ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Κλασσική Θεωρία Ελέγχου

Ενότητα 16. Υπολογισμός αντισταθμιστή με χρήση διοφαντικών εξισώσεων

Νίκος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Θεώρημα Sylvester (πρώτα πολυώνυμα)
- Επίλυση πολυωνυμικών διοφαντικών εξισώσεων
- Σχεδίαση Αντισταθμιστή.
- Αποσύζευξη εισόδων-εξόδων (σύστημα με 2 εισόδους και 2 εξόδους).

Σκοποί Ενότητας

- Επίλυση του προβλήματος σχεδίασης αντισταθμιστή με την χρήση πολυωνυμικών διοφαντικών εξισώσεων.
- Αποσύζευξη εισόδων-εξόδων (σύστημα με 2 εισόδους και 2 εξόδους).

Το Πρόβλημα Σχεδίασης Αντισταθμιστή (1)

Θεωρείστε ένα γραμμικό σύστημα Σ, μ.ε.μ.ε. με την παρακάτω περιγραφή στο πεδίο της συχνότητας:

$$\xrightarrow{x(s)} \boxed{G(s)} \rightarrow y(s)$$

όπου $y(s) = \mathcal{L}[y(t)],\ x(s) = \mathcal{L}[x(t)]$.

Έστω

$$G(s) = \frac{h(s)}{d(s)} = \frac{h_{n-1}s^{n-1} + \cdots + h_1 s + h_0}{d_n s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1 s + d_0}$$

όπου $h(s), d(s)$ είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους.

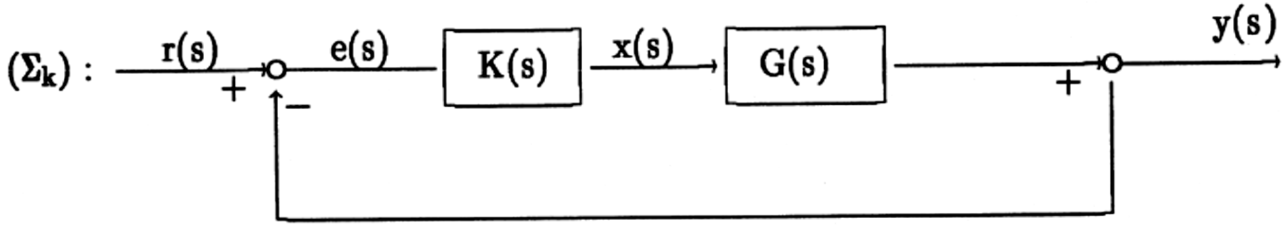
Το Πρόβλημα Σχεδίασης Αντισταθμιστή (2)

<u>Πρόβλημα Σχεδιασμού Αντισταθμιστή</u> (Design of Controller)

Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς $K(s)$ ενός συστήματος (αντισταθμιστή) (compensator ή controller)

$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)}$$

όπου $\deg[h_c(s)] \leq \deg[d_c(s)]$ έτσι ώστε η συνάρτηση μεταφοράς του «κλειστού» συστήματος $\Sigma_k : r(s) \to y(s)$



να έχει δεδομένους (επιθυμητούς) πόλους.

Πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους (1)

Λήμμα. Τα πολυώνυμα $f(s), g(s)$ έχουν κοινό παράγοντα αν και μόνο αν υπάρχουν μη-μηδενικά πολυώνυμα $s(s)$ και $t(s)$ τέτοια ώστε

$$0 \leq degs(s) < degg(s), 0 \leq degt(s) < degf(s),$$

$$f(s)s(s) + g(s)t(s) = 0$$

Πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους (2)

(⇒) Ας υποθέσουμε ότι τα πολυώνυμα $f(s), g(s)$ έχουν κοινό παράγοντα τον $h(s)$. Τότε

$$f(s) = \left(\frac{f(s)}{h(s)}\right) h(s), g(s) = \left(\frac{g(s)}{h(s)}\right) h(s)$$

και συνεπώς

$$f(s)\frac{g(s)}{h(s)} = \left(\frac{f(s)}{h(s)}\right) h(s)\frac{g(s)}{h(s)} = \frac{f(s)}{h(s)} g(s) \Rightarrow$$

$$f(s)\left(\frac{g(s)}{h(s)}\right) - \left(\frac{f(s)}{h(s)}\right) g(s) = 0$$

Πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους (3)

Συνεπώς υπάρχουν μη-μηδενικά πολυώνυμα $s(s) = \frac{g(s)}{h(s)}$ και $t(s) = -\frac{f(s)}{h(s)}$ τέτοια ώστε

$$0 \le deg s(s) < deg g(s), 0 \le deg t(s) < deg f(s),$$

$$f(s)s(s) + g(s)t(s) = 0$$

Πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους (4)

(⇐) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν μη-μηδενικά πολυώνυμα $s(s)$ και $t(s)$ τέτοια ώστε

$$0 \leq degs(s) < degg(s), 0 \leq degt(s) < degf(s),$$

$$f(s)s(s) + g(s)t(s) = 0$$

$$\downarrow$$

$$f(s)s(s) = -g(s)t(s)$$

- Κάθε παράγοντας του $f(s)$ είναι παράγοντας του $g(s)t(s)$.

1η περίπτωση. Υπάρχει παράγοντας του $f(s)$ που είναι παράγοντας του $g(s)$ (κοινός παράγοντας).

- **ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ :** Τα $f(s), g(s)$ έχουν κοινό παράγοντα.

Πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους (5)

(⇐) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν μη-μηδενικά πολυώνυμα $s(s)$ και $t(s)$ τέτοια ώστε

$$0 \leq degs(s) < degg(s), 0 \leq degt(s) < degf(s),$$

$$f(s)s(s) + g(s)t(s) = 0$$

$$\downarrow$$

$$f(s)s(s) = -g(s)t(s)$$

2η περίπτωση. Δεν υπάρχει παράγοντας του $f(s)$ που να είναι παράγοντας του $g(s)$. Συνεπώς θα πρέπει όλοι οι παράγοντες του $f(s)$ να είναι παράγοντες του $t(s)$. Το $t(s)$ όμως είναι μη-μηδενικό και έχει βαθμό μικρότερο του $f(s)$ και συνεπώς αυτό είναι αδύνατο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Τα $f(s), g(s)$ έχουν κοινό παράγοντα.

Πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους (6)

$$n = degf, \qquad m = degg$$

$$s = \sum_{0 \le i < m} s_i x^i, \qquad t = \sum_{0 \le i < n} t_i x^i$$

$$P(x) = f(x)s(x) + g(x)t(x)$$

$$P(x) = (f_n s_{m-1} + g_m t_{n-1})x^{m+n-1}$$
$$+(f_n s_{m-2} + f_{n-1} s_{m-1} + g_m t_{n-m-2} + g_{m-2} t_{n-m-1})x^{m-n-2} +$$
$$+ \cdots + (f_0 s_0 + g_0 t_0)x^0$$

Πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους (7)

$$P(x) = (f_n s_{m-1} + g_m t_{n-1}) x^{m+n-1}$$
$$+(f_n s_{m-2} + f_{n-1} s_{m-1} + g_m t_{n-m-2} + g_{m-2} t_{n-m-1}) x^{m-n-2}$$
$$+$$
$$+ \cdots + (f_0 s_0 + g_0 t_0) x^0$$

$$P(x) \equiv 0 \Longrightarrow \begin{aligned} f_n s_{m-1} + g_m t_{n-1} &= 0 \\ f_n s_{m-2} + f_{n-1} s_{m-1} + g_m t_{n-m-2} + g_{m-2} t_{n-m-1} &= 0 \\ \ldots &= 0 \\ f_0 s_0 + g_0 t_0 &= 0 \end{aligned}$$

Πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους (8)

$$\boxed{(s_{m-1},\dots,s_0,t_{n-1},\dots,t_0)Syl(f,g)=0}$$

$$Syl(f,g) = \begin{pmatrix} f_n & & \cdots & & f_0 & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & f_n & & \cdots & & f_0 \\ g_m & & \cdots & g_0 & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & & g_m & & \cdots & & g_0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \text{ rows} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \text{ rows}\end{array}$$

- Για να υπαρχει **μη-μηδενικη λυση** θα πρεπει η οριζουσα Sylvester να είναι ίση με μηδέν!

Πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους (9)

$$Syl(f,g) = \begin{pmatrix} f_n & & \cdots & & f_0 & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & f_n & \cdots & & & f_0 \\ g_m & & \cdots & g_0 & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ & & g_m & \cdots & & & g_0 \end{pmatrix}$$

- Η ***resultant*** των πολυωνύμων $f(s), g(s)$, συμβολίζεται $res(f,g)$, και ορίζεται ως η ορίζουσα του πίνακα ***Sylvester*** π.χ.

$$res(f,g) = Det[Syl(f(s), g(s))].$$

Πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους (10)

Θεώρημα. Έστω $f(s), g(s)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές. Τα $f(s), g(s)$ έχουν κοινό παράγοντα αν και μόνο αν $res(f,g) = 0$.

$$f(x) = x^2 - 5x + 6, \qquad g(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$res(f,g) = \det\begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

Τα $f(x), g(x)$ έχουν κοινό παράγοντα.

Πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους (11)

Θεώρημα. Έστω $f(s), g(s)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές. Τα $f(s), g(s)$ έχουν κοινό παράγοντα αν και μόνο αν $res(f,g) = 0$.

$$f(x) = x^2 - 7x + 12, \qquad g(x) = x^2 - x$$

$$res(f,g) = \det\begin{pmatrix} 1 & -7 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 12 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 72 \neq 0$$

Τα $f(x), g(x)$ **δεν** έχουν κοινό παράγοντα.

Επίλυση πολυωνυμικής διοφαντικής εξίσωσης (1)

Έστω τα πολυώνυμα

$$d(s) = d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \cdots + d_0, \deg\big(d(s)\big) = n$$

$$h(s) = h_{n-1} s^{n-1} + h_{n-2} s^{n-2} + \cdots + h_0, \deg\big(h(s)\big) = n - 1$$

$$S(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 0 \\ \vdots & \vdots \\ s^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \\ \vdots & \vdots \\ 0 & s^{n-1} \end{bmatrix}$$

Επίλυση πολυωνυμικής διοφαντικής εξίσωσης (2)

$$x(s)=S(s)\begin{bmatrix}d(s)\\h(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ s & 0\\ \vdots & \vdots\\ s^{n-1} & 0\\ 0 & 1\\ 0 & s\\ \vdots & \vdots\\ 0 & s^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d(s)\\h(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d(s)\\ sd(s)\\ \vdots\\ s^{n-1}d(s)\\ h(s)\\ sh(s)\\ \vdots\\ s^{n-1}h(s)\end{bmatrix}$$

$$degx(s)=\max\{degx_i(s)\}=2n-1$$

Επίλυση πολυωνυμικής διοφαντικής εξίσωσης (3)

$$x(s) = x_0 + x_1 s + \cdots + x_{2n-1} s^{2n-1}$$

$$= \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{2n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{2n-1} \end{bmatrix} = R\hat{s}(s)$$

όπου $R = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{2n-1} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} d_0 & d_1 & \dots & d_{n-1} & d_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_0 & & d_{n-2} & d_{n-1} & d_n & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & d_0 & d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ h_0 & h_1 & \dots & h_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_0 & & h_{n-2} & h_{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & h_0 & h_1 & h_2 \dots & h_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Επίλυση πολυωνυμικής διοφαντικής εξίσωσης (4)

Θεώρημα. Αν τα πολυώνυμα

$$d(s) = d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \cdots + d_0, \deg\big(d(s)\big) = n$$

$$h(s) = h_{n-1} s^{n-1} + h_{n-2} s^{n-2} + \cdots + h_0, \deg\big(h(s)\big) = n-1$$

είναι πρώτα μεταξύ τους και

$$f(s) = f_{2n-1} s^{2n-1} + f_{2n-2} s^{2n-2} + \cdots + f_0, deg\big(f(s)\big) = 2n-1$$

είναι αυθαίρετο πολυώνυμο, τότε υπάρχουν πολυώνυμα $a(s), b(s)$ βαθμού μικρότερου ή ίσου του $n-1$ τέτοια ώστε:

$$a(s)d(s) + b(s)h(s) = f(s)$$

Απόδειξη:

$$a(s) = a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \cdots + a_0, deg\big(a(s)\big) = n-1$$

$$b(s) = b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \cdots + b_0, deg\big(b(s)\big) = n-1$$

Επίλυση πολυωνυμικής διοφαντικής εξίσωσης (5)

$$a(s)d(s)+b(s)h(s)=f(s)\Rightarrow\begin{bmatrix}a(s) & b(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d(s)\\h(s)\end{bmatrix}=f(s)\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ s & 0\\ \vdots & \vdots\\ s^{n-1} & 0\\ 0 & 1\\ 0 & s\\ \vdots & \vdots\\ 0 & s^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d(s)\\h(s)\end{bmatrix}=f(s)$$

$$\Rightarrow$$

Επίλυση πολυωνυμικής διοφαντικής εξίσωσης (6)

$$[a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n-1} \quad b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}]R\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{2n-1} \end{bmatrix}$$

$$= [f_0 \quad f_1 \quad \dots \quad f_{2n-1}]\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{2n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n-1} \quad b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}]R = [f_0 \quad f_1 \quad \dots \quad f_{2n-1}] \Rightarrow$$

$$[a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n-1} \quad b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}] = [f_0 \quad f_1 \quad \dots \quad f_{2n-1}]R^{-1}$$

Παράδειγμα 1 (1)

$$a(s)d(s)+b(s)h(s)=f(s)$$

$$d(s)=s^3-5s+6, \deg\big(d(s)\big)=3$$

$$h(s)=s^2-4s+4, \deg\big(h(s)\big)=2$$

$$f(s)=s^4-s^2+s-1,\ deg\big(f(s)\big)=4$$

$$[a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2]=$$

$$=[-1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} 6 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$$

Παράδειγμα 1 (2)

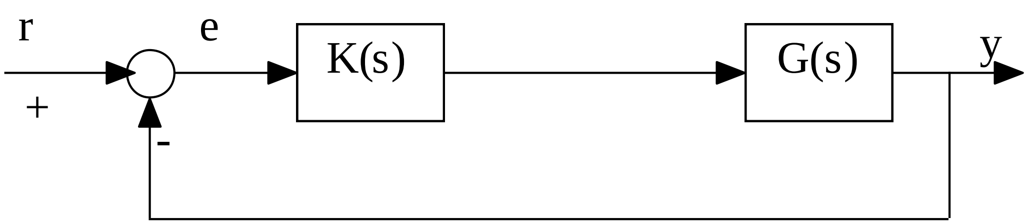
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{25}{16} & 0 & -\frac{7}{16} & -\frac{19}{8} & -\frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

Άρα

$$a(s) = \frac{1}{8} + \frac{25}{16}s + 0s^2, \qquad b(s) = -\frac{7}{16} - \frac{19}{8}s - \frac{9}{16}s^2$$

Το Πρόβλημα Σχεδίασης Αντισταθμιστή (4)

Έστω τώρα κλειστό σύστημα:



όπου

$$G(s) = \frac{h(s)}{d(s)} = \frac{h_{n-1}s^{n-1} + \cdots + h_1 s + h_0}{d_n s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1 s + d_0}, K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)}$$

και $d(s)$ και $h(s)$ πρώτα μεταξύ τους.

Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα είναι

$$H(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{h(s)h_c(s)}{d(s)d_c(s) + h(s)h_c(s)}$$

Το Πρόβλημα Σχεδίασης Αντισταθμιστή (5)

Έστω ότι θέλουμε

$p_c(s) = d(s)d_c(s) + h(s)h_c(s) = (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n), Re(p_i) < 0$

Ας θέσουμε

$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)} = \frac{b(s)}{q(s) + a(s)}, \begin{Bmatrix} \deg\big(a(s)\big) \le n - 1 \\ \deg\big(b(s)\big) \le n - 1 \end{Bmatrix}$$

$q(s) = (s + q_1)(s + q_2) \dots (s + q_{n-1})$, με $Re(-q_i) > 0$.

$$H(s) = \frac{h(s)b(s)}{d(s)\big(q(s) + a(s)\big) + h(s)b(s)}$$

$$= \frac{h(s)b(s)}{d(s)q(s) + \big(d(s)a(s) + h(s)b(s)\big)}$$

Το Πρόβλημα Σχεδίασης Αντισταθμιστή (6)

Έστω

$$\delta(s) = s^n + \delta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \delta_1 s + \delta_0$$
$$= (s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n), \text{ με } Re(-p_i) < 0$$

και έστω

$$\delta(s) - d(s) = f(s)$$
$$\deg\big(\delta(s)\big) = n, \deg\big(d(s)\big) = n \Rightarrow \deg\big(f(s)\big) < n.$$

Επειδή τα $d(s)$ και $h(s)$ είναι πρώτα μεταξύ τους θα υπάρχουν πολυώνυμα $a(s)$ *και* $b(s)$ τέτοια ώστε

$$a(s)d(s) + b(s)h(s) = q(s)f(s).$$

Τότε

Το Πρόβλημα Σχεδίασης Αντισταθμιστή (7)

$$H(s) = \frac{h(s)b(s)}{d(s)q(s) + q(s)f(s)} = \frac{h(s)b(s)}{q(s)\big(d(s) + f(s)\big)} = \frac{h(s)b(s)}{q(s)\delta(s)}$$

Έστω ότι η συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού συστήματος είναι:

$$G(s) = \frac{h(s)}{d(s)} = \frac{h_{n-1}s^{n-1} + \cdots + h_1 s + h_0}{s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1 s + d_0},$$

όπου τα πολυώνυμα $d(s)$ και $h(s)$ είναι πρώτα μεταξύ τους. Θέλουμε έναν αντισταθμιστή

$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)}, \deg(h_c(s)) \leq \deg(d_c(s))$$

τέτοιον ώστε οι πόλοι του κλειστού συστήματος να είναι οι $\{-p_1, -p_2, \dots, -p_n\}$.

Αλγόριθμος εύρεσης αντισταθμιστή (1)

Βήμα 1. Σχημάτισε το πολυώνυμο

$$\delta(s) = s^n + \delta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \delta_1 s + \delta_0$$
$$= (s + p_1)(s + p_2) \ldots (s + p_n)$$

Βήμα 2. Υπολόγισε τη διαφορά

$$\delta(s) - d(s) = f(s)$$

Βήμα 3. Διάλεξε αυθαίρετο ευσταθές πολυώνυμο $q(s)$ βαθμού $n-1$

$$q(s) = (s + q_1)(s + q_2) \ldots (s + q_{n-1}), Re(-q_i) < 0$$

Βήμα 4. Υπολόγισε πολυώνυμα $a(s)$ *και* $b(s)$ τέτοια ώστε

$$a(s)d(s) + b(s)h(s) = q(s)f(s)$$

Αλγόριθμος εύρεσης αντισταθμιστή (2)

βάσει του τύπου

$$[a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n-1}\, b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}] = [\varphi_0 \quad \varphi_1 \quad \dots \quad \varphi_{2n-1}]R^{-1}$$

όπου

$$\varphi(s) = q(s)f(s) = \varphi_0 + \varphi_1 s + \cdots + \varphi_{2n-1}s^{2n-1}$$

και R η resultant των $d(s)$ και $h(s)$.

Βήμα 5. Ο ζητούμενος αντισταθμιστής είναι

$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)} = \frac{b(s)}{q(s)+a(s)}$$

Παράδειγμα 2 (1)

Έστω ότι η συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού συστήματος είναι:

$$G(s) = \frac{h(s)}{d(s)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^2+5s+6}$$

και θέλουμε να δημιουργήσουμε έναν ελεγκτή ώστε να έχουμε:

α) μέγιστο ποσοστό υπερύψωσης (maximum overshoot) 5%,

β) χρόνο αποκατάστασης (settling time) λιγότερο από 1 sec (για τον οποίο η απόκριση παραμένει στο 2% της τελικής τιμής).

Παράδειγμα 2 (2)

Θα πρέπει λοιπόν

$$M_p = 5 \Rightarrow 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 5 \Rightarrow \zeta = 0.69$$

$$t_s \cong \frac{4}{\zeta\omega_n} \Rightarrow 1 \cong \frac{4}{0.69\omega_n} \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{0.69} = 5.80$$

Άρα επιθυμητοί πόλοι του κλειστού συστήματος

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -4 \pm i4.2$$

Βήμα 1. Σχημάτισε το πολυώνυμο

$$\delta(s) = (s + 4 - 4.2i)(s + 4 + 4.2i) = s^2 + 8s + 33.64$$

Παράδειγμα 2 (3)

Βήμα 2. Υπολόγισε την διαφορά

$$\delta(s) - d(s) = s^2 + 8s + 33.64 - s^2 - 5s - 6$$
$$= 3s + 27.64 = f(s)$$

Βήμα 3. Διάλεξε αυθαίρετο ευσταθές πολυώνυμο $q(s)$ βαθμού 2-1=1

$$q(s) = (s + q_1) \text{ με } Re(-q_1) > 0$$

Βήμα 4. Υπολόγισε πολυώνυμα $a(s), b(s)$ τέτοια ώστε

$$a(s)(s^2 + 5s + 6) + b(s) \times 1 = (s + q_1)(3s + 27.64)$$
$$= 3s^2 + (3q_1 + 27.64)s + 27.64q_1$$

Παράδειγμα 2 (4)

$$[a_0 \quad a_1 \quad b_0 \quad b_1] = [27.64q_1 \quad 3q_1 + 27.64 \quad 3 \quad 0] \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= [3 \quad 0 \quad -18 + 27.64q_1 \quad 12.64 + 3q_1]$$

και άρα $a(s) = 3, b(s) = (-18 + 27.64q_1) + (12.64 + 3q_1)s$

αλλά και

$$a(s) = 3 - k(s) \times 1,$$

$$b(s) = (-18 + 27.64q_1) + (12.64 + 3q_1)s + k(s)(s^2 + 5s + 6)$$

Παράδειγμα 2 (5)

Βήμα 5. Ο ζητούμενος αντισταθμιστής είναι:

$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)} = \frac{b(s)}{q(s)+a(s)}$$
$$= \frac{(-18+27.64q_1)+(12.64+3q_1)s}{s+q_1+3}$$

αλλά και

$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)} = \frac{b(s)}{q(s)+a(s)}$$
$$= \frac{(-18+27.64q_1)+(12.64+3q_1)s+k(s)(s^2+5s+6)}{s+q_1+3-k(s)}$$

Παράδειγμα 2 (6)

Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα είναι

$$H(s)=\frac{h(s)b(s)}{q(s)\delta(s)}=\frac{1\times\big((-18+27.64q_1)+(12.64+3q_1)s\big)}{(s+q_1)(s^2+8s+33.64)}$$
$$=\frac{(-18+27.64q_1)+(12.64+3q_1)s}{(s+q_1)(s^2+8s+33.64)}$$

αλλά και

$$H(s)=\frac{h(s)b(s)}{q(s)\delta(s)}=\frac{1\times\big((-18+27.64q_1)+(12.64+3q_1)s\big)}{(s+q_1)(s^2+8s+33.64)}$$
$$=\frac{(-18+27.64q_1)+(12.64+3q_1)s+k(s)(s^2+5s+6)}{(s+q_1)(s^2+8s+33.64)}$$

Παράδειγμα 2 (7)

Μπορούμε να επιλέξουμε το q_1 ώστε να απέχει 5-10 φορές πιο μακριά από το πραγματικό μέρος των 2 μιγαδικών πόλων ώστε να μην επηρεάσει την απόκριση στον χρόνο του συστήματος π.χ. $q_1 = 4 \times 10 = 40$ και άρα ο αντισταθμιστής μου θα έχει την παρακάτω μορφή:

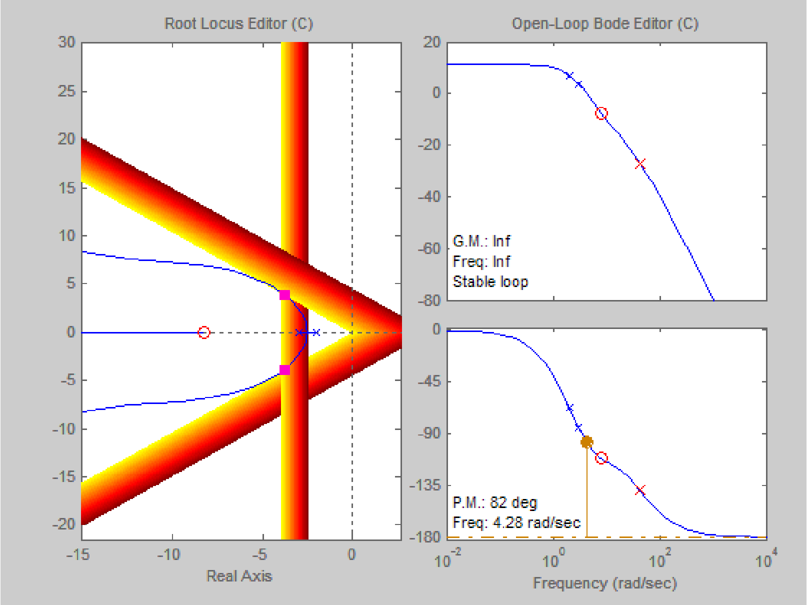
$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)} = \frac{b(s)}{q(s) + a(s)} = \frac{(-18 + 27.64 \times 40) + (12.64 + 3 \times 40)s}{s + 40 + 3}$$
$$= \frac{1087.6 + 132.64s}{s + 43}$$

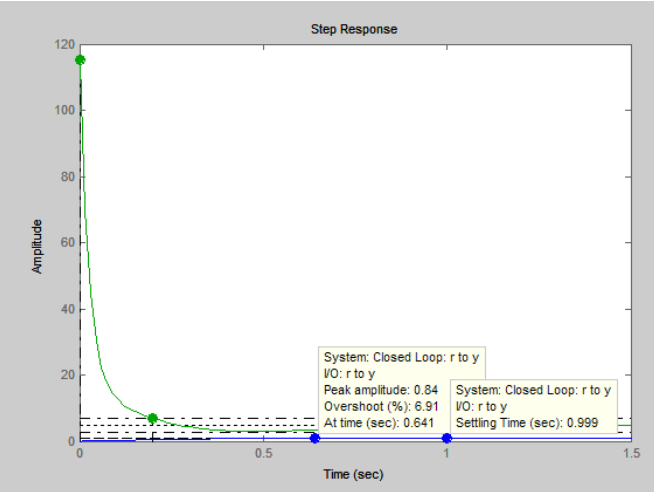
ενώ η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα γίνει:

$$H(s) = \frac{h(s)b(s)}{q(s)\delta(s)} = \frac{(-18 + 27.64q_1) + (12.64 + 3q_1)s}{(s + q_1)(s^2 + 8s + 33.64)}$$
$$= \frac{1087.6 + 132.64s}{(s + 40)(s^2 + 8s + 33.64)}$$

Παράδειγμα 2 (8)

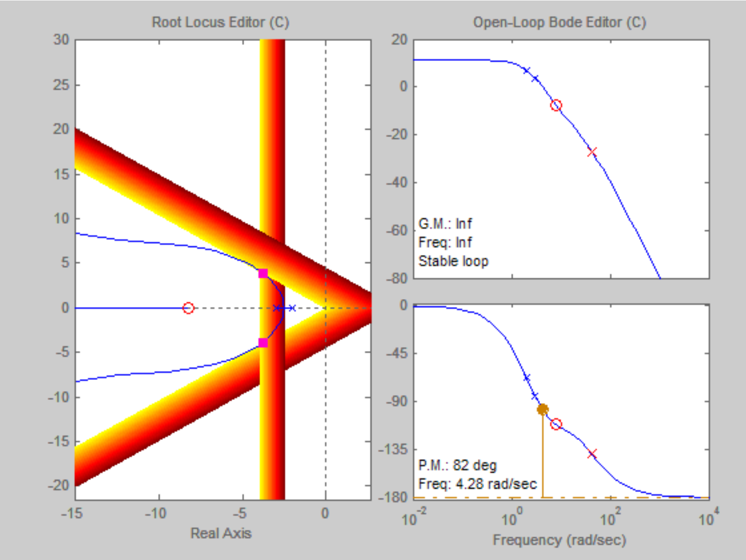
Δουλεύοντας στο Matlab με το sisotool και θέτοντας στο ανοικτό σύστημα την $G(s)$ και σαν ελεγκτή τον $K(s)$, και παίζοντας με το K στον γεωμετρικό τόπο των ριζών μπορώ να πάρω το σύστημα:

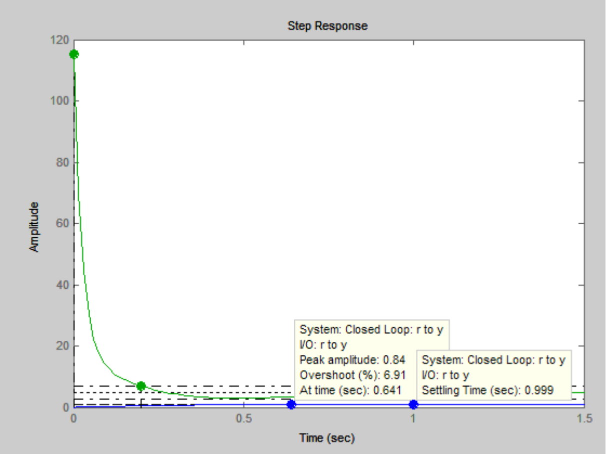




Παράδειγμα 2 (9)

Με $K(s) = 22\,\frac{1+0.12s}{1+0.023s}$ μπορούμε να πετύχουμε settling time 0.99 sec και maximum overshoot 6.91%. Μπορούμε να ελαττώσουμε το overshoot αν θέσουμε στο αρχικό μας πρόβλημα μικρότερο overshoot από αυτό που ζητάει η άσκηση. Να θέσουμε για παράδειγμα ως maximum overshoot 4% και όχι 5% και συνεπώς να βρούμε άλλον ελεγκτή.





Παράδειγμα 2 (10)

Θα μπορούσαμε επίσης να επιδιώξουμε απλοποίηση στο σύστημα δηλ.

$$(-18 + 27.64q_1) + (12.64 + 3q_1)s = k(s + q_1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -18 + 27.64q_1 = kq_1 \\ 12.64 + 3q_1 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 18.64, q_1 = 2 \\ k = 21.64, q_1 = 3 \end{cases}$$

Για $q_1 = 2$ ο αντισταθμιστής μου θα έχει την παρακάτω μορφη:

$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)} = \frac{b(s)}{q(s) + a(s)}$$

$$= \frac{(-18 + 27.64 \times 2) + (12.64 + 3 \times 2)s}{s + 2 + 3}$$

$$= \frac{37.28 + 18.64s}{s + 5} = 18.6$$

Παράδειγμα 2 (11)

Ενώ η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα γίνει:

$$H(s) = \frac{h(s)b(s)}{q(s)\delta(s)} = \frac{(-18 + 27.64q_1) + (12.64 + 3q_1)s}{(s + q_1)(s^2 + 8s + 33.64)}$$

$$= \frac{1087.6 + 132.64s}{(s + 40)(s^2 + 8s + 33.64)}$$

$$= \frac{37.28 + 18.64s}{(s + 2)(s^2 + 8s + 33.64)} = \frac{18.64}{s^2 + 8s + 33.64}$$

Παράδειγμα 3 (1)

Έστω ότι η συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού συστήματος είναι:

$$G(s) = \frac{h(s)}{d(s)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^2+5s+6}$$

και θέλουμε να δημιουργήσουμε έναν ελεγκτή ώστε να έχουμε:

α) μέγιστο ποσοστό υπερύψωσης (maximum overshoot) 5%,

β) χρόνο αποκατάστασης (settling time) λιγότερο από 1 sec.

Παράδειγμα 3 (2)

Θα πρέπει λοιπόν

$$M_p = 5 \Rightarrow 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 5 \Rightarrow \zeta = 0.69$$

$$t_s \cong \frac{4}{\zeta\omega_n} \Rightarrow 1 \cong \frac{4}{0.69\omega_n} \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{0.69} = 5.80$$

Άρα επιθυμητοί πόλοι του κλειστού συστήματος

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -4 \pm i4.2$$

Έστω ότι ο PID ελεγκτής που αναζητούμε είναι της μορφής

$$K(s) = K_p + K_i\frac{1}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

Παράδειγμα 3 (3)

Συνεπώς η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα έχει την μορφή:

$$G_o(s) = \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)} = \frac{\frac{1}{s^2+5s+6}\frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}}{1+\frac{1}{s^2+5s+6}\frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}}$$

$$= \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s(s^2+5s+6) + K_d s^2 + K_p s + K_i}$$

$$= \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s^3 + (5+K_d)s^2 + \left(6+K_p\right)s + K_i}$$

$$= \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{(s+q_1)(s^2+8s+33.64)}$$

Παράδειγμα 3 (4)

Μπορούμε να επιλέξουμε το q_1 ώστε να απέχει 5-10 φορές πιο μακριά από το πραγματικό μέρος των 2 μιγαδικών πόλων ώστε να μην επηρεάσει την απόκριση στον χρόνο του συστήματος π.χ.

$q_1 = 4 \times 10 = 40$ και άρα

$$G_c(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s^3 + (5 + K_d)s^2 + \left(6 + K_p\right)s + K_i} \equiv \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{(s + 40)(s^2 + 8s + 33.64)}$$

$$= \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s^3 + 48s^2 + 353.64s + 1345.6}$$

$$\begin{cases} 5 + K_d = 48 \\ 6 + K_p = 353.64 \\ K_i = 1345.6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_d = 43 \\ K_p = 347.64 \\ K_i = 1345.6 \end{cases}$$

Παράδειγμα 3 (5)

Συνεπώς ο ελεγκτής θα έχει την μορφή:

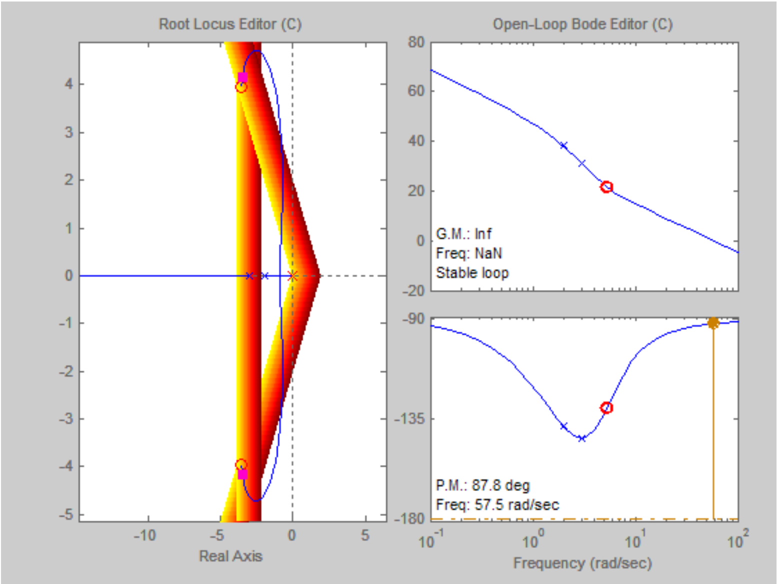
$$K(s) = 347.64 + 1345.6\frac{1}{s} + 43s = \frac{43s^2 + 347.64s + 1345.6}{s}$$

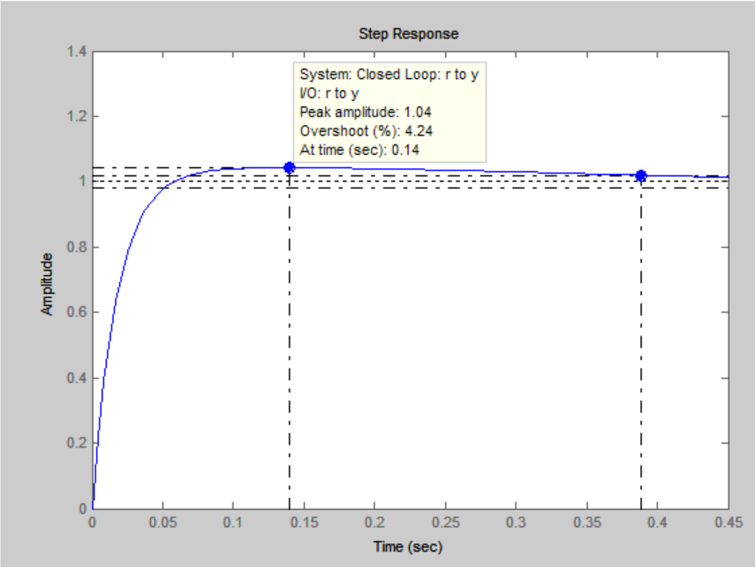
και η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα είναι

$$G_c(s) = \frac{43s^2+347.64s+1345.6}{s^3+48s^2+353.64s+1345.6}$$

Παράδειγμα 3 (6)

Δουλεύοντας στο Matlab με το sisotool και θέτοντας στο ανοικτό σύστημα την $G(s)$ και σαν ελεγκτή τον $K(s)$, και παίζοντας με το Κ στον γεωμετρικό τόπο των ριζών μπορώ να πάρω το σύστημα: $K(s) = 1.64 \times 10^8 \frac{1+0.25s+(0.19s)^2}{s}$

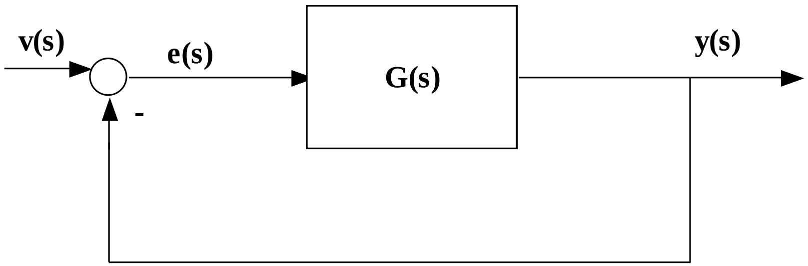




Σταθερά σφάλματος θέσης K_p (1)

Σταθερά σφάλματος θέσης K_p

Μέτρο σφάλματος στη μόνιμη κατάσταση ισορροπίας, μεταξύ της εισόδου και της εξόδου, όταν η είσοδος του συστήματος μοναδιαίας ανάδρασης τύπου l διεγείρεται από την μοναδιαία βηματική συνάρτηση.



$$G(s) = \frac{KB_1(s)}{s^l B_2(s)}$$

Σταθερά σφάλματος θέσης K_p (2)

$$e(s) = v(s) - y(s) = v(s) - G(s)e(s) \Rightarrow$$

$$\big(I + G(s)\big)e(s) = v(s) \Rightarrow$$

$$e(s) = \big(I + G(s)\big)^{-1} v(s) \Rightarrow$$

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,\big(I + G(s)\big)^{-1} v(s).$$

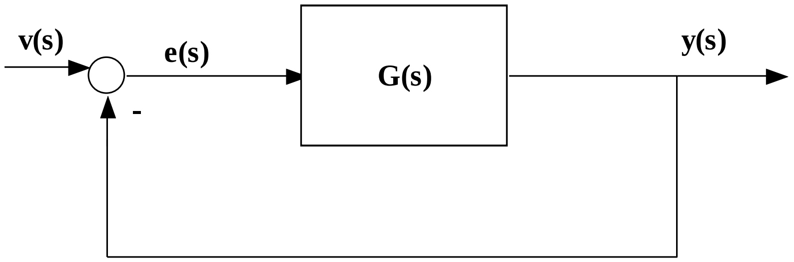
$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \begin{cases} \dfrac{KB_1(0)}{B_2(0)} & l = 0 \\ \infty & l > 0 \end{cases}$$

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{1 + K_p} = \begin{cases} \dfrac{B_2(0)}{B_2(0) + KB_1(0)} & l = 0 \\ 0 & l > 0 \end{cases}$$

Σταθερά σφάλματος ταχύτητας K_u (1)

Σταθερά σφάλματος ταχύτητας K_u

Μέτρο σφάλματος στη μόνιμη κατάσταση ισορροπίας, μεταξύ της εισόδου και της εξόδου, όταν η είσοδος του συστήματος μοναδιαίας ανάδρασης τύπου l διεγείρεται από την μοναδιαία συνάρτηση κλίσης.



$$G(s) = \frac{KB_1(s)}{s^l B_2(s)}$$

Σταθερά σφάλματος ταχύτητας K_u (2)

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\big(I + G(s)\big)^{-1} v(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sG(s)}$$

$$K_u = \lim_{s\to 0} sG(s) = \begin{cases} 0 & l = 0 \\ \dfrac{KB_1(0)}{B_2(0)} & l = 1 \\ \infty & l > 1 \end{cases}$$

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{K_u} = \begin{cases} \infty & l = 0 \\ \dfrac{B_2(0)}{KB_1(0)} & l = 1 \\ 0 & l > 1 \end{cases}$$

Άσκηση 1 (1)

Έστω ότι η συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού συστήματος είναι:

$$G(s) = \frac{h(s)}{d(s)} = \frac{1}{(s+2)(s+8)}$$

Και θέλουμε να δημιουργήσουμε έναν ελεγκτή ώστε να έχουμε:

α) Μέγιστο ποσοστό υπερύψωσης (maximum overshoot) 5%,

β) Χρόνο αποκατάστασης (settling time) λιγότερο από 1.5 sec (θέτοντας ως settling time το 2%).

γ) Μηδενικό steady-state λάθος σε βηματική είσοδο ($u(t) = 1$)

δ) Λιγότερο από 25% steady-state λάθος σε είσοδο αναρρίχησης ($u(t) = t$.)

Άσκηση 1 (2)

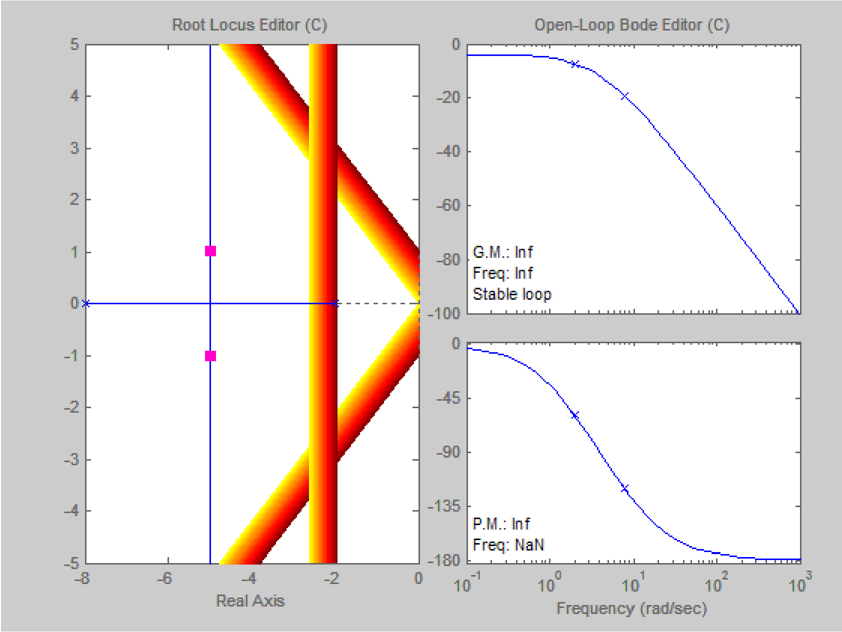
Απάντηση. Θα πρέπει λοιπόν

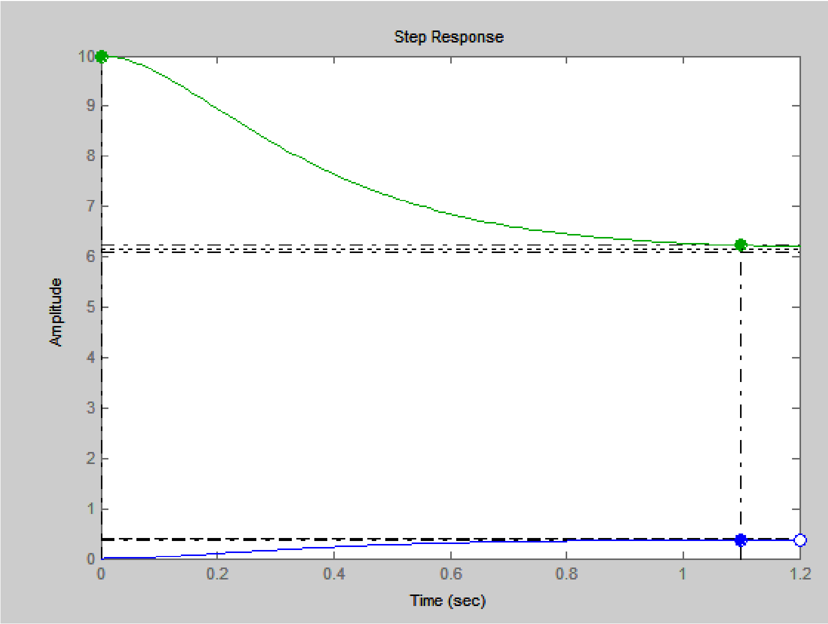
$$M_p \leq 5 \Rightarrow 100e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \leq 5 \Rightarrow \zeta \geq 0.69$$

$$t_s \leq 1.5 \xRightarrow{t_s \cong \frac{4}{\zeta\omega_n}} \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 1.5 \Rightarrow \zeta\omega_n \geq \frac{4}{1.5} = 2.66$$

Άσκηση 1 (3)

Παρατηρούμε στο Matlab ότι με έναν ελεγκτή αναλογικό της μορφής K=10 μπορούμε να πετύχουμε τις πρώτες 2 απαιτήσεις αλλά όχι την τρίτη και τέταρτη.





Άσκηση 1 (4)

Ακραίοι επιθυμητοί πόλοι του κλειστού συστήματος:

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -2.66 \pm i3.86$$

Βήμα 1. Σχημάτισε το πολυώνυμο

$$\delta(s) = (s + 2.66 - 3.86\mathrm{i})(s + 2.66 + 3.86i)$$
$$= s^2 + 5.32s + 21.98$$

Βήμα 2. Υπολόγισε την διαφορά

$$\delta(s) - d(s) = s^2 + 5.32s + 21.98 - s^2 - 10s - 16$$
$$= -4.68s + 5.98 = f(s)$$

Βήμα 3. Διάλεξε αυθαίρετο ευσταθές πολυώνυμο $q(s)$ βαθμού 2-1=1

$$q(s) = (s + q_1) \text{ με } Re(-q_1) > 0$$

Άσκηση 1 (5)

Βήμα 4. Υπολόγισε πολυώνυμα $a(s), b(s)$ τέτοια ώστε

$$a(s)(s^2+10s+16)+b(s)\times 1=(s+q_1)(-4.68s+5.98)$$
$$=-4.68s^2+(-4.68q_1+5.98)s+5.9q_1$$

$$[a_0 \quad a_1 \quad b_0 \quad b_1]$$
$$=[5.98q_1 \quad -4.68q_1+5.98 \quad -4.68 \quad 0]\begin{bmatrix}16 & 10 & 1 & 0\\ 0 & 16 & 10 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}$$
$$=[-4.68 \quad 0 \quad 74.88+5.98q_1 \quad 52.78-4.68q_1]$$

και άρα

$$a(s)=-4.68, b(s)=(74.88+5.98q_1)+(52.78-4.68q_1)s$$

Άσκηση 1 (6)

αλλά και

$$a(s) = -4.68 - k(s) \times 1, b(s) = (74.88 + 5.98q_1) + (52.78 - 4.68q_1)s + k(s)(s^2 + 10s + 16)$$

Βήμα 5. Ο ζητούμενος αντισταθμιστής είναι:

$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)} = \frac{b(s)}{q(s) + a(s)} = \frac{(74.88 + 5.98q_1) + (52.78 - 4.68q_1)s}{s + q_1 - 4.68}$$

αλλά και

$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)} = \frac{b(s)}{q(s) + a(s)} = \frac{(74.88 + 5.98q_1) + (52.78 - 4.68q_1)s + k(s)(s^2 + 10s + 16)}{s + q_1 - 4.68 - k(s)}$$

Άσκηση 1 (7)

Ενώ η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα είναι:

$$H(s) = \frac{h(s)b(s)}{q(s)\delta(s)} = \frac{(74.88 + 5.98q_1) + (52.78 - 4.68q_1)s}{(s + q_1)(s^2 + 5.32s + 21.98)}$$

αλλά και

$$\mathrm{H}(s) = \frac{h(s)b(s)}{q(s)\delta(s)}$$
$$= \frac{(74.88 + 5.98q_1) + (52.78 - 4.68q_1)s + k(s)(s^2 + 10s + 16)}{(s + q_1)(s^2 + 5.32s + 21.98)}$$

Άσκηση 1 (8)

$$\boxed{K(s)=\frac{h_c(s)}{d_c(s)}=\frac{b(s)}{q(s)+\alpha(s)}=\frac{(74.88+5.98q_1)+(52.78-4.68q_1)s}{(s+q_1-4.68)}}$$

Για να ικανοποιείται η συνθήκη 3 θα πρέπει το ανοικτό σύστημα να είναι του τύπου 1. Για να γίνει αυτό μπορούμε να επιλέξουμε $q_1 = 4.68$ και συνεπώς θα έχουμε

$$K(s)=\frac{h_c(s)}{d_c(s)}=\frac{b(s)}{q(s)+\alpha(s)}=\frac{102.866+30.878s}{s}$$

$$H(s)=\frac{h(s)b(s)}{q(s)\delta(s)}=\frac{102.866+30.878s}{(s+4.68)(s^2+5.32s+21.98)}$$

Άσκηση 1 (9)

$$\boxed{\begin{gathered}K(s)=\frac{h_c(s)}{d_c(s)}=\frac{b(s)}{q(s)+a(s)}=\\=\frac{(74.88+5.98q_1)+(52.78-4.68q_1)s+k(s)(s^2+10s+16)}{s+q_1-4.68-k(s)}\end{gathered}}$$

αλλά και $q_1=10\times 2.66=26.6=4.68+k(s)\Rightarrow$

$$k=26.6-4.68=21.92$$

$$K(s)=\frac{h_c(s)}{d_c(s)}=\frac{584.668+147.492s+21.92s^2}{s}$$

$$H(s)=\frac{h(s)b(s)}{q(s)\delta(s)}=\frac{584.668+147.492s+21.92s^2}{(s+26.6)(s^2+5.32s+21.98)}$$

Άσκηση 1 (10)

Για να ικανοποιείται η 4η συνθήκη θα πρέπει

$$K_u = \lim_{s\to 0} sK(s)G(s) \geq \frac{1}{0.25} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{s\to 0} s\frac{102.866 + 30.878s}{s}\frac{1}{s^2 + 10s + 16} = \frac{102.866}{16}$$
$$= 6.42913 \geq 4$$

$$\lim_{s\to 0} s\frac{453.586 + 250.078s + 21.92s^2}{s}\frac{1}{s^2 + 10s + 16}$$
$$= \frac{453.586}{16} = 28.3491 \geq 4$$

Υπολογισμός αντισταθμιστή (1)

Δουλεύοντας στο Matlab και θέτοντας στο ανοικτό σύστημα την $G(s)$ και σαν ελεγκτή τον $K(s)$

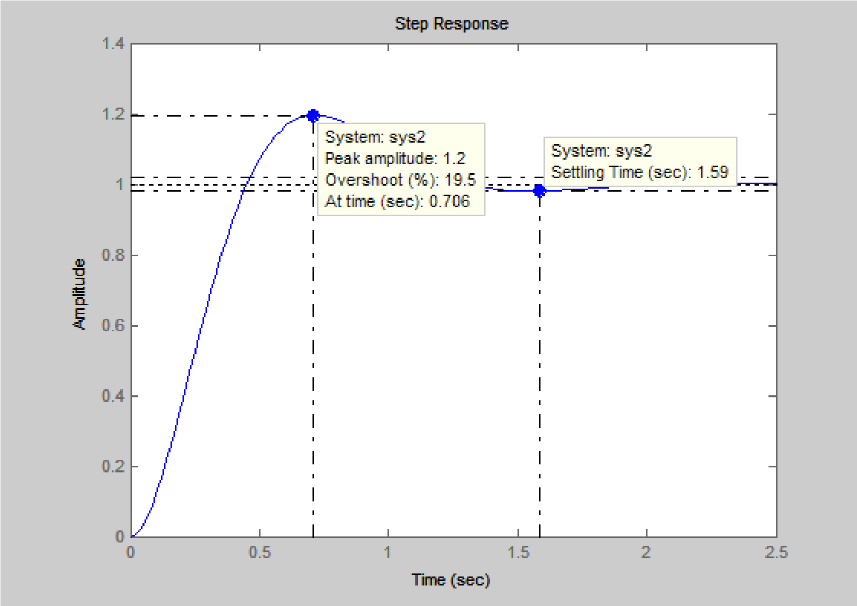
$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)} = \frac{b(s)}{q(s)+a(s)} = \frac{102.866 + 30.878s}{s}$$

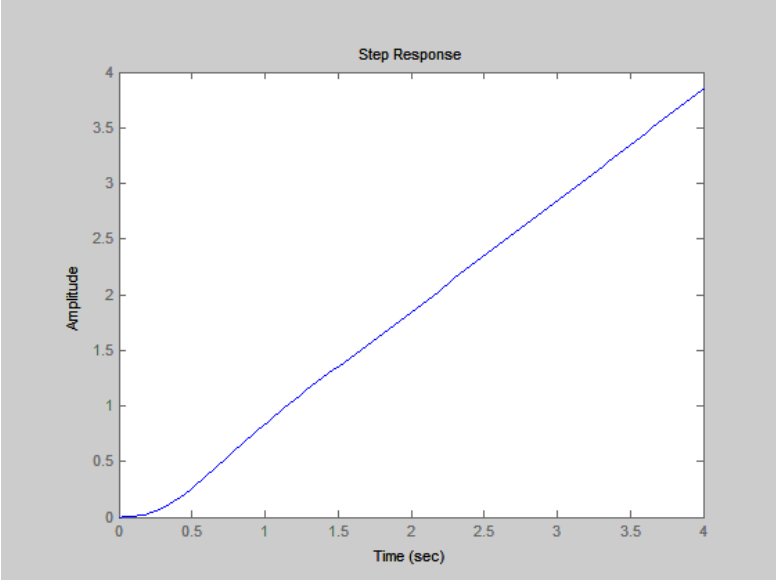
```
%Πρώτος Ελεγκτής
sys=zpk([],[-2 -8],1)
sysk=tf([30.878 102.866],[1 0])
sys1=series(sys,sysk)
sys2=feedback(sys1,1)
sys3=series(sys2,tf([1],[1 0]))
subplot(2,2,1)
step(sys2)%(Βηματική είσοδος)
subplot(2,2,2)
step(sys3)%(ramp input)
```

Υπολογισμός αντισταθμιστή (2)

Δουλεύοντας στο Matlab και θέτοντας στο ανοικτό σύστημα την G(s) και σαν ελεγκτή τον K(s)

$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)} = \frac{b(s)}{q(s) + a(s)} = \frac{102.866 + 30.878s}{s}$$





Υπολογισμός αντισταθμιστή (3)

Δουλεύοντας στο Matlab και θέτοντας στο ανοικτό σύστημα την G(s) και σαν ελεγκτή τον K(s)

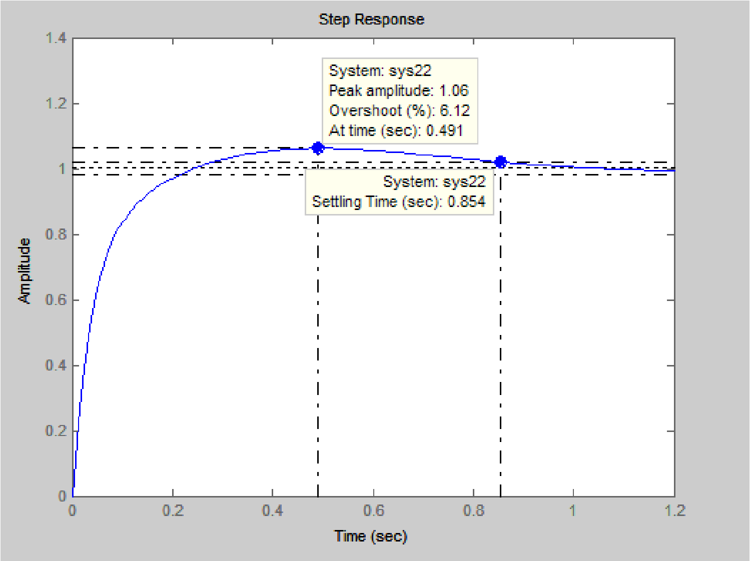
$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)} = \frac{453.586 + 250.078s + 21.92s^2}{s}$$

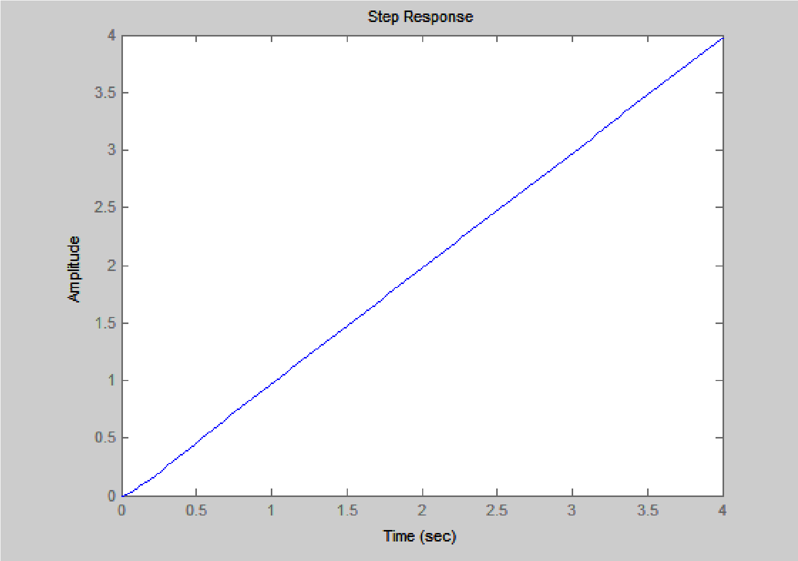
```
%Δεύτερος Ελεγκτής
sys=zpk([],[-2 -8],1)
sysk=tf([21.92 147.492 584.668],[1 0])
sys11=series(sys,syskk)
sys22=feedback(sys11,1)
subplot(2,2,3)
step(sys22)%(Βηματική είσοδος)
sys33=series(sys22,tf([1],[1 0]))
subplot(2,2,4)
step(sys33)%(ramp input)
```

Υπολογισμός αντισταθμιστή (4)

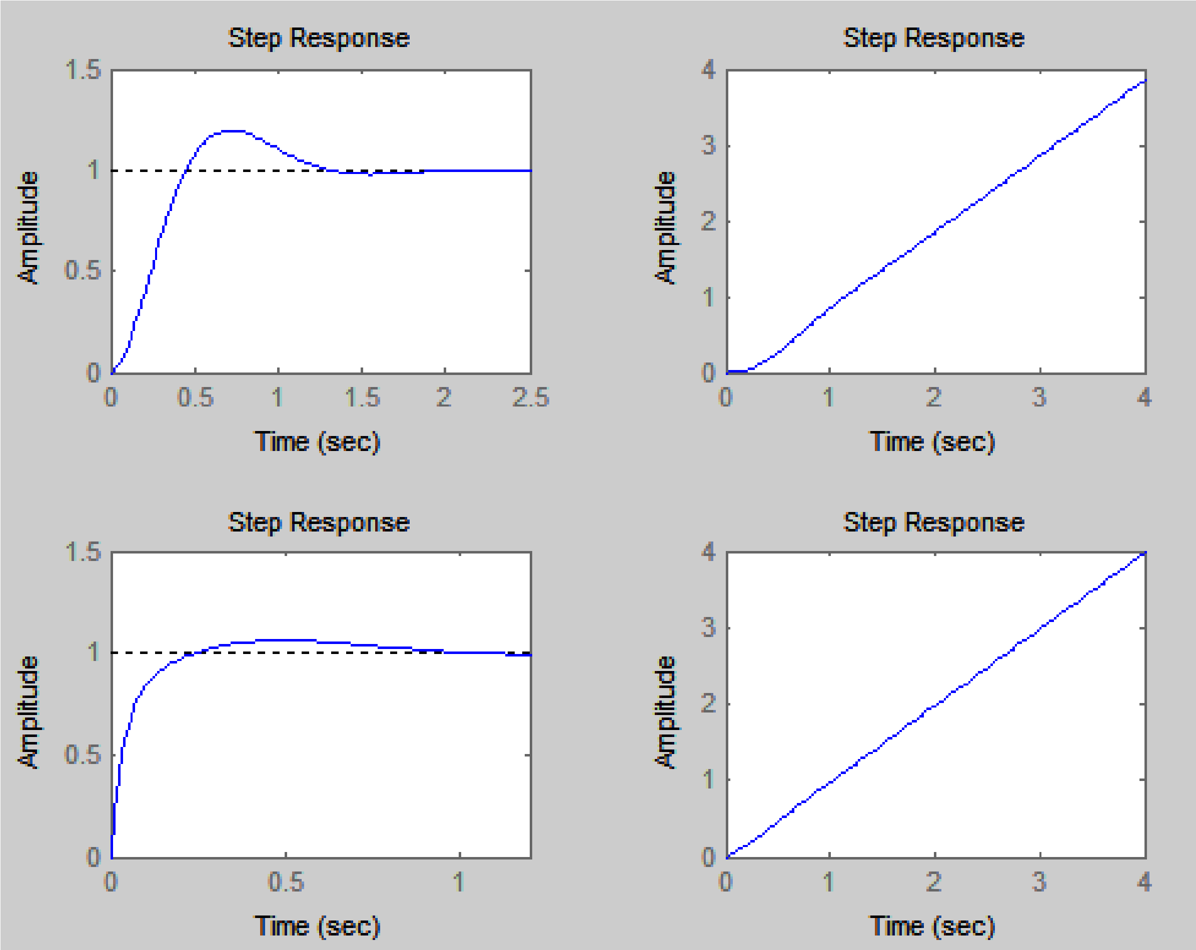
Δουλεύοντας στο Matlab και θέτοντας στο ανοικτό σύστημα την G(s) και σαν ελεγκτή τον K(s)

$$K(s) = \frac{h_c(s)}{d_c(s)} = \frac{453.586 + 250.078s + 21.92s^2}{s}$$





Υπολογισμός αντισταθμιστή (5)



Άσκηση 2

Έστω ότι η συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού συστήματος είναι:

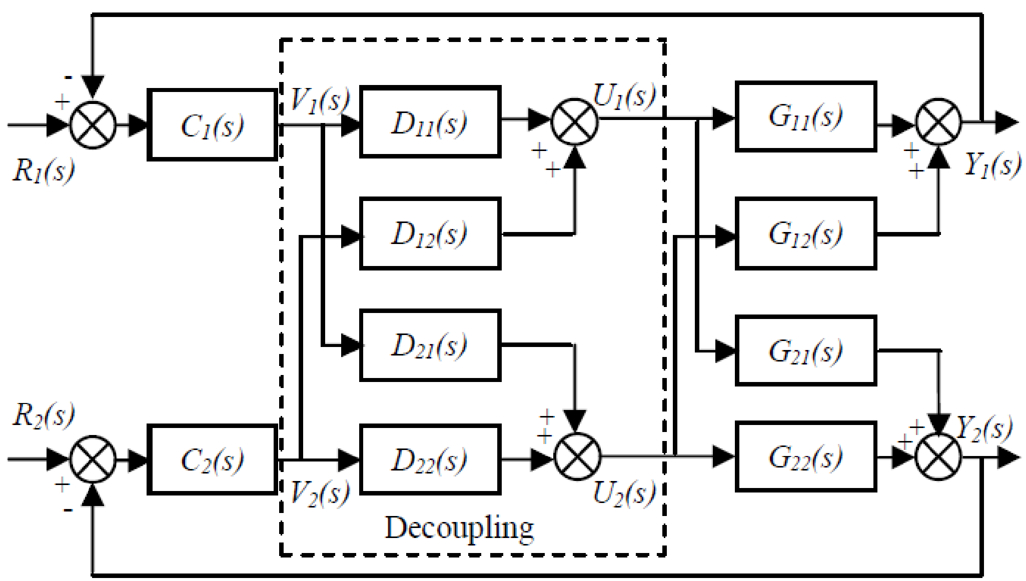
$$G(s) = \frac{h(s)}{d(s)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

Και θέλουμε να δημιουργήσουμε έναν ελεγκτή ώστε να έχουμε:
α) Μέγιστο ποσοστό υπερύψωσης (maximum overshoot) 5%,
β) χρόνο αποκατάστασης (settling time) λιγότερο από 1 sec.
Προσπαθήστε να υπολογίσετε τον ελεγκτή θέτοντας ως όρια για να λύσετε την παραπάνω άσκηση χαμηλότερα δηλαδή
α) μέγιστο ποσοστό υπερύψωσης (maximum overshoot) 4%,
β) χρόνο αποκατάστασης (settling time) λιγότερο από 0.8 sec.

Αποσύζευξη εισόδων-εξόδων (Decoupling) (1)

$$D(s) = \begin{bmatrix} D_{11}(s) & D_{12}(s) \\ D_{21}(s) & D_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \longrightarrow T(s) = \begin{bmatrix} T_{11}(s) & 0 \\ 0 & T_{22}(s) \end{bmatrix} = G(s)D(s)$$

$$C(s) = \begin{bmatrix} C_1(s) & 0 \\ 0 & C_2(s) \end{bmatrix}$$



Αποσύζευξη εισόδων-εξόδων (Decoupling) (2)

$$D(s)=\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{G_{12}(s)}{G_{11}(s)} \\ -\dfrac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)} & 1 \end{bmatrix}, G(s)=\begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$T(s)=\begin{bmatrix} G_{11}(s)-\dfrac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{22}(s)} & 0 \\ 0 & G_{22}(s)-\dfrac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{11}(s)} \end{bmatrix}$$

$$C(s)=\begin{bmatrix} C_1(s) & 0 \\ 0 & C_2(s) \end{bmatrix}$$

Αποσύζευξη εισόδων-εξόδων (Decoupling) (3)

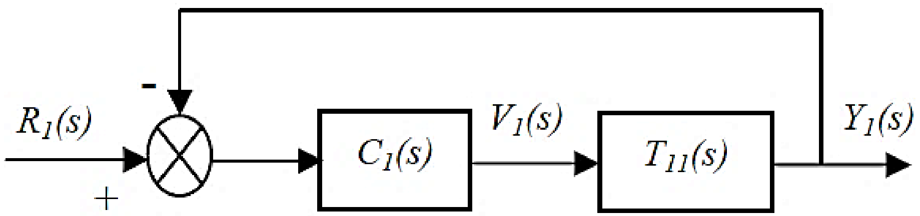
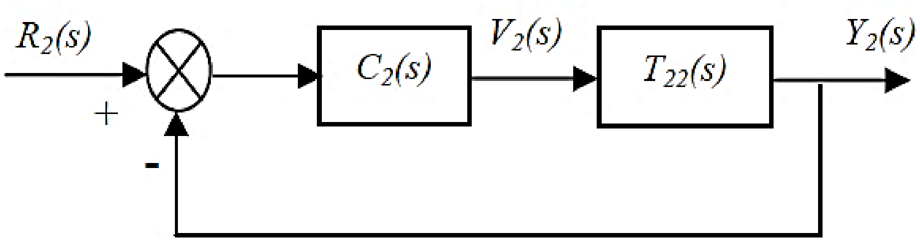


Figure 2. First SISO system



$$T_{11}(s) = G_{11}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{22}(s)}$$

$$T_{22}(s) = G_{22}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{11}(s)}$$

Luyben, W.L., Distillation decoupling. AIChE Journal, 1970, 16(2): 198-203.

Αποσύζευξη εισόδων-εξόδων (Decoupling) (4)

$$\begin{cases} D(s) = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-2s^2-16s-10}{2s^2+3s+1} \\ \dfrac{-4s^2-24s-8}{3s^2+15s+3} & 1 \end{bmatrix} \\ G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^2+8s+5} & \dfrac{2}{2s^2+3s+1} \\ \dfrac{4}{s^2+5s+1} & \dfrac{3}{s^2+6s+2} \end{bmatrix} \end{cases} \rightarrow$$

$$T_1(s) = \frac{-2s^4-73s^3-386s^2-344s-77}{6s^6+87s^5+396s^4+651s^3+465s^2+144s+15}$$

$$T_2(s) = \frac{-2s^4-73s^3-386s^2-344s-77}{2s^6+25s^5+100s^4+142s^3+85s^2+22s+2}$$

Αποσύζευξη εισόδων-εξόδων (Decoupling) (5)

Υποθέτουμε ότι σκοπός μας είναι η κατασκευή ενός ελέγκτή για $T_1(s)$, ο οποίος θα ικανοποιεί τα εξής:

1) Overshoot $\leq 5\%$,
2) 2% settling time $\leq 10s$.

Έστω ότι σκοπός μας είναι η κατασκευή ενός ελέγκτή για $T_2(s)$ ο οποίος θα ικανοποιεί τα εξής:

1) Overshoot $\leq 2\%$,
2) 2% settling time $\leq 20s$.

Βιβλιογραφία

- Βαρδουλάκης Α.Ι., 2011, *Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου, Τόμος Α : Κλασσική Θεωρία Ελέγχου*, ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΤΖΙΟΛΑ & ΥΙΟΙ Α.Ε.
- Li Qiu and Kemin Zhou, 2010, *Introduction to Feedback Control*, Pearson Ed.
- Luyben, W.L., *Distillation decoupling*. AIChE Journal, 1970, 16(2): 198-203.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Νικόλαος Καραμπετάκης. «Κλασσική Θεωρία Ελέγχου. Ενότητα 16: Υπολογισμός αντισταθμιστή με χρήση διοφαντικών εξισώσεων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS432/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης