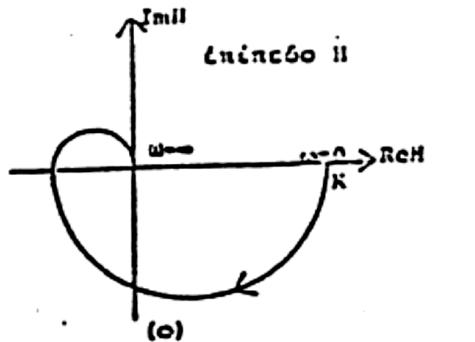
2. Μια μεταβολή στις παραμέτρους του συστήματος (προσθήκη πόλων ή μηδενικών) έχει ως αποτέλεσμα να χρησιμοποιηθεί το κριτήριο Routh από την αρχή σε αντίθεση με το κριτήριο Nyquist όπου είναι γνωστή η επίδραση των παραμέτρων του συστήματος στο διάγραμμα Nyquist.



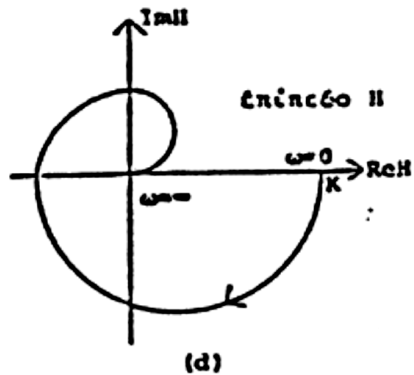
Σχήμα 1



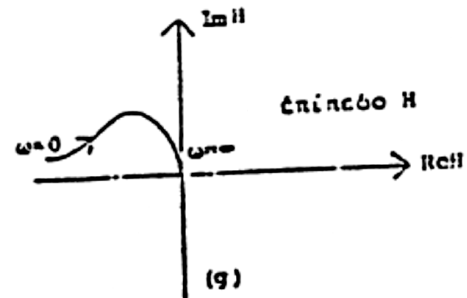
Σχήμα 2



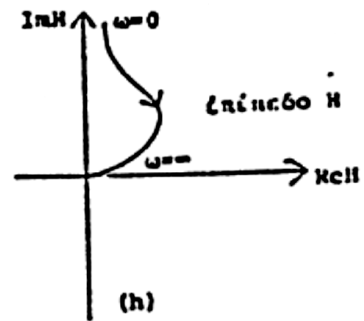
$$H(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$$



$$H(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$$



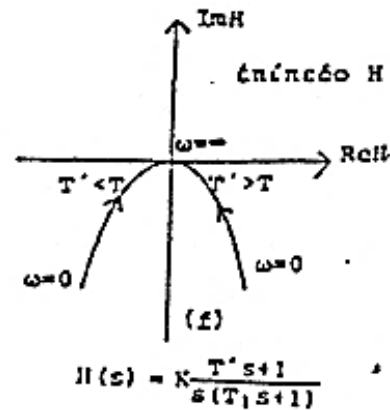
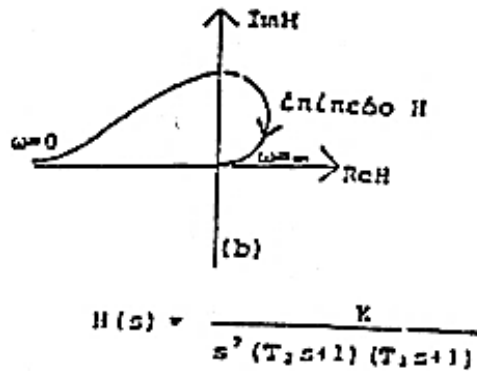
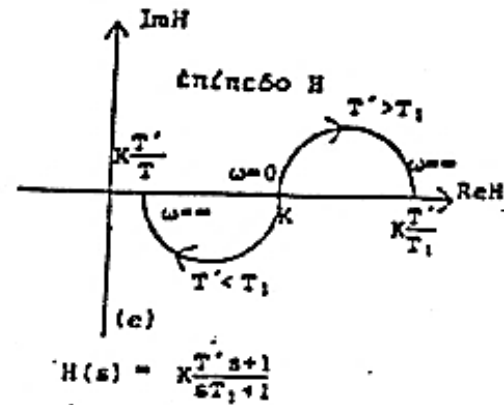
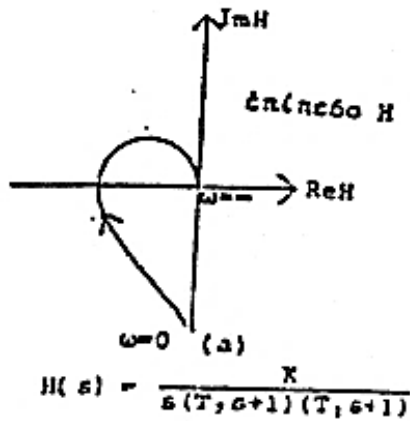
$$H(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)}$$



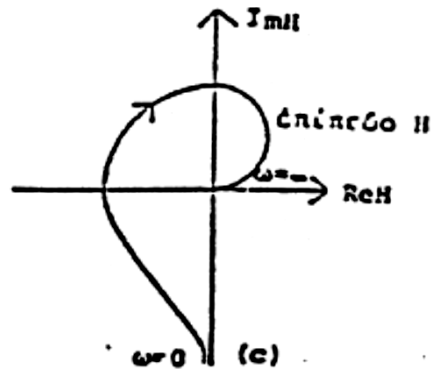
$$H(s) = \frac{K}{s^3(Ts+1)}$$



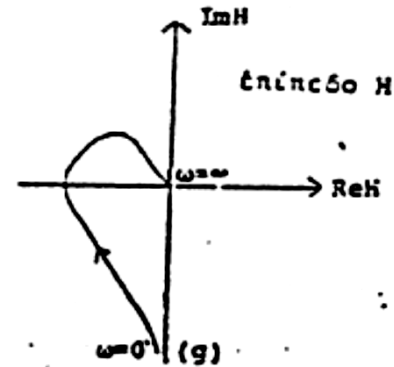
Σχήμα 3



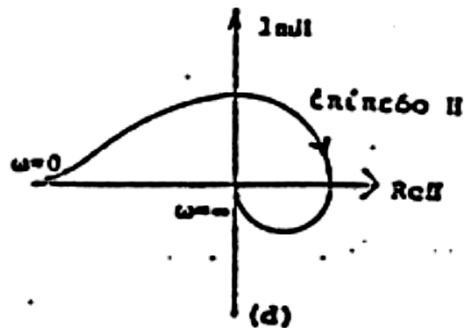
Σχήμα 4



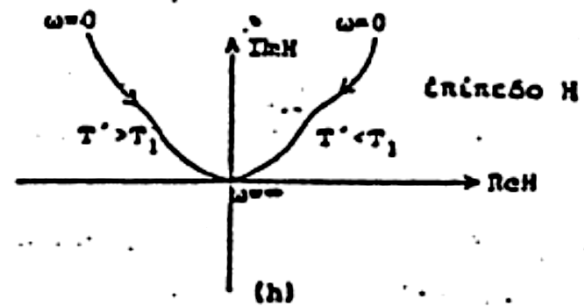
$$H(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$$



$$H(s) = K \frac{T's+1}{s(T_1s+1)(T_2+1)}$$



$$H(s) = \frac{K}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$$

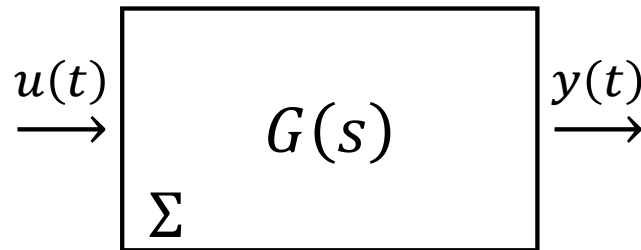


$$H(s) = K \frac{T's+1}{s^2(T_1s+1)}$$



Άσκηση (1)

Θεωρείστε ένα γραμμικό σύστημα Σ μιας εισόδου και μιας εξόδου



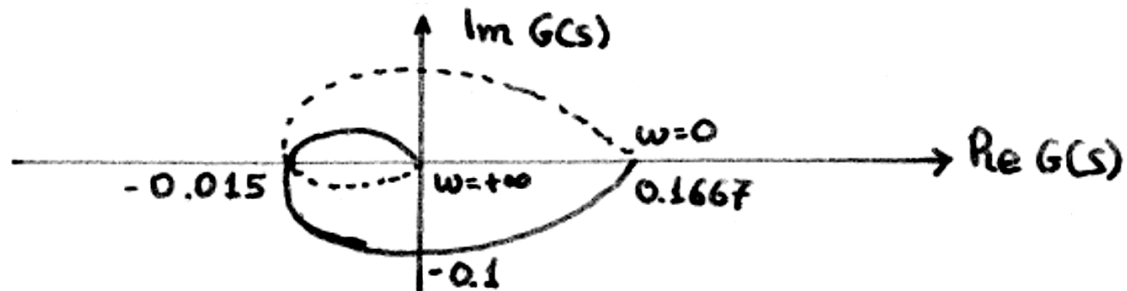
που διέπεται από τον παρακάτω νόμο

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 6 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = u(t)$$

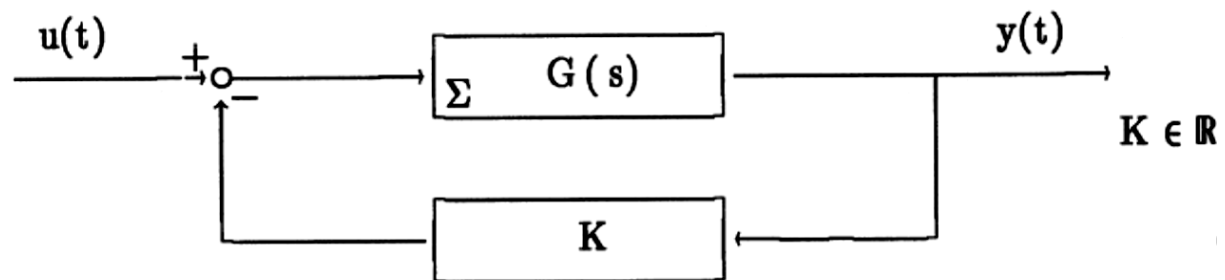
όπου $u(t) = 6\eta\mu(9t)$ με $t \geq 0$. Δεδομένου ότι το διάγραμμα Nyquist της συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$ του παραπάνω ανοικτού συστήματος είναι το εξής:



Άσκηση (2)



Να βρεθεί για ποιες τιμές του K το παρακάτω κλειστό σύστημα είναι ευσταθές; (Να χρησιμοποιηθεί το Θεώρημα του Nyquist)



Συστήματα ελάχιστης φάσης

- Μια συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ονομάζεται συνάρτηση **ελάχιστης φάσης (minimum phase)** όταν δεν περιέχει πόλους ή μηδενικά στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

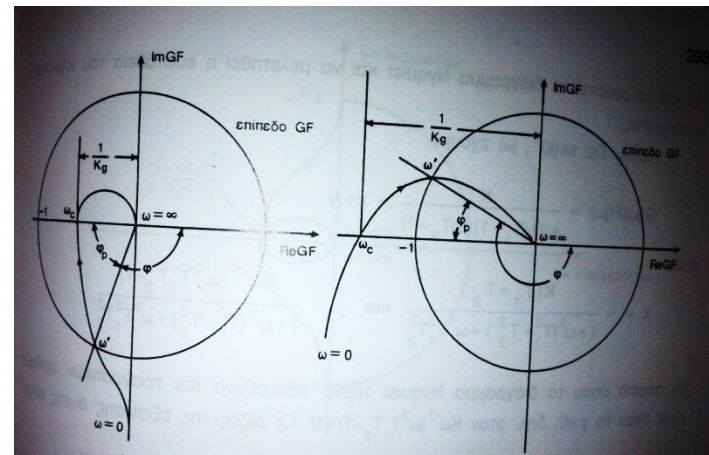


Περιθώριο ενίσχυσης (gain margin)

Ορισμός. Έστω ω_c η κρίσιμη συχνότητα (phase crossover frequency) όπου το διάγραμμα Nyquist της $G(s)F(s)$ τέμνει τον άξονα $\text{Re}GF$. Τότε το **περιθώριο ενίσχυσης (gain margin) K_g** του κλειστού συστήματος δίνεται από την σχέση

$$K_g(\text{db}) = -20 \text{Log}_{10} |G(j\omega_c)F(j\omega_c)|.$$

Φυσική Ερμηνεία: Το περιθώριο ενίσχυσης είναι το ποσό ενίσχυσης σε db κατά το οποίο επιτρέπεται να αυξηθεί η συνάρτηση μεταφοράς του ανοιχτού βρόγχου προτού το κλειστό σύστημα μεταπέσει σε αστάθεια (συνήθως με αύξηση της σταθεράς ενίσχυσης K).

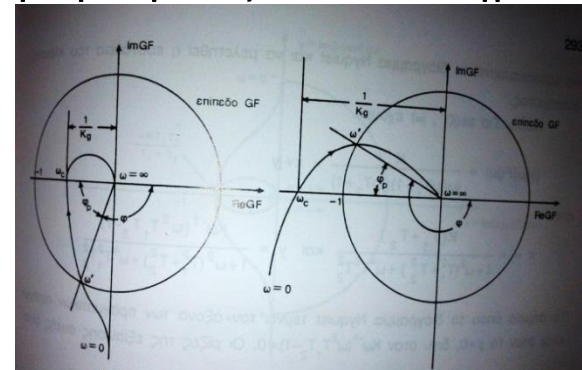


Περιθώριο φάσης (phase margin) (1)

Ορισμός. Έστω ω' η συχνότητα (**gain crossover frequency**) όπου το πλάτος του διαγράμματος Nyquist της $G(s)F(s)$ είναι μονάδα, δηλαδή $|G(j\omega')F(j\omega')| = 1$, και έστω φ η γωνία της $G(j\omega')F(j\omega')$. Τότε το **περιθώριο φάσης (phase margin)** του κλειστού συστήματος δίνεται από την σχέση

$$\varphi_p = \varphi + 180.$$

Φυσική Ερμηνεία: Το **περιθώριο φάσης** είναι η γωνία που πρέπει να περιστραφεί το διάγραμμα Nyquist της $G(j\omega')F(j\omega')$ γύρω από την αρχή των αξόνων μέχρι έως όπου το σημείο όπου $|G(j\omega')F(j\omega')| = 1$ ταυτιστεί με το κρίσιμο σημείο $(-1,0)$ (με μεταβολές στις παραμέτρους του συστήματος και όχι στη σταθερά ενίσχυσης).



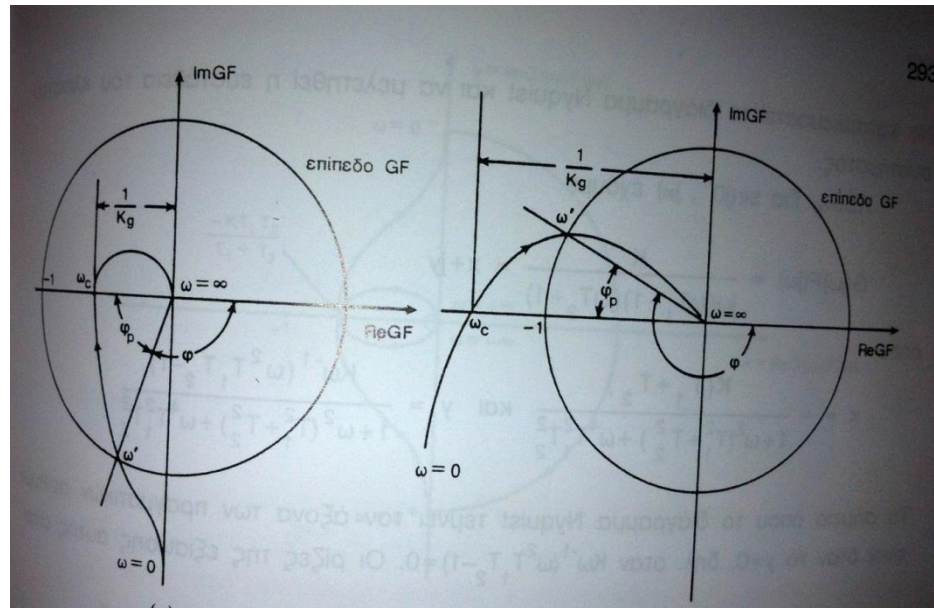
Περιθώριο φάσης (phase margin) (2)

Τα περιθώρια φάσης φ_p και K_g δίνουν μια εκτίμηση του πόσο κοντά στο κρίσιμο σημείο $(-1,0)$ είναι το διάγραμμα Nyquist της $G(s)F(s)$. Συνεπώς φ_p και K_g μας δίνουν πληροφορίες για την σχετική ευστάθεια του κλειστού συστήματος.



Συστήματα ελάχιστης φάσης (minimum phase) (1)

Ένα κλειστό σύστημα είναι **ευσταθές**, όταν τα περιθώρια φάσης φ_p και ενίσχυσης K_g είναι θετικά.



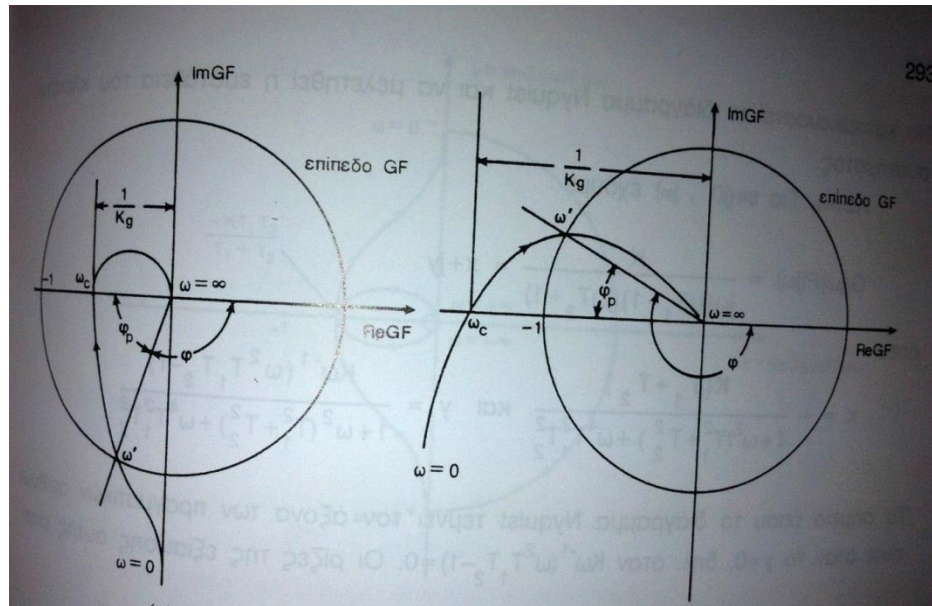
Ευσταθές

Ασταθές



Συστήματα ελάχιστης φάσης (minimum phase) (2)

Ένα κλειστό σύστημα είναι **ασταθές**, όταν έστω και ένα από τα δύο περιθώρια φάσης φ_p και ενίσχυσης K_g είναι αρνητικό.



Ευσταθές

Ασταθές



Συστήματα ελάχιστης φάσης (minimum phase) (3)

Η σχετική ευστάθεια κρίνεται από το μέγεθος των φ_p και K_g . Όσο πιο μεγάλα τα φ_p και K_g τόσο πιο ευσταθές είναι το κλειστό σύστημα.

Η έννοια της **σχετικής ευστάθειας**, λοιπόν αναφέρεται στο κατά πόσο το σύστημα θα μπορούσε να μεταπέσει σε αστάθεια, αν το διάγραμμα Nyquist της $G(s)F(s)$ αλλάξει λίγο π.χ. λόγω των μεταβολών των παραμέτρων.

Όσο πιο μεγάλα τα φ_p και K_g τόσο πιο δύσκολα θα μεταπέσει το σύστημα σε αστάθεια.



Παράδειγμα 7 (1)

$$G(s)F(s) = \frac{1}{s(2s+1)(3s+1)}$$

$$\blacksquare G(j\omega)F(j\omega) = \frac{1}{j\omega(2j\omega+1)(3j\omega+1)} = -\frac{5}{(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)} + i \left(-\frac{1}{\omega(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)} + \frac{6\omega}{(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)} \right)$$

$$\blacksquare \operatorname{Im}(G(j\omega)F(j\omega)) = -\frac{1}{\omega(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)} + \frac{6\omega}{(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)} = \frac{-1+6\omega^2}{\omega+13\omega^3+36\omega^5}$$

$$\blacksquare \operatorname{Im}(G(j\omega)F(j\omega)) = 0 \Rightarrow \frac{-1+6\omega^2}{\omega+13\omega^3+36\omega^5} = 0 \Rightarrow$$

$$\left\{ \left\{ \omega \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{6}} \right\}, \left\{ \omega \rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} \right\} \right\}, \boxed{\omega_c \rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}}}$$

κρίσιμη συχνότητα
(phase crossover frequency)



Παράδειγμα 7 (2)

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s(2s + 1)(3s + 1)}$$

- $G(j\omega_c)F(j\omega_c) = \frac{K}{j\omega_c(2j\omega_c+1)(3j\omega_c+1)}$.
- $G\left(j\frac{1}{\sqrt{6}}\right)F\left(j\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{6K}{5}$.
- Περιθώριο ενίσχυσης για $K=1$: $-20\log_{10}[\text{Abs}[-6/5]] = -1.58362$.
- Για να είναι το κλειστό σύστημα ευσταθές θα πρέπει $K > 0$ και
$$-\frac{6K}{5} > -1 \Rightarrow -6K > -5 \Rightarrow 6K < 5 \Rightarrow K < \frac{5}{6}$$
- Περιθώριο ενίσχυσης για $K=1/6$: $-20\log_{10}[\text{Abs}[-6/5 * 1/6]] = 13.9794$.



Παράδειγμα 7 (3)

$$G(s)F(s) = \frac{1}{s(2s+1)(3s+1)} \quad \text{gain crossover frequency}$$

- $$G(j\omega)F(j\omega) = \frac{1}{j\omega(2j\omega+1)(3j\omega+1)} =$$

$$= -\frac{5}{(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)} + i \left(\frac{6\omega^2-1}{\omega(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)} \right).$$
- $$|G(j\omega)F(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(-\frac{5}{(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)} \right)^2 + \left(\frac{6\omega^2-1}{\omega(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)} \right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\omega = 0.44636043023915484 \quad \eta \quad \omega = -0.44636043023915484$$

$$\frac{1}{j\omega(2j\omega+1)(3j\omega+1)} \cdot \{\omega \rightarrow 0.44636043023915484\} =$$

$$= -0.9961881684164146 + 0.08723034510505409i$$



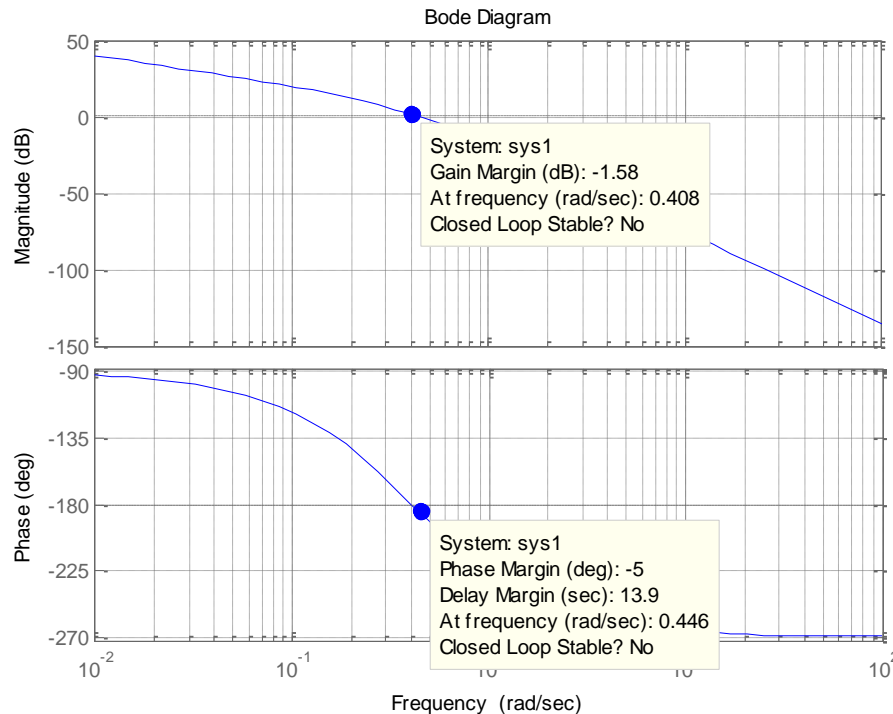
Παράδειγμα 7 (4)

(περιθώριο φάσης)

$$\text{Arg}[-0.9961881684164146 + 0.08723034510505409i] = 3.0542513034184005 \text{ rad}$$

$$3.0542513034184005 * 180 / \text{Pi} = 174.99570925820498^{\circ}$$

$$180^{\circ} + 174.99570925820498^{\circ} = 354.995709258205^{\circ} = -5.004290741795038^{\circ}$$



Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι., 2011, *Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Συστημάτων και Ελέγχου*, Τόμος Α: Κλασική Θεωρία Ελέγχου, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Πουλιέζος Αναστάσιος, 2013, *Περί Συστημάτων Ελέγχου. Εισαγωγικό Εγχειρίδιο της Σύγχρονης Θεωρίας Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου*, ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε.
- Norman Nise, 2011, *Control Systems Engineering*, 6th Edition, John Willey.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Κλασική Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 14: Κριτήριο Nyquist». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS432/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.





Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

