Λογισμός Ι

Ενότητα 1: Εισαγωγή

Κ. Δασκαλογιάννης
Τμήμα Μαθηματικών

Α.Π.Θ.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο “Ανοικτά Ακαδημαικά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης ” έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος “Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση” και συγχρηματοδοτείται απο την Ευρωπαική Ένωση (Ευρωπαικό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα Ενότητας

- Ιστορική κατασκευή πραγματικών αριθμών
- Φυσικοί αριθμοί-Αξιώματα Peano
- Αρχή επαγωγής
- Βασικές Ταυτότητες
- Ακέραιοι αριθμοί
- Ρητοί αριθμοί
- Πεδίο-Σώμα
- Infimum-Supremum
- Αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών
- Αρχιμήδεια ιδιότητα

Σκοποί Ενότητας

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τις ιδιότητες των συνόλων των φυσικών, ακέραιων, ρητών και πραγματικών αριθμών.

ΛΟΓΙΣΜΟΣ $\leftrightsquigarrow$ **CALCULUS**

(Διαφορικός Λογισμός, Απειροστικός Λογισμός)

1670 $\sim$ 1740 Ουράνια Μηχανική

Isaac Newton
1648-1727

Gottfried Wilhelm Leibniz
1646-1716

- απειροστά(=πολύ μικρά) μεγέθη,
- άπειρο(=πάρα πολύ μεγάλο),
- όριο συνάρτησης $\lim_{x \to a} f(x)$, παράγωγος , ...
- υπολογισμός ταχυτήτων, ροπών, ορμών...

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΓΛΩΣΣΑ

Εισαγωγή (2/2)

Περιγραφή $\rightsquigarrow$ Γλώσσα $\rightsquigarrow$ Θέσπιση αυστηρών κανόνων

Ανάλυση

ΑΝΑΛΥΣΗ $\leftrightsquigarrow$ **ANALYSIS**

$\sim$ 1820–σήμερα

- Συστηματική μελέτη: Πως ορίζεται ο αριθμός; Αξιώματα που θεμελιώνουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών
- Ορισμός σύγκλισης, όριου ...
- ακολουθίες, σειρές...
- Ορισμός συνέχειας...

Δημιουργία **ΑΥΤΟΣΥΝΕΠΟΥΣ ΓΛΩΣΣΑΣ**

ΛΟΓΙΣΜΟΣ $\prec$ Μάθημα $\prec$ Ανάλυση

Advanced Calculus ή Elementary Analysis

Generic Construction

Αρχαιότητα	$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3, \ldots\}$	Αξιώματα Peano
	$\Downarrow$	$\downarrow$
	(Λύσεις $x + n = 0$)	
	$\Downarrow$	$\downarrow$
(Ινδοί)	$\mathbb{Z} = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots\}$	Προσθετική Ομάδα
	$\Downarrow$	$\downarrow$
Αρχαιότητα	(Λύσεις $qx - p = 0$)	
	$\Downarrow$	$\downarrow$
	$\mathbb{Q} = \{p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$	Πυκνό πεδίο (field) / σώμα
	$\Downarrow$	$\downarrow$
Αναγέννηση	Λύσεις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $\Delta = \beta^2 \geq 4\alpha\gamma$	Τομές Dedekind
	$\Downarrow$	$\downarrow$
Νέοι Χρόνοι	$\mathbb{R}$	Πυκνό πεδίο με διάταξη “συνεχές ”

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

ΑΞΙΩΜΑΤΑ Peano 

Ορισμός συνόλου φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$

i) $1 \in \mathbb{N}$
ii) $\forall n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow n+1 \in \mathbb{N}$
iii) $\forall n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow n+1 > 1$
iv) $n = m \rightsquigarrow n+1 = m+1$
v) Αρχή επαγωγής

Αν ένα υποσύνολο $M \subseteq \mathbb{N}$ κατασκευάζεται ως εξής:

$$\left.\begin{array}{c} 1 \in M \\ m \in M \rightsquigarrow m+1 \in M \end{array}\right\} \Rightarrow M = \mathbb{N}$$

Αρχή Επαγωγής

Απόδειξη με επαγωγή/ Proof by induction

Αν $P(m)$ είναι μια πρόταση η οποία εξαρτάται από το $m \in \mathbb{N}$

(i) $P(1)$ αληθεύει

(ii) για ένα $n \in \mathbb{N}$ η πρόταση $P(n)$ αληθεύει $\rightsquigarrow$ $P(n+1)$ αληθεύει

συνεπάγεται ότι **η πρόταση $P(n)$ είναι αληθινή για κάθε $n \in \mathbb{N}$**

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Γεωμετρικό Αθροισμα

$$1 + t + t^2 + \cdots + t^n = \boxed{\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n}} \mathbf{t^k} = \frac{\mathbf{1-t^{n+1}}}{\mathbf{1-t}}}$$

Τύποι "Gauss"

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

Πρόβλημα: Να βρεθούν οι σταθερές A, B, C, D, E

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E$$

Τύποι Bernoulli και Newton

Τύπος "Bernoulli"

$$\boxed{\mathbf{x \geq -1 \ \rightsquigarrow \ (1+x)^n \geq 1+nx}}$$

Πρόβλημα: Για $a > 0$, να αποδειχθεί η ανισότητα

$$\frac{a-1}{n} \geq \sqrt[n]{a} - 1$$

Τύπος Newton

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \ \rightsquigarrow \ \boxed{\mathbf{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}}$$

Τύπος Newton

παραγοντικό/factorial
$$0! = 1$$
$$n! = n \cdot (n-1)! \rightsquigarrow \boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n}$$

Συνδιασμός n πραγμάτων ανά k $\quad \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$$\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{1} = n,\ \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},\ \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!},$$
$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^n =& b^n + nab^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + \cdots + \\ &+ \binom{n}{m}a^m b^{n-m} + \cdots + na^{n-1}b + a^n\end{aligned}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \rightsquigarrow \boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Το $(\mathbb{Z}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι το μικρότερο σύνολο, που περιέχει το $\mathbb{N}$ και έχει δομή αβελιανής ομάδας

ή

είναι το μικρότερο σύνολο το οποίο περιέχει το $\mathbb{N}$ και τις λύσεις της εξίσωσης $x + p = 0$ όπου το $p \in \mathbb{Z}$.

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι ένα σύνολο στοιχείων όπου έχουμε ορίσει την πράξη της πρόσθεσης

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ni (\alpha,\, \beta) \longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{Z}$$

με τις ιδιότητες

$$\left.\begin{array}{lll} A_1: & \alpha + \beta = \beta + \alpha & \text{αβελιανή ιδιότητα} \\ A_2: & \alpha + 0 = \alpha & \exists\,\text{ουδέτερο στοιχείο} \\ A_3: & \alpha + (-\alpha) = 0 & \exists\,\text{αντίθετο στοιχείο} \\ A_4: & \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma & \text{προσεταιριστική ιδιότητα} \end{array}\right\}$$

Ιδιότητες αβελιανής ομάδας

Αλλα σύνολα που έχουν την δομή μιας αβελιανής ομάδας:
$\mathbb{Q}$ (ρητοί αριθμοί), $\mathbb{R}$ (πραγματικοί αριθμοί), $\mathbb{C}$ (μιγαδικοί αριθμοί), το σύνολο $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$, τα διανύσματα στο χώρο,

Το σύνολο $\mathbb{Z}_2$ είναι αβελιανή ομάδα

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{0,\, 2,\, 4,\, 6\, \ldots\} = \text{ άρτιοι αριθμοί} \\ \overline{1} &= \{1,\, 3,\, 5,\, 7\, \ldots\} = \text{ περιττοί αριθμοί} \end{aligned}$$

Το σύνολο $\mathbb{Z}_2 \equiv \left\{\overline{0},\, \overline{1}\right\}$ είναι αβελιανή ομάδα.

$$\begin{aligned} &\overline{0} + \overline{0} = \overline{0} \\ &\overline{0} + \overline{1} = \overline{1} + \overline{0} = \overline{1} \\ &\overline{1} + \overline{1} = \overline{0} \end{aligned}$$

Αν $a \in \mathbb{Z}_2$ τότε $a \neq 0 \Rightarrow a = -a$

Το σύνολο $\mathbb{Z}_5$ είναι αβελιανή ομάδα

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{0,\ 5,\ 10,\ 15,\ \ldots\} = \{5k\ :\ k \in 0 \cup \mathbb{N}\}\\
\overline{1} &= \{1,\ 6,\ 11,\ 16,\ \ldots\} = \{5k+1\ :\ k \in 0 \cup \mathbb{N}\}\\
\overline{2} &= \{2,\ 7,\ 12,\ 17,\ \ldots\} = \{5k+2\ :\ k \in 0 \cup \mathbb{N}\}\\
\overline{3} &= \{3,\ 8,\ 13,\ 18,\ \ldots\} = \{5k+3\ :\ k \in 0 \cup \mathbb{N}\}\\
\overline{4} &= \{4,\ 9,\ 14,\ 19,\ \ldots\} = \{5k+4\ :\ k \in 0 \cup \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

Το σύνολο $\mathbb{Z}_5 \equiv \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\right\}$ είναι αβελιανή ομάδα.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

Αν $a \in \mathbb{Z}_2$ τότε $a \neq 0 \Rightarrow a+a+a+a+a = 0,\ -\overline{3} = \overline{2}$
$\overline{4} + \overline{4} + \overline{3} = \overline{1},\ x + \overline{2} = \overline{1} \Rightarrow x = \overline{4}$

Εις άτοπον απαγωγή

Ορισμός ρητών αριθμών

Το $\mathbb{Q}$ είναι ένα σύνολο που είναι ¨κλειστό' ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό και περιέχει το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $qx + p = 0$, όπου p και q στοιχεία του $\mathbb{Z}$

ή

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \; : \; m \in \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Απόδειξη "διά τῆς εἰς ἄτοπον απαγωγῆς"/ proof by contradiction

Για να αποδείξουμε την συνεπαγωγή των προτάσεων $P \Rightarrow Q$ αρκεί να αποδείξουμε ότι η υπόθεση { P αληθής και Q αναληθής } συνεπάγεται μια αντίφαση ("ἄτοπον")

Παράδειγμα:
Ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός αριθμός
Δεν υπάρχει φυσικός $p < 1$

Πεδίο/Σώμα - Field

Το $(\mathbb{F}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα

A_1	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	αβελιανή ιδιότητα
A_2	$\alpha + 0 = \alpha$	$\exists$ ουδέτερο
A_3	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\exists$ αντίθετο
A_4	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	προσεταιριστικότητα

Το $(\mathbb{F}\backslash\{0\}, \cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα

A_5	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$	αβελιανή ιδιότητα
A_6	$\alpha \cdot 1 = \alpha$	$\exists$ ουδέτερο
A_7	$\alpha \cdot (\alpha^{-1}) = 1$	$\exists$ αντίθετο
A_8	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$	προσεταιριστικότητα

Η $\boxed{\text{επιμεριστικότητα}}$ - distributivity συνδέει πρόσθεση και πολλαπλασιασμό

$$A_9 \quad (\alpha + \beta) \cdot \gamma = (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$$

Το **πεδίο $\mathbb{F}$ είναι χαρακτηριστικής n** αν

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{F},\ \alpha \neq 0; \rightsquigarrow\ \alpha^n = 1$$

Ορισμός ρητών αριθμών

Το $\mathbb{Q}$ είναι το μικρότερο πεδίο/σώμα χαρακτηριστικής 0, που περιέχει $\mathbb{Z}$

ή

Το $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $qx + p = 0$, όπου p και q στοιχεία του $\mathbb{Z}$ ή

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \ : \ m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

- $\sqrt{2} \notin Q$ (απαγωγή σε άτοπο)
- Το σύνολο $\left\{ a + b\sqrt{2} \ : \ a \ \text{ και } \ b \ \in \mathbb{Q} \right\}$ $(\Rightarrow \ a^2 - 2b^2 \neq 0)$ είναι πεδίο χαρακτηριστικής 0 (ευθεία απόδειξη)

$$\begin{aligned}
&(\alpha + \sqrt{2}\beta) + (\alpha' + \sqrt{2}\beta') = (\alpha + \alpha') + \sqrt{2}\,(\beta + \beta') \\
&(\alpha + \sqrt{2}\beta) \cdot (\alpha' + \sqrt{2}\beta') = (\alpha\alpha' + 2\beta\beta') + \sqrt{2}\,(\alpha\beta' + \alpha'\beta) \\
&\left(\alpha + \sqrt{2}\beta\right)^{-1} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 2\beta^2} - \frac{\sqrt{2}\beta}{\alpha^2 - 2\beta^2}
\end{aligned}$$

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)^n = 1 \ \rightsquigarrow \ n = 0$$

Παράδειγμα 1

- Το σύνολο $\mathbb{Z}_2 \equiv \{\overline{0}, \overline{1}\}$ είναι πεδίο. Με χαρακτηριστική 1.

$\overline{0}+\overline{0}=\overline{0}$	$\overline{0}\cdot\overline{0}=\overline{0}$
$\overline{0}+\overline{1}=\overline{1}+\overline{0}=\overline{1}$	$\overline{0}\cdot\overline{1}=\overline{1}\cdot\overline{0}=\overline{0}$
$\overline{1}+\overline{1}=\overline{0}$	$\overline{1}\cdot\overline{1}=\overline{1}$

$$\leadsto \left\{ \begin{array}{ll} a \neq 0 & \Rightarrow a = -a \\ & \Rightarrow a^1 = \overline{1} \end{array} \right\}$$

- Το σύνολο $\mathbb{Z}_3 \equiv \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ είναι πεδίο. Με χαρακτηριστική 2.

$\overline{0}+\overline{0}=\overline{0}$	$\overline{0}\cdot\overline{0}=\overline{0}$
$\overline{0}+\overline{1}=\overline{1}+\overline{0}=\overline{1}$	$\overline{0}\cdot\overline{1}=\overline{1}\cdot\overline{0}=\overline{0}$
$\overline{1}+\overline{1}=\overline{2}$	$\overline{1}\cdot\overline{1}=\overline{1}$
$\overline{0}+\overline{2}=\overline{2}+\overline{0}=\overline{2}$	$\overline{0}\cdot\overline{2}=\overline{2}\cdot 0=\overline{0}$
$\overline{1}+\overline{2}=\overline{2}+\overline{1}=\overline{0}$	$\overline{1}\cdot\overline{2}=\overline{2}\cdot\overline{1}=\overline{2}$
$\overline{2}+\overline{2}=\overline{1}$	$\overline{2}\cdot\overline{2}=\overline{1}$

$$\leadsto \left\{ \begin{array}{l} a \neq 0 \Rightarrow a^2 = \overline{1} \\ -\overline{1} = \overline{2},\ -\overline{2} = \overline{1},\ \overline{2}^{-1} = \overline{2} \end{array} \right\}$$

$$\overline{2} + \overline{2}\cdot\overline{2}^{-1} - \overline{1} = \overline{2}$$

- Το σύνολο $\mathbb{Z}_4$ δεν είναι πεδίο. $(\overline{2}\cdot\overline{2}=\overline{0})$

Παράδειγμα 2

$\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{0, 5, 10, 15, 20, \ldots\} \\
\overline{1} &= \{1, 6, 11, 16, 21, \ldots\} \\
\overline{2} &= \{2, 7, 12, 17, 22, \ldots\} \\
\overline{3} &= \{3, 8, 13, 18, 23, \ldots\} \\
\overline{4} &= \{4, 9, 14, 19, 24, \ldots\}
\end{aligned}$$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Το $\mathbb{Z}_5$ είναι πεδίο/σώμα χαρακτηριστικής 4

$$\left(\overline{2} + \overline{4}\right) + \overline{3} = \overline{2} + \left(\overline{4} + \overline{3}\right),\ -\overline{3} = \overline{2},\ \left(\overline{3}\right)^{-1} = \overline{2}$$

$$\left(-\overline{1}\right) \cdot \overline{3} = \overline{2} = -\overline{3}$$

$$\overline{2}^4 = \overline{3}^4 = \overline{4}^4 = \overline{1}$$

Ολικά διατεταγμένο σύνολο

Ορισμός:

Το σύνολο $\mathbb{X}$ είναι $\boxed{\text{ολικά διατεταγμένο}}$ αν $\exists$ μια $\boxed{\text{σχέση διάταξης}}$ $\leq$

A_{10} $\forall x \ y \in: \mathbb{X} \ \Rightarrow \ \underline{x \leq y \text{ ή } y \leq x}$

A_{11} $\forall x \ \rightsquigarrow \ x \leq x$ $\boxed{\text{αυτοπαθής}}$ ιδιότητα

A_{12} $x \leq y$ και $y \leq x \ \rightsquigarrow \ x = y$ $\boxed{\text{(αντι)συμμετρική}}$ ιδιότητα

A_{13} $x \leq y$ και $y \leq z; \rightsquigarrow \ x \leq z$ $\boxed{\text{μεταβατική}}$ ιδιότητα

Παραδείγματα:

- Τα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Z}$ είναι ολικά διατεταγμένα σύνολα
- $\mathbb{X} =$ Ελληνικές λέξεις στο λεξικό, είναι ολικά διατεταγμένο σύνολο.
- Το $\mathbb{X} = \{(m, n) \ : \ m, n \ \in \mathbb{N}\}$ με την σχέση διάταξης

$$(m, n) \preceq (m', n') \ \Leftrightarrow \begin{cases} m < m' \\ \text{ ή} \\ m = m' \text{ και } n \leq n' \end{cases}$$

είναι ολικά διατεταγμένο.

Διατεταγμένο πεδίο

Ορισμός:
Το πεδίο $\mathbb{F}$, που είναι ολικά διατεταγμένο ονομάζεται διατεταγμένο πεδίο αν

A_{14} $x \leq y \rightsquigarrow x + z \leq y + z$

A_{15} $0 \leq x$ και $0 \leq y \rightsquigarrow 0 \leq x \cdot y$

Παραδείγματα:

- Το $\mathbb{Q}$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο πεδίο.
- Το $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ είναι μη διατεταγμένο.
  (τα πεπερασμένα πεδία $\boxed{\text{δεν}}$ είναι ολικά διατεταγμένα !)

ΑΞΙΩΜΑΤΑ $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$

(A_1)	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	αβελιανή ιδιότητα
(A_2)	$\alpha+0=\alpha$	$\exists$ ουδέτερο στοιχείο
(A_3)	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\exists$ αντίθετο στοιχείο
(A_4)	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	προσεταιριστικότητα
(A_5)	$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$	αβελιανή ιδιότητα
(A_6)	$\alpha\cdot 1=\alpha$	$\exists$ ουδέτερο στοιχείο
(A_7)	$\alpha\cdot(\alpha^{-1})=1$	$\exists$ αντίθετο(αντίστροφο) στοιχείο
(A_8)	$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$	προσεταιριστικότητα
(A_9)	$(\alpha+\beta)\cdot\gamma=(\alpha\cdot\gamma)+(\beta\cdot\gamma)$	επιμεριστικότητα
(A_{10})	$\forall x,\, y\, \in:\mathbb{R} \;\Rightarrow\; x\leq y$ ή $y\leq x$	
(A_{11})	$\forall x \;\rightsquigarrow\; x\leq x$	αυτοπαθής ιδιότητα
(A_{12})	$x\leq y$ και $y\leq x; \rightsquigarrow\; x=y$	αντισυμμετρική ιδιότητα
(A_{13})	$x\leq y$ και $y\leq z; \rightsquigarrow\; x\leq z$	μεταβατική ιδιότητα
(A_{14})	$x\leq y \;\rightsquigarrow\; x+z\leq y+z$	
(A_{15})	$0\leq x$ και $0\leq y \;\rightsquigarrow\; 0\leq x\cdot y$	

Παρατήρηση

Ολες αυτές οι ιδιότητες είναι κοινές και για το $\mathbb{Q}$ και για το $\mathbb{R}$

Infimum (1/2)

Ορισμός κάτω φράγματος συνόλου A

Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι $\boxed{\text{κάτω φραγμένο}}$ αν

$$\boxed{\exists\, k \in \mathbb{R} : \forall\, x \in A \;\rightsquigarrow\; k \leq x}$$

$k = \boxed{\text{κάτω φράγμα}}$

Ορισμός infimum του συνόλου A

$\boxed{\inf\ A}$ = infimum του συνόλου $A \equiv$ Το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα

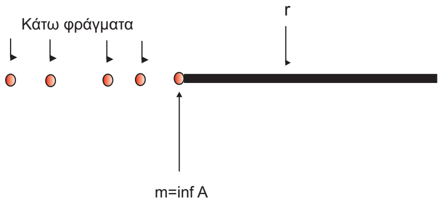
$$m = \inf\ A \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (i) & \forall\, x \in A \;\rightsquigarrow\; m \leq x \\ (ii) & \forall\, r > m,\ \exists\, y \in A \;:\; y < r \end{cases}$$

Infimum (2/2)

Ορισμός infimum του συνόλου A

$\boxed{\inf\ A}$ = infimum του συνόλου $A \equiv$ Το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα

$$m = \inf\ A \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (i) & \forall\, x \in A \;\rightsquigarrow\; m \leq x \\ (ii) & \forall\, r > m,\ \exists\, y \in A\ :\ y < r \end{cases}$$



Άνω φράγμα

Ορισμός άνω φράγματος συνόλου A

Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι $\boxed{\text{άνω φραγμένο}}$ αν

$\boxed{\exists \ell \in \mathbb{R} : \forall x \in A \;\rightsquigarrow\; x \leq \ell}$ όπου $\ell =$ $\boxed{\text{άνω φράγμα}}$

Ορισμός supremum του συνόλου A

$\boxed{\sup A}$ $=$ supremum του συνόλου $A \equiv$ Το μικρότερο από τα άνω φράγματα

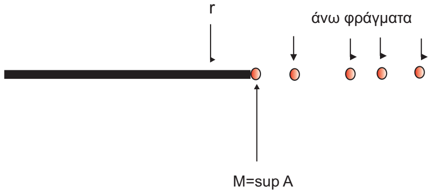
$$M = \sup A \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (i) \quad \forall x \in A \;\rightsquigarrow\; x \leq M \\ \\ (ii) \quad \forall r < M, \, \exists y \in A : \; r < y \end{cases}$$

Supremum

Ορισμός supremum του συνόλου A

$\boxed{\sup\ A}$ = supremum του συνόλου $A \equiv$ Το μικρότερο από τα άνω φράγματα

$$M = \sup\ A \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & \forall x \in A \rightsquigarrow x \leq M \\ (ii) & \forall r < M,\ \exists y \in A : r < y \end{cases}$$



Infimum-Minimum-Supremum-Maximum

Αν $\inf\ A \in A \ \rightsquigarrow\ \inf\ A = \min\ A$.
Γενικά το $\inf\ A \notin A$ δηλ. το $\min\ A$ δεν υπάρχει π.χ.

$$A = \left\{1 + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots\right\}$$

$$\inf\ A = 1 \notin A$$

Αν $\sup\ A \in A \ \rightsquigarrow\ \sup\ A = \max\ A$.
Γενικά το $\sup\ A \notin A$ δηλ. το $\max\ A$ δεν υπάρχει π.χ.

$$A = \left\{1 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$$

$$\sup\ A = 1 \notin A$$

Ασκήσεις

(Αποδείξεις δια της απαγωγής σε άτοπο)

Ασκ.(1) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

Ασκ.(2) $\inf A > 0$ **και** $\inf B > 0 \rightsquigarrow \inf(A \cdot B) = (\inf A) \cdot (\inf B)$

Ασκ.(3) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

Ασκ.(4) $A > 0$ **και** $B > 0 \rightsquigarrow \sup(A \cdot B) = (\sup A) \cdot (\sup B)$

Ασκ.(5) $-\inf A = \sup(-A)$

Ασκ.(6) $\inf A > 0 \rightsquigarrow (\inf A)^{-1} = \sup\left(A^{-1}\right)$

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ $\mathbb{R}$ (1/3)

κοινές ιδιότητες των συνόλων $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$

Αξίωμα Ι

Το $\mathbb{R}$ είναι πεδίο με χαρακτηριστική $\mathbf{0}$

Αξίωμα ΙΙ

Το $\mathbb{R}$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο πεδίο

ιδιότητα μόνο του συνόλου $\mathbb{R}$

Αξίωμα ΙΙΙ

Για κάθε άνω φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{R} \Rightarrow \sup A \in \mathbb{R}$

Δομή μαθηματικής θεωρίας:

$\boxed{\text{Ορισμοί}} \rightsquigarrow \boxed{\text{Αξιώματα}} \rightsquigarrow \boxed{\text{Προτάσεις (θεωρήματα)}} \rightsquigarrow \boxed{\text{Προτάσεις}} \rightsquigarrow \cdots$

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ $\mathbb{R}$ (2/3)

- Το $\mathbb{Q}$ είναι **γνήσιο** υποσύνολο του $\mathbb{R}$, διότι $\exists x \notin \mathbb{Q} \ : x \in \mathbb{R}$, πχ $x = \sqrt{2}$
- Το $A = \{q \in \mathbb{Q} \ : \ q > 0 \ \text{ και } q^2 \leq 2\}$ συνεπάγεται ότι $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- Μπορεί να υπάρχει $A \subset \mathbb{Q}$ αλλά $\sup A \notin \mathbb{Q}$

Ιδιότητα που διαχωρίζει το $\mathbb{Q}$ από το $\mathbb{R}$

Αξίωμα ΙΙΙ, Αξίωμα συνεχούς

Για κάθε φραγμένο προς τα άνω σύνολο $\mathbf{A} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \sup \mathbf{A} \in \mathbb{R}$

- Αν $\sup A \in A \ \rightsquigarrow \ \sup A = \max A$
- ΠΡΟΣΟΧΗ $A \subset \mathbb{R} \ \Rightarrow$ **υπάρχει πάντα** το $\sup A \in \mathbb{R}$, αλλά το $\max A$ **μπορεί να μην ορίζεται** πχ

$$A = \{q \in \mathbb{R} \ : \ q > 0 \ \text{ και } q^2 < 5\} \ \rightsquigarrow$$

$\sup A = \sqrt{5}$ αλλά $\nexists \max A$

Αρχιμήδεια Ιδιότητα (1/2)

Δεν υπάρχει το $\sup \mathbb{N}$ στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο

$x \in \mathbb{R} \ \rightsquigarrow \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ x < n$

ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

$a > 0$ **και** $b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n\, a > b$

$x > 0 \ \rightsquigarrow \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ n \leq x < n+1 \rightsquigarrow n = [x]$

Αν $\alpha < \beta \ \rightsquigarrow \ \exists \rho \in \mathbb{Q} \ : \ \alpha < \rho < \beta$

ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ (2/2)

Συμπ.: Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός
$\rightsquigarrow$ Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχουν άπειροι ρητοί

Αν $\alpha < \beta \rightsquigarrow \exists r \notin \mathbb{Q} : \alpha < r < \beta$

Συμπ.: Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος
$\rightsquigarrow$ Μεταξύ δύο πραγματικών υπάρχουν άπειροι άρρητοι

ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ $\mathbb{Q}$ (1/2)

$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : px = q,\, p$ και $q \in \mathbb{Z}\}$, $\qquad \mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{R} : mx = n,\, m$ και $n \in \mathbb{N}\}$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Q}_+ = \Big\{ \ & \frac{1}{1}, \\
& \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \\
& \frac{3}{1}, \boxed{\frac{2}{2}}, \frac{1}{3}, \\
& \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \\
& \frac{5}{1}, \boxed{\frac{4}{2}}, \boxed{\frac{3}{3}}, \boxed{\frac{2}{4}}, \frac{1}{5}, \\
& \frac{6}{1}, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}, \\
& \frac{7}{1}, \boxed{\frac{6}{2}}, \frac{5}{3}, \boxed{\frac{4}{4}}, \frac{3}{5}, \boxed{\frac{2}{6}}, \frac{1}{7}, \ldots \Big\}
\end{aligned}
$$

Διαγράφουμε τους αριθμούς που είναι στα κουτάκια

$$
= \left\{1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, 5, \ldots\right\} \underset{1:1}{\overset{\text{επί}}{\longleftrightarrow}} \mathbb{N}
$$

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο

ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ $\mathbb{Q}$ (2/2)

$$\mathbb{Q} \overset{\text{επί}}{\underset{1:1}{\longleftrightarrow}} \mathbb{N}$$

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, έχει πληθάριθμο $\aleph_0$ (aleph 0)

Το σύνολο $\mathbb{R}$ ΔΕΝ είναι αριθμήσιμο,
έχει πληθάριθμο $\aleph$ (aleph) και $\aleph_0 < \aleph$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- *Απειροστικός Λογισμός*-Τόμος Α΄ Σ.Κ. Ντούγιας, LEADER BOOKS, 2003
- *Διαφορικός Ολοκληρωτικός Λογισμός*, M. Spivak , Παν. Εκδ. Κρήτης,
- *Απειροστικός Λογισμός*, THOMAS-FINLEY, Παν. Εκδ. Κρήτης
- Μαθήματα στο δίκτυο: Μαθήματα Μ. Παπαδημητράκη (Παν. Κρήτης) http://www.math.uoc.gr/~papadim/Apeirostikos1.pdf
- Μαθήματα στο δίκτυο: Μαθήματα Α. Γιαννόπολου (Παν. Αθηνών) http://users.uoa.gr/~apgiannop
- Διαφάνειες: http://users.auth.gr/~daskalo

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

- Isaac Newton: By Sir Godfrey Kneller - http://www.phys.uu.nl/ vgent/astrology/images/newton1689.jpg], Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=146431
- Gottfried Wilhelm Leibniz: By Christoph Bernhard Francke - /gbrown/philosophers/leibniz/BritannicaPages/Leibniz/LeibnizGif.html, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=146619
- Peano: By Unknown - School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland [1], Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2633677

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Δασκαλογιάννης Κωνσταντίνος. "Λογισμός Ι. Ενότητα 1: Εισαγωγή". Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
http://eclass.auth.gr/courses/OCRS434/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης