Λογισμός Ι

Ενότητα 2: Ακολουθίες - Σειρές

Κ. Δασκαλογιάννης
Τμήμα Μαθηματικών

Α.Π.Θ.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό,όπως εικόνες,που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο "Ανοικτά Ακαδημαικά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης " έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος "Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση" και συγχρηματοδοτείται απο την Ευρωπαική Ένωση (Ευρωπαικό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα Ενότητας

- Σημεία Συσσώρευσης και Απομονωμένα Σημεία
- Θεώρημα Bolzano-Weierstrass
- Ακολουθία
- Σύγκλιση ακολουθιών
- Υπακολουθίες
- Μονότονες ακολουθίες
- Ακολουθίες Cauchy
- Αποκλίνουσες ακολουθίες
- Σύγκλιση Σειράς
- Κριτήρια Σύγκλισης

Σκοποί Ενότητας

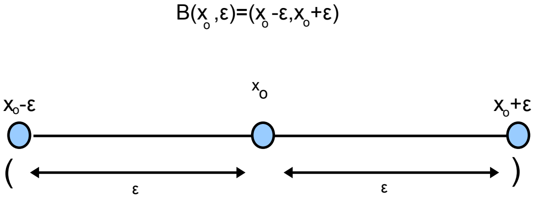
Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τις ακολουθίες, τις σειρές και τις ιδιότητές τους.

Ανοικτή περιοχή

Ανοικτό διάστημα $\equiv (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$

Ορισμός ανοικτής περιοχής ή "σφαίρας" ή "μπάλας"

$(x_0 - \epsilon,\, x_0 + \epsilon) \equiv B(x_0, \epsilon) \equiv$ (ανοικτή) περιοχή του x_0 ακτίνας ϵ



Σημεία συσσώρευσης και απομονωμένα σημεία

Σημείο συσσώρευσης

x_0 σημείο συσσώρευσης του A

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad (B(x_0, \epsilon) - \{x_0\}) \bigcap A \neq \emptyset \quad \text{ή}$$

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, x \in A \ \text{ και } \ x \neq x_0 \ \rightsquigarrow \ |x - x_0| < \epsilon$$

Παράδειγμα: $A = \left\{\frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}\right\}$, το $0 \notin A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Απομονωμένο ή μεμονωμένο σημείο

x_0 απομονωμένο ή μεμονωμένο σημείο του $A \Leftrightarrow$ το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης

$$\exists\, \epsilon > 0 \quad B\left(x_0, \epsilon\right) \bigcap A \ = \ \{x_0\} \quad \text{ή}$$

$$\exists\, \epsilon > 0 \quad \forall\, x \in A \ \text{ και } \ x \neq x_0 \ \rightsquigarrow \ |x - x_0| \geq \epsilon$$

Παράδειγμα: $A = \left\{\frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}\right\}$, το $\frac{1}{5} \in A$ είναι απομονωμένο σημείο του A.

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

Πρόταση

Αν a είναι σημείο συσσώρευσης του $A \Rightarrow$ Το A έχει άπειρο αριθμό στοιχείων (τουλάχιστον αριθμήσιμο) .

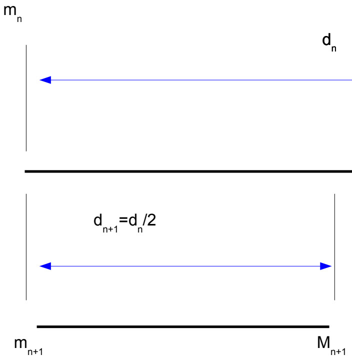
Θεώρημα Bolzano Weierstrass

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης

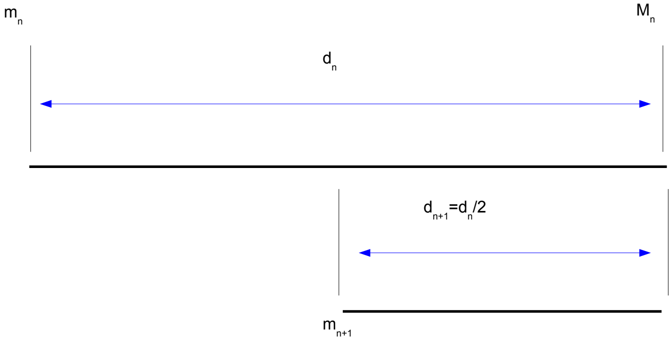
Συμπέρασμα

A φραγμένο απειροσύνολο $\Rightarrow \exists$ σημείο συσσώρευσης

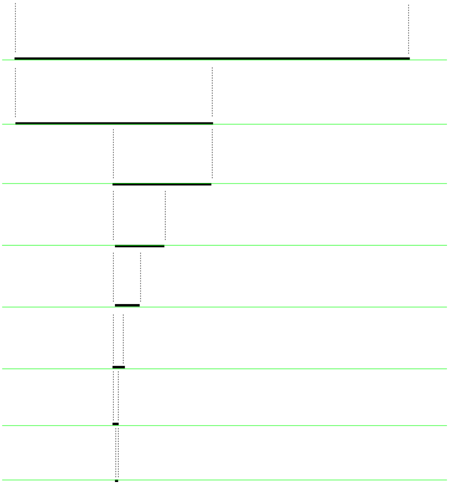
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Πρόταση 1

Πρόταση

Αν a είναι σημείο συσσώρευσης του $A \Rightarrow$ Το A έχει άπειρο αριθμό στοιχείων.

Απόδειξη

Εστω $\boxed{A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}$ έχει n στοιχεία και $\boxed{\text{σημείο συσσώρευσης το } a}$ θέτουμε

$$\epsilon = \min\left\{\frac{1}{2}|a_k - a|, k = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

$$\forall\, x \in A \rightsquigarrow |a - x| > \epsilon \;\rightsquigarrow\; a \text{ όχι σημ. συσσώρευσης}$$

$\rightsquigarrow$ Ατοπο

Θεώρημα Bolzano Weierstrass (Απόδειξη)

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης

Απόδειξη

$$\forall x \in A \rightsquigarrow \inf A = m_0 \leq x \leq M_0 = \sup A$$

$$d_0 = M_0 - m_0 \rightsquigarrow d_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{M_0 - m_0}{2}$$

ή
Χωρίζουμε το διάστημα $[m_0, M_0]$ σε δύο ίσα μέρη, σε κάποιο από αυτά υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A αυτό το διάστημα το ονομάζουμε $[m_1, M_1] \rightsquigarrow d_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{d_0}{2^2}$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία n φορές.

$$m_0 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_n \leq M_n \leq \cdots \leq M_1 \leq M_0$$

$$d_n = \frac{M_{n-1} - m_{n-1}}{2} = \frac{d_0}{2^n}$$

$$\sup\{m_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \xi \leq \eta = \inf\{M_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{Υποθ } \xi < \eta \rightsquigarrow \exists k \in \mathbb{N} : \frac{d_0}{2^k} < \eta - \xi < M_k - m_k = \frac{d_0}{2^k} \rightsquigarrow \text{ άτοπο}$$

Αρα $\xi = \eta$

$$\forall k \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \xi - m_k \leq \frac{d_0}{2^k} \quad \text{και} \quad M_k - \xi \leq \frac{d_0}{2^k} \rightsquigarrow [m_k, M_k] \subset B(\xi, \frac{d_0}{2^k})$$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N} : \epsilon > \frac{d_0}{k} > \frac{d_0}{2^k} \rightsquigarrow [m_k, M_k] \subset B(\xi, \frac{d_0}{2^k}) \subset B(\xi, \epsilon)$$

$$[m_k, M_k] \bigcap A \neq \emptyset \rightsquigarrow B(\xi, \epsilon) \bigcap A \neq \emptyset$$

Το $B(\xi, \epsilon) \bigcap A$ έχει άπειρα στοιχεία του A επομένως το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A

Ακολουθία (1/3)

Ορισμός

Ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \equiv$ λίστα στοιχείων $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.
$x_n \equiv$ είναι ο γενικός όρος

Ισοδύναμος ορισμός

Ακολουθία είναι μια απεικόνιση του $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} \ni n \xrightarrow{f} f(n) = x_n \in \mathbb{R}$$

▷ Παράδειγμα: Δίδεται ο γενικός όρος

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)} \equiv \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \ldots\right)$$

▷ Παράδειγμα: Αναδρομική σχέση

$$x_1 = 1,\ x_n = \frac{n}{2}x_{n-1} \rightsquigarrow x_n = \frac{n!}{2^{n-1}}$$

Ακολουθία (2/3)

▷ Παράδειγμα: Αναδρομική σχέση Fibonacci

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$$

$$\Rightarrow\ x_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}$$

▷ Παράδειγμα: Εναλλασσομένη ακολουθία

$$x_n = \begin{cases} -1 & \textbf{γιά}\ \ n = 2k \\ 1 & \textbf{γιά}\ \ n = 2k+1 \end{cases} \rightsquigarrow$$

$$x_n = (-1)^{n+1} = -\cos n\pi$$

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$$

Ακολουθία (3/3)

▷ Παράδειγμα:

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{γιά} \;\; n = 2k \\ \\ \frac{n-1}{n} & \text{γιά} \;\; n = 2k+1 \end{cases}$$

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1+(-1)^n}{2} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1-(-1)^n}{2}$$

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{1}{2k}, \frac{2k}{2k+1}, \ldots\right)$$

Οριακό Σημείο Ακολουθίας

Οριακό Σημείο

$x = \boxed{\textbf{οριακό}}$ **σημείο** της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\equiv$ Το x είναι σημείο συσσώρευσης της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **ή** Υπάρχουν άπειροι όροι $= x$

▷ Παράδειγμα: Ακολουθία με γενικό όρο

$$x_n = \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} + \frac{(n+1)\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{5}, \frac{7}{6}, \frac{1}{7}, \dots\right)$$

οριακά σημεία 0 και 1

▷ Παράδειγμα: Ακολουθία με γενικό όρο

$$x_n = 1 + \frac{(n+1)\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\left(1, \frac{5}{2}, 1, \frac{9}{4}, 1, \frac{13}{6}, 1, \dots\right)$$

οριακά σημεία 2 και 1

Σύγκλιση ακολουθιών

Ορισμός: ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ

Η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ή $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ αν για κάθε περιοχή του x "τελικά" όλοι οι όροι της ακολουθίας περιέχονται σε αυτή

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \equiv \forall\,\epsilon > 0 \quad \exists\, N(\epsilon) > 0 \,:\, \forall\, n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; x_n \in B(x,\epsilon)$$

Εψιλοντικός ορισμός

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \equiv \forall\,\epsilon > 0 \quad \exists\, N(\epsilon) > 0 \,:\, \forall\, n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |x_n - x| < \epsilon$$

Μιά συγλίνουσα ακολουθία έχει **μόνο** ένα οριακό σημείο.

Παράδειγμα 1

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = x\} \equiv \{\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N(\epsilon) > 0 \,:\, \forall\, n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |x_n - x| < \epsilon\}$$

Παράδειγμα:

$$\boxed{x_n = \tfrac{1}{n}} \;\rightsquigarrow\; \lim_{n\to n} x_n = 0$$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$$n > N \;\rightsquigarrow\; |x_n - x| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{φθίνουσα;}} < \frac{1}{N} = \epsilon$$

$$\frac{1}{N} = \epsilon, \quad \boxed{N(\epsilon) = \tfrac{1}{\epsilon}}$$

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \,:\, \forall\, n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |x_n| < \epsilon$$

Παράδειγμα 2

$$\{\lim_{n\to\infty} x_n = x\} \equiv \{\forall\,\epsilon > 0 \quad \exists\, N(\epsilon) > 0 \,:\, \forall\, n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |x_n - x| < \epsilon\}$$

Παράδειγμα:

$$x_n = \frac{1}{n^2+\mathrm{e}^n} \;\rightsquigarrow\; \lim_{n\to n} x_n = 0$$

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

$$n > N \;\rightsquigarrow\; |x_n - x| = \frac{1}{n^2+\mathrm{e}^n} \leq \underbrace{\frac{1}{\mathrm{e}^n}}_{\text{φθίνουσα;}} < \frac{1}{\mathrm{e}^N} = \epsilon$$

$$\frac{1}{\mathrm{e}^N} = \epsilon \;\rightsquigarrow\; N(\epsilon) = \ln\frac{1}{\epsilon}$$

$$\forall\,\epsilon > 0\;\exists\, N(\epsilon) = \ln\frac{1}{\epsilon} \;:\; n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; |x_n| < \epsilon$$

Παράδειγμα 3

$$a > 1, \rightsquigarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1}$$

$$1 + x > 0 \rightsquigarrow (1+x)^n \geq 1 + nx \text{ (Bernoulli) } \rightsquigarrow$$

$$a > 1 \rightsquigarrow a = \Big(\underbrace{\sqrt[n]{a} - 1}_{x} + 1\Big)^n \geq 1 + n\Big(\underbrace{\sqrt[n]{a} - 1}_{x}\Big) \rightsquigarrow$$

$$\sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$$

Πρόχειρο

$$n > N \rightsquigarrow \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n} < \frac{a-1}{N} = \epsilon \rightsquigarrow \boxed{N(\epsilon) = \frac{a-1}{\epsilon}}$$

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N(\epsilon) = \frac{a-1}{\epsilon} \ :$$

$$n > N(\epsilon) \rightsquigarrow |\sqrt[n]{a} - 1| \leq \frac{|a-1|}{n} < \frac{|a-1|}{N} = \epsilon$$

Παράδειγμα 4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{n!}{n^n} \quad &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{n^n} \\
&= \tfrac{1}{n}\cdot\tfrac{2}{n}\cdot(1-\tfrac{2}{n})\cdot(1-\tfrac{1}{n}) \\
&= \tfrac{1}{n}\cdot\prod_{k=1}^{n-2}\underbrace{\left(1-\frac{k}{n}\right)}_{<1} < \tfrac{1}{n}
\end{aligned}$$

Πρόχειρο

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \epsilon \;\rightsquigarrow\; N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\exists\, N(\epsilon) = \tfrac{1}{\epsilon} \;:$$

$$n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; \left|\frac{n!}{n^n}\right| \le \frac{1}{n} < \frac{1}{N(\epsilon)} = \epsilon$$

Παράδειγμα 5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$$

$$\begin{aligned} 2^n = \quad & (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} = \cdots + \tbinom{n}{4} + \cdots = \\ & = \cdots + \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} + \cdots \end{aligned}$$

$$2^n > \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$n > 6 \;\rightsquigarrow\; n-k > \frac{n}{2} \;\; \text{για } k = 1, 2, 3$$

$$2^n > \frac{n^4}{2^3\, 4!} \;\rightsquigarrow\; \frac{2^3 \cdot 4!}{n} > \frac{n^3}{2^n}$$

Πρόχειρο

$$\frac{n^3}{2^n} < \frac{2^3 \cdot 4!}{n} < \frac{2^3 \cdot 4!}{N} = \epsilon \;\rightsquigarrow\; N(\epsilon) = \frac{2^3 \cdot 4!}{\epsilon}$$

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N(\epsilon) = \tfrac{2^3 \cdot 4!}{\epsilon} :$$

$$\forall\, n > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; \left|\tfrac{n^3}{2^n}\right| < \tfrac{2^3 \cdot 4!}{n} < \tfrac{2^3 \cdot 4!}{N(\epsilon)} = \epsilon$$

ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι **μηδενική ακολουθία** $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ή $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0 : \forall\, n > N(\epsilon) \rightsquigarrow |x_n| < \epsilon$

Μηδ. 1: $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow |x_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Μηδ. 2: $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \lambda\, x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Μηδ. 3: $\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ και } y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\} \Rightarrow \left\{x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$

Μηδ. 4: $\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ και } |y_n| < M\right\} \Rightarrow \left\{x_n \cdot y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$

Μηδ. 5: $\left\{|x_n| \leq |y_n| \text{ και } y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\} \Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Μηδ. 6:

$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη $\Leftrightarrow \exists\, C > 0 : \forall\, n \rightsquigarrow |x_n| < C$

ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ (1/2)

Ορισμός συγκλίνουσας ακολουθίας

$$\{\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ συγκλίνει στο } x\ \} \Leftrightarrow \{\ \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ή } x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\}$$
$$\Leftrightarrow \{\forall\,\epsilon>0,\ \exists\,N(\epsilon)>0\ :\ n>N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |x_n-x|<\epsilon\}$$
$$\Leftrightarrow \{\ \{(x_n-x)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ μηδενική ακολουθία}\}$$

Πρ. 1

$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \Rightarrow |x_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|$

Πρ. 2

$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \Rightarrow \lambda x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda x$

Πρ. 3

$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \Rightarrow \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **φραγμένη** $\Leftrightarrow$
$\exists C,\, D>0$ **και** $N>0 : \forall n>N \rightsquigarrow D<|x_n|<C$

Πρ. 4

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ και } y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y\right\} \Rightarrow \left\{x_n+y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x+y\right\}$$

Πρ. 5

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ και } y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y\right\} \Rightarrow \left\{x_n\cdot y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\cdot y\right\}$$

ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ (2/2)

Πρ. 6α: $\left\{0 \leq x_n \text{ και } x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Rightarrow \{0 \leq x\}$

Πρ. 6β: $\left\{x_n \leq y_n \text{ και } x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x, \quad y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y\right\} \Rightarrow \{x \leq y\}$

Πρ. 7: $\left\{\begin{array}{c} z_n \leq x_n \leq y_n \\ \text{και} \\ z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, \quad y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a\right\}$

Πρ. 8α: $\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ και } x \neq 0\right\} \Rightarrow \left\{\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x}\right\}$

Πρ. 8β: $\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x, \; y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \text{ και } y \neq 0, \right\} \Rightarrow \left\{\frac{x_n}{y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{y}\right\}$

Πρ. 9α: $\{|a| < 1\} \Rightarrow \left\{a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$

Πρ. 9β: $\left\{x_n \neq 0, \; \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} k < 1\right\} \rightsquigarrow \left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$

Ορισμός

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι **μηδενική ακολουθία** $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ή $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Leftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0\ :\ \forall\, n > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |x_n| < \epsilon$

Πρόταση Μηδ.1

$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow |x_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Πρόταση Μηδ.2

$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \lambda\, x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

☐ *Απόδ*:

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0\ : \\ n > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |x_n| < \epsilon \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Πρόχειρο:} \\ |x_n| < \epsilon\ \rightsquigarrow\ |\lambda\, x_n| = |\lambda|\,|x_n| < |\lambda|\epsilon = \epsilon' \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{c} \forall\, \epsilon' > 0, \\ \exists\, N'(\epsilon') = N\left(\frac{\epsilon'}{|\lambda|}\right) = N(\epsilon) > 0\ : \\ n > N'(\epsilon') = N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |x_n| < \epsilon\ \rightsquigarrow\ |\lambda\, x_n| < \epsilon' \end{array}\right\}$$

$$\rightsquigarrow\ \left\{|\lambda\, x_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$$

☐

Αποδείξεις για μηδενικές ακολουθίες (1/3)

Πρόταση Μηδ. 3

$$\left\{ \begin{array}{c} x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

☐ *Απόδ*:

$$\left\{ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0, \ \exists N_1(\epsilon) > 0 : \\ n > N_1(\epsilon) \ \rightsquigarrow \ |x_n| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\left\{ y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0, \ \exists N_2(\epsilon) > 0 : \\ n > N_2(\epsilon) \ \rightsquigarrow \ |y_n| < \epsilon \end{array} \right\}$$

(Πρόχειρο : $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < 2\epsilon = \epsilon'$)

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon' > 0, \ \exists N'(\epsilon') = \max\left\{ N_1\left(\frac{\epsilon'}{2}\right), N_2\left(\frac{\epsilon'}{2}\right) \right\} > 0 : \\ n > N'(\epsilon') \geq N_1\left(\frac{\epsilon'}{2}\right) = N_1(\epsilon) \ \rightsquigarrow \ |x_n| < \frac{\epsilon'}{2} \\ n > N'(\epsilon') \geq N_2\left(\frac{\epsilon'}{2}\right) = N_2(\epsilon) \ \rightsquigarrow \ |y_n| < \frac{\epsilon'}{2} \\ \text{Αρα} \ \ |x_n + y_n| = |x_n| + |y_n| < \epsilon' \end{array} \right\}$$

Επομένως $x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ☐

Αποδείξεις για μηδενικές ακολουθίες (2/3)

Πρόταση Μηδ. 4

$$\left\{ \begin{array}{c} x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \\ |y_n| < M \end{array} \right\} \Rightarrow x_n \cdot y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

☐ *Απόδ*:

$$\left\{ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N_1(\epsilon) > 0\ : \\ n > N_1(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |x_n| < \epsilon \end{array} \right\}$$

(Πρόχειρο $: \ |x_n \cdot y_n| \leq |x_n| \cdot |y_n| < \epsilon M = \epsilon'$)

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon' > 0,\ \exists\, N'(\epsilon') = N_1(\epsilon'/M)\ : \\ n > N'(\epsilon')) = N_1(\epsilon'/M)\ \rightsquigarrow\ |x_n| < \epsilon'/M \\ \text{Άρα}\ \ |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \epsilon' \end{array} \right\}$$

Επομένως $x_n \cdot y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ☐

Αποδείξεις για μηδενικές ακολουθίες (3/3)

Πρόταση Μηδ. 5

$$\left\{\begin{array}{c}|x_n| \leq |y_n| \\ \textbf{και} \\ y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{array}\right\} \Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

☐ *Απόδ*:

$$\left\{y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0\ : \\ n > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |x_n| \leq |y_n| < \epsilon\end{array}\right\}$$

☐

Απόδειξη Μη. 6

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow$$
$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ \textbf{φραγμένη} \Leftrightarrow$$
$$\exists\, C > 0\ :\ \forall\, n\ \rightsquigarrow\ |x_n| < C$$

☐ ***Απόδ***: $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ \rightsquigarrow\ \epsilon = 1,\ \exists\, N(1)\ :\ n > N(1)\ \rightsquigarrow\ |x_n| < 1$

$$C = 1 + \max\{|x_k|,\ k \leq x_n\} \Rightarrow \forall\, n\ \rightsquigarrow\ |x_n| < C$$

☐

Ορισμός

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ συγκλίνει στο } x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ή } x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\,\epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0\ :\ n > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |x_n - x| < \epsilon$$

Πρ. 1

$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \ \Rightarrow\ |x_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|$

☐ *Απόδ*:

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\,\epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0\ : \\ n > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |x_n - x| < \epsilon \end{array} \right\}$$

Επειδή $|\,(|x_n| - |x|)\,| \le |x_n - x| < \epsilon$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\,\epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0\ : \\ n > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |\,(|x_n| - |x|)\,| \le |x_n - x| < \epsilon \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |x_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|$$

☐

Πρ. 2

$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \ \Rightarrow\ \lambda x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda x$

Πρ. 3

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \;\Rightarrow\; \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\text{φραγμένη}\; \Leftrightarrow$$
$$\exists\, C,\, D > 0 \;\text{και}\; N > 0 : \forall\, n > N \;\rightsquigarrow\; D < |x_n| < C$$

☐ *Απόδ*:

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{για} \quad \epsilon = \frac{|x|}{2},\ \exists\, N\left(\frac{|x|}{2}\right) > 0 \ : \\ n > N\left(\frac{|x|}{2}\right) \;\rightsquigarrow\; |x_n - x| < \frac{|x|}{2} \end{array} \right\}$$

Για $n > N\left(\frac{|x|}{2}\right)$ η τριγωνική ιδιότητα δίνει

$$|x_n| = |(x_n - x) + x| \le |x_n - x| + |x| < \frac{3}{2}|x| = C$$

$$D = \frac{|x|}{2} < |x| - |(x_n - x)| \le |(x_n - x) + x| = |x_n|$$

☐

Πρ. 4:

$$\left\{\begin{array}{c} x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \\ \\ y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \end{array}\right\} \Rightarrow x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x+y$$

Πρ. 5:

$$\left\{\begin{array}{c} x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \\ \\ y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \end{array}\right\} \Rightarrow x_n \cdot y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\cdot y$$

☐ *Απόδ*:

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\, \epsilon>0,\ \exists\, N_1(\epsilon)>0 : \\ n > N_1(\epsilon) \rightsquigarrow |x_n - x| < \epsilon \end{array}\right\}$$

$$\text{Πρ. 3} \rightsquigarrow \forall\, n > N_1\left(\frac{|x|}{2}\right) \rightsquigarrow |x_n| < \frac{3|x|}{2}$$

$$\left\{y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\, \epsilon>0,\ \exists\, N_2(\epsilon)>0 : \\ n > N_2(\epsilon) \rightsquigarrow |y_n - y| < \epsilon \end{array}\right\}$$

Πρόχειρο:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| = &\ |x_n(y_n-y) + (x_n - x)y| \le \\ \le &\ |x_n|\cdot|y_n - y| + |x_n - x|\cdot|y| \le \\ \le &\ \tfrac{3|x|}{2}\epsilon + |y|\epsilon = \epsilon' \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} \forall\, \epsilon'\ \exists\, N'(\epsilon') = \\ = \max\{N_1\left(\tfrac{\epsilon'}{|y|+3|x|/2}\right), N_2\left(\tfrac{\epsilon'}{|y|+3|x|/2}\right).N_1\left(\tfrac{|x|}{2}\right)\} \\ n > N'(\epsilon') \rightsquigarrow |x_n y_n - xy| < \epsilon' \\ \Rightarrow x_n y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} xy \end{gathered}$$

☐

Πρ. 6α

$$\left\{\begin{array}{c} 0 \le x_n \\ \text{και} \\ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \le x$$

☐ *Απόδ*: Εστω $x < 0 \rightsquigarrow \exists N\left(\frac{|x|}{2}\right)$:
$n > N\left(\frac{|x|}{2}\right) \rightsquigarrow |x_n - x| < \frac{|x|}{2} \rightsquigarrow x_n < 0$ άτοπο. ☐

Πρ. 6β

$$\left\{\begin{array}{c} x_n \le y_n \\ \text{και} \\ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x, \quad y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \end{array}\right\} \Rightarrow x \le y$$

Πρ. 7

$$\left\{\begin{array}{c} z_n \le x_n \le y_n \\ \text{και} \\ z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, \quad y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \end{array}\right\} \Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

☐ *Απόδ*: Είναι μια άμεση εφαρμογή της προηγούμενης πρότασης.
Αλλη απόδειξη με εψιλοντικό ορισμό:

$$\left\{y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N_1(\epsilon) > 0 : \\ n > N_1(\epsilon) \rightsquigarrow a - \epsilon < y_n < a + \epsilon \end{array}\right\}$$

$$\left\{z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N_2(\epsilon) > 0 : \\ n > N_2(\epsilon) \rightsquigarrow a - \epsilon < z_n < a + \epsilon \end{array}\right\}$$

$$n > \max\{N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)\} \rightsquigarrow a - \epsilon < z_n \le x_n \le y_n < a + \epsilon$$

$$\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

☐

ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ-Αποδείξεις (5/5)

Πρ. 8

$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ και $x \neq 0 \rightsquigarrow \dfrac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{x}$

Πρ. 9α

$|a| < 1 \Rightarrow a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

□ *Απόδ*: $|a| < 1 \rightsquigarrow |a| = \frac{1}{1+x},\ x > 0 \rightsquigarrow$
$(1+x)^n \geq 1 + nx \rightsquigarrow \frac{1}{|a|^n} \geq 1 + n(\frac{1}{|a|} - 1) \rightsquigarrow$
$|a|^n \leq \frac{1}{1+n(\frac{1}{|a|}-1)} \rightsquigarrow |a|^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ □

Πρ. 9β

$x_n \neq 0,\ |\frac{x_{n+1}}{x_n}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} k < 1 \rightsquigarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

□ *Απόδ*:

$$
\begin{gathered}
|\tfrac{x_{n+1}}{x_n}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} k < 1 \Rightarrow \\
\epsilon = \tfrac{1-k}{2},\ \exists N\left(\tfrac{1-k}{2}\right) : \\
n > N\left(\tfrac{1-k}{2}\right) > \left[N\left(\tfrac{1-k}{2}\right)\right] = m \rightsquigarrow \\
|\ |\tfrac{x_{n+1}}{x_n}| - k| < \tfrac{1-k}{2} \rightsquigarrow |\tfrac{x_{n+1}}{x_n}| < k + \tfrac{1-k}{2} = \tfrac{1+k}{2}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
&|x_{m+1}| < \tfrac{1+k}{2}|x_m| \\
&|x_{m+2}| < \tfrac{1+k}{2}|x_{m+1} < \left(\tfrac{1+k}{2}\right)^2 |x_m| \\
&\cdots\cdots \\
&|x_n| = |x_{m+(n-m)}| < \\
&< \left(\tfrac{1+k}{2}\right)^{n-m} |x_m| = \left(\tfrac{1+k}{2}\right)^{n} \cdot \left(\tfrac{1+k}{2}\right)^{-m} |x_m|
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{n\to 0}|x_n| \leq \underbrace{\lim_{n\to 0}\left(\frac{1+k}{2}\right)^n}_{=0} \cdot \left(\frac{1+k}{2}\right)^{-m} |x_m| = 0
$$

□

Διάφορες ιδιότητες ακολουθιών

Ιδ. 1 : $a > 0,\ \sqrt[n]{a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Ιδ. 2 : $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Ιδ. 3 : $x_n > 0,\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \rightsquigarrow \sqrt[k]{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt[k]{x}$

Ιδ. 4 : $P(n) = a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_{p-1} n + a_p,$

$Q(n) = b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + a_{q-1} n + a_q$

Αν $p = q$ τότε $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{a_0}{b_0}$

Αν $p < q$ τότε $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ορισμός

Μια επιλογή $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ από $\boxed{\text{άπειρους}}$ όρους της ακολουθίας, με $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ ονομάζεται $\boxed{\text{υπακολουθία}}$ της $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\big(x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & x_9, & \dots \big) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\big(\cancel{x_1} & x_2, & x_3, & \cancel{x_4} & \cancel{x_5} & x_6, & x_7, & \cancel{x_8} & x_9, & \dots \big) \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\big(& x_{n_1}, & x_{n_2}, & & & x_{n_3}, & x_{n_4}, & & x_{n_5}, & \dots \big) \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\big(& y_1, & y_2, & & & y_3, & y_4, & & y_5, & \dots \big)
\end{array}
$$

Σημείωση για τους δείκτες: $\boxed{k \le n_k}$ και $\boxed{k < \ell \ \rightsquigarrow n_k < n_\ell}$

ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ (2/2)

Υπακ.1

x_n συγκλίνει στο x $\Leftrightarrow$ κάθε υπακολουθία $y_k = x_{n_k}$ συγκλίνει στο x

Παράδειγμα: $\{\sqrt[n]{n} \to 1\} \leadsto \left\{\sqrt[n^2]{n^2} \to 1\right\}$

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης

Υπακ. 2

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία

Υπακ. 1

$$\boxed{x_n \text{ συγκλίνει στο } x} \Leftrightarrow \boxed{\text{κάθε υπακολουθία } y_k = x_{n_k} \text{ συγκλίνει στο } x}$$

Παράδειγμα: $\{\sqrt[n]{n} \to 1\} \rightsquigarrow \left\{\sqrt[n^2]{n^2} \to 1\right\}$

☐ *Απόδ:*

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\,\epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0\ : \\ k > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |x_k - x| < \epsilon \end{array}\right\}$$

Επειδή $n_k \geq k > N(\epsilon)$ τότε $|x_{n_k} - x| < \epsilon$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\,\epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) > 0\ : \\ n_k > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |x_{n_k} - x| < \epsilon \end{array}\right\} \Rightarrow$$

☐

Αποδείξεις για τις υπακολουθίες (2/2)

Θεώρημα Bolzano Weierstrass

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένο απειροσύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης

$$\Downarrow$$

Υπ. 2

Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία

☐ *Απόδ*:

▶ Αν η ακολουθία έχει μια απειρία από σταθερούς όρους τότε διαλέγουμε την υπακολουθία από τους σταθερούς όρους και είναι συκλίνουσα

▶ αν η ακολουθία έχει άπειρους μη ίσους όρους τότε έχουμε ένα φραγμένο απειροσύνολο $\Rightarrow$ υπάρχει ένα σημείο συσσώρευσης $x \Rightarrow$

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists x_{k_n} \, : \, x - \frac{1}{n} < x_{k_n} < x + \frac{1}{n}$$

Άρα $x_{k_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. ☐

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

x_n είναι **αύξουσα ακολουθία** $\Leftrightarrow x_n \leq x_{n+1}$

x_n είναι **φθίνουσα ακολουθία** $\Leftrightarrow x_n \geq x_{n+1}$

x_n είναι **μονότονη ακολουθία** $\Leftrightarrow$ φθίνουσα ή αύξουσα ακολουθία

Μον. 1α

x_n είναι αύξουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

Μον. 1β

x_n είναι φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

Μον. 2

x_n είναι μονότονη ακολουθία και έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \Rightarrow$ η ακολουθία x_n συγκλίνει στο ίδιο όριο δηλ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

x_n είναι $\boxed{\text{αύξουσα ακολουθία}}$ $\Leftrightarrow x_n \leq x_{n+1}$

x_n είναι $\boxed{\text{φθίνουσα ακολουθία}}$ $\Leftrightarrow x_n \geq x_{n+1}$

x_n είναι x_n είναι $\boxed{\text{μονότονη ακολουθία}}$ $\Leftrightarrow$ φθίνουσα ή αύξουσα ακολουθία

Μον. 1α

x_n είναι αύξουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

☐ *Απόδ*: Εχουμε $x_n \leq x_{n+1} \leq K$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις,
είτε υπάρχει κάποιος δείκτης ℓ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq \ell \rightsquigarrow x_n = L \in \mathbb{R}$, στην περίπτωση αυτή

$$L = \lim_{k\to\infty} x_k = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$$

είτε η ακολουθία έχει απειρους διαφορετικούς όρους. Εστω $\mathbb{R} \ni M = \sup\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (υπάρχει το M λόγω του αξιώματος III του συνόλου $\mathbb{R}$!) τότε από τον ορισμό του $\sup$

$$\forall \epsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} \,:\, M - \epsilon < x_k \leq M$$

$$x_n \text{ αύξουσα } \Rightarrow \forall n > k \rightsquigarrow x_k \leq x_n \leq M < M + \epsilon \Rightarrow$$

Επομένως

$$\forall \epsilon > 0, \exists k = N(\epsilon) \,:\, n > N(\epsilon) \rightsquigarrow M - \epsilon < x_n < M + \epsilon$$

άρα $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} M$ ☐

Μον. 1β

x_n είναι φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

Μον. 2

x_n είναι μονότονη ακολουθία και έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \Rightarrow$ η ακολουθία x_n συγκλίνει στο ίδιο όριο δηλ $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

Απόδειξη.

Η υπακολουθία x_{n_k} είναι μια μονότονη (πχ αύξουσα) ακολουθία, επομένως $x = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{x_{n_k}\}$. Το x είναι επίσης supremum της υπαακολουθίας x_{n_k} (βλ. Μον. 1α). Θέτουμε $A = \{x_{n_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ και $B = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $\forall\, z \in A \ \rightsquigarrow\ z \in B$ επομένως $z \leq \sup\, B$ δηλαδή $x = \sup\, A \leq \sup\, B$. Αν $\sup\, A < \sup\, B \rightsquigarrow \exists\, \ell\ :\ x_\ell > x$ αλλά τότε υπάρχει κάποιο m έτσι ώστε $x_{n_m} \geq x_\ell > x$ πράγμα άτοπο. Οπότε $\sup\, A = \sup\, B$. □

- Ορ. $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\frac{1}{n^\ell} = 1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{2!n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}$$
$$= \sum_{\ell=0}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\ell+1)}{\ell!\,n^\ell} = \sum_{\ell=0}^{n}\frac{1}{\ell!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell}{\right.}$$

- $x_{n+1} > x_n \rightsquigarrow$ **αύξουσα ακολουθία**

$$x_{n+1} = \sum_{\ell=0}^{n+1}\frac{1}{\ell!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell-1}{n+1}\right)$$
$$= \sum_{\ell=0}^{n}\frac{1}{\ell!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell-1}{n+1}\right)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$
$$\left(1-\frac{k}{n+1}\right) > \left(1-\frac{k}{n}\right) \rightsquigarrow x_{n+1} > x_n$$

Παράδειγμα 6.2

- Ορ. $y_n = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}$
- $y_{n+1} > y_n \rightsquigarrow$ αύξουσα ακολουθία
- $x_n \leq y_n$
- y_n φραγμένη ακολουθία $\rightsquigarrow x_n$ φραγμένη ακολουθία

$$\frac{1}{\ell!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \ell} \leq \frac{1}{2^{\ell-1}}$$

$$\begin{aligned} x_n < y_n = {} & 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \\ = {} & 1 + \left(1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < \\ < {} & 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

- $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}$ και $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^* \rightsquigarrow \mathrm{e} \leq \mathrm{e}^*$
- $\gamma_{n,k} = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{\ell!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{\ell-1}{n}\right)$
- $\gamma_{n,k} \leq x_n \leq \mathrm{e} \rightsquigarrow \gamma_{n,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} y_k \rightsquigarrow$

Παράδειγμα 6.3

- $y_k \leq \mathrm{e} \;\rightsquigarrow\; \lim_{k\to\infty} y_k = \mathrm{e}^* \leq \mathrm{e}$
- $\mathrm{e} = \mathrm{e}^* \;\leftrightsquigarrow\; \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=}^{\infty}\frac{1}{k!}$
- $1 \geq \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - n\frac{1}{n^2} \;\rightsquigarrow\; \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$
- $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \dfrac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$
- $k \in \mathbb{N} \;\rightsquigarrow\; \left(1+\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^k$
- $\left(1+\frac{k}{\ell\, n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{k/\ell}$
- $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \mathrm{e}^\alpha = \sup\{e^q,\, q\in\mathbb{Q},\; q\leq\alpha\},\ \alpha>0$

Ορισμός

$$\left\{x_n \quad \text{Cauchy}\right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0 \;\exists\, N(\epsilon) \;\; : \\ \\ \forall\, n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow |x_n - x_m| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Rightarrow \left\{x_n \quad \text{Cauchy}\right\}$$

$$\left\{x_n \quad \text{Cauchy}\right\} \text{ ΚΑΙ } \left\{x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Rightarrow \left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\}$$

$$\left\{x_n \quad \text{Cauchy}\right\} \Rightarrow \left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\}$$

Θεώρημα πληρότητας

$$\left\{x_n \quad \text{Cauchy}\right\} \Leftrightarrow \left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\}$$

Θεώρημα πληρότητας

$$\Big\{ x_n \;\; \text{Cauchy} \;\Big\} \Leftrightarrow \Big\{ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \Big\}$$

$$\Big\{ \; x_n \; \boxed{\textbf{δεν}} \; \text{συγκλίνει} \; \Big\} \Leftrightarrow \Big\{ x_n \; \boxed{\textbf{όχι}} \; \text{Cauchy} \; \Big\}$$

$$\exists\, \epsilon, \quad \forall\, N > 0 : \; \exists\, n > m > N \;\rightsquigarrow\; |x_n - x_m| > \epsilon$$

πχ.

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \;\; \text{δεν συγκλίνει}$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \;\; \text{συγκλίνει}$$

Συστολή ακολουθίας

Αν $|x_{n+1} - x_n| < k|x_n - x_{n-1}|$ και $k < 1$ $\leftrightsquigarrow$ Η x_n είναι **συστολή** $\Rightarrow$ η x_n είναι Cauchy

Ορισμός

$$\left\{x_n \ \text{Cauchy}\right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0 \, \exists\, N(\epsilon) \ : \\ \\ \forall\, n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow |x_n - x_m| < \epsilon \end{array} \right\}$$

Πρόταση

$$\boxed{\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Rightarrow \left\{x_n \ \text{Cauchy}\right\}}$$

Απόδειξη.

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N(\epsilon) > 0 \ : \\ m > N(\epsilon) \ \rightsquigarrow \ |x - x_m| < \epsilon \end{array} \right\} \rightsquigarrow$$

$$n > m \ \rightsquigarrow \ |x_n - x| < \epsilon$$

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < 2\epsilon = \epsilon' \ \rightsquigarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon' > 0 \, \exists\, N'(\epsilon') = N\left(\frac{\epsilon'}{2}\right) \ : \\ \\ \forall\, n > m > N'(\epsilon') \ \rightsquigarrow \ |x_n - x_m| < \epsilon' \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{x_n \ \text{Cauchy}\right\}$$

□

Λήμμα

$\left\{x_n \text{ Cauchy}\right\}$ ΚΑΙ $\left\{x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left\{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x\right\}$

Απόδειξη.

$$\{x_n \text{ Cauchy}\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N_1(\epsilon)\ : \\ \\ \forall\, n > m > N_1(\epsilon) \rightsquigarrow |x_n - x_m| < \epsilon \end{array}\right\}$$

$$\left\{x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N_2(\epsilon)\ : \\ \\ \forall\, k > N_2(\epsilon) \rightsquigarrow |x_{n_k} - x| < \epsilon \end{array}\right\}$$

Αν $\epsilon' = 2\epsilon$ και $N'(\epsilon') = \max\left\{N_1(\epsilon),\, N_2(\epsilon)\right\}$ τότε $n > n_k > N'(\epsilon') \rightsquigarrow$

$$|x_n - x| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < 2\epsilon = \epsilon'$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \forall\, \epsilon' > 0 \quad \exists\, N'(\epsilon') > 0\ : \\ n > N'(\epsilon') \rightsquigarrow |x - x_n| < \epsilon' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x\right\}$$

□

Πρόταση

$\boxed{\left\{x_n \text{ Cauchy}\right\} \Rightarrow \left\{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x\right\}}$

Απόδειξη.

$\left\{x_n \text{ Cauchy}\right\} \Rightarrow$

$$\epsilon = 1\, \exists\, n_0 > N(1)\ :\ n > n_0 \rightsquigarrow$$

$$|x_n| \le |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}| \rightsquigarrow$$

x_n τελικά φραγμένη $\underset{\text{Bolzano}}{\rightsquigarrow}$ $\exists$ υπακολουθία που συγκλίνει $\underset{\text{Λήμμα}}{\rightsquigarrow}$ x_n συγκλίνει.

□

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ

$$\boxed{\left\{x_n \ \text{Cauchy}\right\} \Leftrightarrow \left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\}}$$

$$\left\{\ x_n\ \boxed{\textbf{δεν}}\ \text{συγκλίνει}\ \right\} \Leftrightarrow \left\{x_n\ \boxed{\textbf{όχι}}\ \text{Cauchy}\ \right\}$$

$$\exists\,\epsilon, \quad \forall\, N > 0:\ \exists\, n > m > N \ \rightsquigarrow\ |x_n - x_m| > \epsilon$$

πχ.

Πρόταση

$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει

Απόδειξη.

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$

□

Πρόταση

$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
x_n - x_m = & \ \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \\
& \leq \tfrac{1}{m(m+1)} + \tfrac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \tfrac{1}{n(n-1)} = \\
= & \ \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{m+1} + \tfrac{1}{m+1} - \tfrac{1}{m+2} + \cdots + \tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n} \\
= & \ \tfrac{1}{m} \cancel{- \tfrac{1}{m+1}} \cancel{+ \tfrac{1}{m+1}} \cancel{- \tfrac{1}{m+2}} + \cdots + \cancel{\tfrac{1}{n-1}} - \tfrac{1}{n} \\
= & \ \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{n} < \tfrac{1}{m}
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{c}
\forall\,\epsilon > 0\ \exists\, N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\ : \\
\\
\forall\, n > m > N(\epsilon)\ \rightsquigarrow\ |x_n - x_m| < \frac{1}{m} < \epsilon
\end{array}\right\}$$

□

Πλήρης χώρος και ακολουθίες Cauchy

Πλήρης χώρος $\Leftrightarrow$ **κάθε** ακολουθία Cauchy συγκλίνει

- Το $\mathbb{R}$ είναι πλήρης χώρος
- Το $\mathbb{Q}$ **δεν** είναι πλήρης χώρος

πχ. Η ακολουθία $x_1 = 2,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$

$$x_n \in \mathbb{Q} \ \textbf{αλλά} \ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Αν γνωρίζουμε μόνο το $\mathbb{Q}$ μπορούμε να πάρουμε το σύνολο ακολουθιών Cauchy και το σύνολο αυτό είναι ένα ολικά διατεταγμένο πεδίο/σώμα που κάθε ταυτίζεται με το $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}=$ Cauchy- πλήρωση του $\mathbb{Q}$

Αξιώματα

Constructive	Axiomatic
Αξιώματα Peano $\Updownarrow$ $\mathbb{N}$ $\Downarrow$ προσθετική ομάδα $\Downarrow$ $\mathbb{Z}$ $\Downarrow$ πολλαπλασιαστική ομάδα $\Downarrow$ $\mathbb{Q}$ $\Downarrow$ Cauchy- πλήρωση $\Downarrow$ $\mathbb{R}$	Αξιώματα I, II, III $\Updownarrow$ $\mathbb{R}$ $\Downarrow$ μέγιστο 1-hereditary σύνολο $\Updownarrow$ $\mathbb{N}$ $\Downarrow$ προσθετική ομάδα $\Downarrow$ $\mathbb{Z}$ $\Downarrow$ πολλαπλασιαστική ομάδα $\Downarrow$ $\mathbb{Q}$

Πρ. (Stolz)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\[2ex] b_k > 0 \quad \text{και} \quad \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

πχ $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \rightsquigarrow \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

$$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots\sqrt[n]{n}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} n$$

$$k \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \frac{1+2^k+3^k+\cdots n^k}{n^{k+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{k+1}$$

Πρόταση

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \Rightarrow \sqrt[n]{|x_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

π.χ. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5-3n^3+8} = 1$

Συμπληρωματικά κριτήρια σύγκλισης (1/2)

Πρ (Stolz):

$$\left.\begin{array}{r}\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \\ b_k>0 \quad \text{και} \quad \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$$

☐ *Απόδ*:

$$\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{c}\forall\,\epsilon>0 \quad \exists\, N_1(\epsilon)>0: \\ k>m>N_1(\epsilon) \rightsquigarrow \ell-\epsilon<\frac{a_k}{b_k}<\ell+\epsilon\end{array}\right\}$$

$$\rightsquigarrow (\ell-\epsilon)\, b_k < a_k < (\ell+\epsilon)\, b_k$$

$$\rightsquigarrow (\ell-\epsilon) \sum_{k=m+1}^{n} b_k < \sum_{k=m+1}^{n} a_k < (\ell+\epsilon) \sum_{k=m+1}^{n} b_k$$

$$\rightsquigarrow \sum_{k=1}^{m} a_k + (\ell-\epsilon) \sum_{k=m+1}^{n} b_k < \sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{k=1}^{m} a_k + (\ell+\epsilon) \sum_{k=m+1}^{n} b_k$$

$$\rightsquigarrow \left\{\sum_{k=1}^{m} a_k - (\ell-\epsilon) \sum_{k=1}^{m} b_k\right\} + (\ell-\epsilon) \sum_{k=1}^{n} b_k < \sum_{k=1}^{n} a_k <$$

$$< \left\{\sum_{k=1}^{m} a_k - (\ell+\epsilon) \sum_{k=1}^{m} b_k\right\} + (\ell+\epsilon) \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\rightsquigarrow \frac{\left\{\sum_{k=1}^{m} a_k - (\ell-\epsilon) \sum_{k=1}^{m} b_k\right\}}{\sum_{k=1}^{n} b_k} + (\ell-\epsilon) < \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} <$$

$$< \frac{\left\{\sum_{k=1}^{m} a_k - (\ell+\epsilon) \sum_{k=1}^{m} b_k\right\}}{\sum_{k=1}^{n} b_k} + (\ell+\epsilon)$$

Για ένα σταθερό $\epsilon>0$, διαλέγουμε ένα $m=[N_1(\epsilon)]+1>N_1(\epsilon)$, που είναι σταθερό (και εξαρτάται από το ϵ). Τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\{\sum\limits_{k=1}^{m} a_k - (\ell-\epsilon) \sum\limits_{k=1}^{m} b_k\right\}}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} + (\ell-\epsilon) \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \frac{\left\{\sum\limits_{k=1}^{m} a_k - (\ell+\epsilon) \sum\limits_{k=1}^{m} b_k\right\}}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} + (\ell+\epsilon)$$

Οι παραστάσεις μεταξύ $\left\{\cdots\right\}$ δεν εξαρτώνται από το n τότε επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = +\infty$ θά έχουμε ότι για το συγκεκριμένο ϵ

$$(\ell-\epsilon) \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \le (\ell+\epsilon)$$

Επομένως $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ ☐

Πρ:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{|x_n|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$$

☐ *Απόδ*:

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \leadsto \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N_1(\epsilon) > 0 \;: \\ m > N_1(\epsilon) \;\leadsto\; \ell - \epsilon < \dfrac{|x_{m+1}|}{|x_m|} < \ell + \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} &\leadsto\; (\ell - \epsilon)\,|x_m| < |x_{m+1}| < (\ell + \epsilon)\,|x_m| \\ &\leadsto\; (\ell - \epsilon)^k\,|x_m| < |x_{m+k}| < (\ell + \epsilon)^k\,|x_m| \\ &\leadsto\; (\ell - \epsilon)^{m+k}\,\tfrac{|x_m|}{(\ell-\epsilon)^m} < |x_{m+k}| < (\ell + \epsilon)^{m+k}\,\tfrac{|x_m|}{(\ell+\epsilon)^m} \end{aligned}$$

Για $n = m + k > m$ έχουμε

$$\begin{aligned} &\leadsto\; (\ell - \epsilon)^n\,\tfrac{|x_m|}{(\ell-\epsilon)^m} < |x_n| < (\ell + \epsilon)^n\,\tfrac{|x_m|}{(\ell+\epsilon)^m} \\ &\leadsto\; (\ell - \epsilon)\,\sqrt[n]{\tfrac{|x_m|}{(\ell-\epsilon)^m}} < \sqrt[n]{|x_n|} < (\ell + \epsilon)\,\sqrt[n]{\tfrac{|x_m|}{(\ell+\epsilon)^m}} \\ &\leadsto\; (\ell - \epsilon)\,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\tfrac{|x_m|}{(\ell-\epsilon)^m}} \le \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} \le (\ell + \epsilon)\,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\tfrac{|x_m|}{(\ell+\epsilon)^m}} \\ &\leadsto\; (\ell - \epsilon) \le \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} \le (\ell + \epsilon) \end{aligned}$$

Επομένως $\sqrt[n]{|x_n|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ ☐

ΑΠΟΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall\, R>0,\ \exists\, N(R)>0\ : \\ \\ n>N(R)\ \rightsquigarrow\ x_n>R \end{array}\right\}$$

Κάθε αύξουσα μη φραγμένη ακολουθία αποκλίνει

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \ \rightsquigarrow\ \frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ορισμός

$$\left\{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall\, R>0,\ \exists\, N(R)>0\ : \\ \\ n>N(R)\ \rightsquigarrow\ x_n<-R \end{array}\right\}$$

Κάθε φθίνουσα μη φραγμένη ακολουθία αποκλίνει

Συμπεράσματα

1. x_n συγκλίνει $\Leftrightarrow$ x_n είναι ακολουθία Cauchy
2. $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \Rightarrow \ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη $\Leftrightarrow$ $\exists C > 0 : \forall n \ \rightsquigarrow \ |x_n| < C$
3. $|a| < 1 \ \Rightarrow \ a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
4. (Συστολή) $x_n \neq 0, \ |\frac{x_{n+1}}{x_n}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} k < 1 \ \rightsquigarrow \ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
5. $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \Rightarrow$ Καθε υπακολουθία x_{n_k} συγκλίνει στο x
6. (Bolzano-Weierstrass): Κάθε (άνω και κάτω) φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία
7. x_n είναι αύξουσα και φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$
8. x_n είναι μονότονη ακολουθία και έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \Rightarrow$ η ακολουθία x_n συγκλίνει στο ίδιο όριο δηλ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$
9. $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\ell!}$$
10. (Stolz): $$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \\ b_k > 0 \quad \text{και} \quad \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$$
11. $$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \ \Rightarrow \ \sqrt[n]{|x_n|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$$

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΑΣ (1/4)

Ορισμός

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ "μερικό" άθροισμα,

Αν $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S$ τότε " συγκλίνει απλά η σειρά " $S \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Leftrightarrow$ η ακολουθία S_N είναι Cauchy

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0\ \exists\ N(\epsilon)\ :\ \forall\, n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon$$

Παράδειγμα: Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΑΣ (2/4)

Η σειρά συγκλίνει $\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; N(\epsilon) \; : \; \forall n > m > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon$$

Η σειρά ΔΕΝ συγκλίνει $\Leftrightarrow$

$$\exists \epsilon > 0 \; \forall \; N \; : \; \exists n > m > N \;\rightsquigarrow\; \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \geq \epsilon$$

Παράδειγμα: Η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ΔΕΝ συγκλίνει.

Πρόταση

συγκλίνει απλά η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Αν $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ τότε **ΔΕΝ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ ΠΑΝΤΑ** η σειρά $\sum\limits_{n} a_n$

πχ. $a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ αλλά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Ορισμός

"συγκλίνει απόλυτα η σειρά" $\Leftrightarrow$ συγκλίνει η σειρά των απόλυτων τιμών $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Πρόταση

Απόλυτη σύγκλιση σειράς $\Rightarrow$ Απλή σύγκλιση σειράς

Κριτήριο Σύγκρισης (Comparison test)

$|b_n| \leq a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει

Πρόταση

$0 \leq a_n \leq b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ αποκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ αποκλίνει

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΑΣ (4/4)

Η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} t^k$ συγκλίνει **μόνο** για $|t| < 1$ και τότε

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}}$$

Η απόδειξη στηρίζεται στο γεγονός ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$$

Κριτήρια Σύγκλισης Σειρών (1/3)

Κριτήριο των λόγων (Ratio test)

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1. συγκλίνει απόλυτα αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$
2. αποκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$
3. δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

Κριτήριο των ριζών (Root test)

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1. συγκλίνει απόλυτα αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$
2. αποκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$
3. δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Κριτήρια Σύγκλισης Σειρών (2/3)

Λόγος ακολουθιών

a_n και b_n θετικές ακολουθίες. Αν $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{υπάρχει} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{υπάρχει}$$

Μηδενικός Λόγος ακολουθιών

a_n και b_n θετικές ακολουθίες. Αν $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{υπάρχει} \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{υπάρχει}$$

Κριτήρια Σύγκλισης Σειρών (3/3)

Κριτήριο συμπύκνωσης (Condensation test)

Αν $0 < a_{n+1} < a_n$ φθίνουσα θετική ακολουθία τότε:

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ υπάρχει } \right\} \Leftrightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ υπάρχει } \right\}$$

Παραδείγματα:

$$p > 1 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$$

$$p > 1 \rightsquigarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln\ n)^p} < \infty$$

Κριτήριο σύγκλισης εναλλασσομένης σειράς (Alternating Series Test)

Αν $0 < a_{n+1} < a_n$ φθίνουσα θετική ακολουθία και $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ τότε:

$$\Rightarrow \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ υπάρχει } \right\}$$

Αναδιάταξη των Φυσικών αριθμών

$$(1, 2, \ldots, k, \ldots) \xrightarrow{\sigma} (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \ldots)$$

$$\forall\, \sigma_k \; \exists\, n_k \in \mathbb{N} \;:\; \max\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k\} < n_k$$

Αναδιάταξη ακολουθίας $b_m = a_{\sigma_m}$

Αν η σειρά $\sum\limits_n a_n$ συγκλίνει απόλυτα τότε κάθε αναδιάταξη της σειράς $\sum\limits_n b_n$ συγκλίνει απόλυτα στο ίδιο όριο.

ΔΙΠΛΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{14} & \cdots \\
 & \diagup & & \diagup & & \diagup & & \cdots \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & \cdots \\
 & \diagup & & \diagup & & \diagup & & \cdots \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & \cdots \\
 & \diagup & & \diagup & & \diagup & & \cdots \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & \cdots \\
 & \diagup & & \diagup & & \diagup & & \cdots
\end{array}
$$

Ορισμός

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} = \ell \ \text{ συγκλίνει απόλυτα } \ \Leftrightarrow$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \right) = \ell \ \text{ συγκλίνει απόλυτα}$$

Ορισμός

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ "μερικό" άθροισμα,

Αν $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S$ τότε "συγκλίνει απλά η σειρά" $S \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Leftrightarrow$ η ακολουθία S_N είναι Cauchy

$$\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \; \exists \, N(\epsilon) \; : \; \forall \, n > m > N(\epsilon) \; \rightsquigarrow \; |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon$$

Παράδειγμα: Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

Πρόταση

συγκλίνει απλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Απόδειξη.

συγκλίνει $\boxed{\text{απλά}}$ η σειρά $\Leftrightarrow$ η ακολουθία μερικών αθροισμάτων είναι Cauchy $\Rightarrow$

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists \, N(\epsilon) \; : \; \forall \, n > N(\epsilon) \; \rightsquigarrow \; |S_n - S_{n-1}| = |a_n| < \epsilon$$

Επομένως $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ □

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Αν $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ τότε **ΔΕΝ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ ΠΑΝΤΑ** η σειρά $\sum_{n} a_n$

πχ. $a_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Ορισμός

"συγκλίνει απόλυτα η σειρά" $\Leftrightarrow$ συγκλίνει η σειρά των απόλυτων τιμών $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Πρόταση

Απόλυτη σύγκλιση σειράς $\Rightarrow$ Απλή σύγκλιση σειράς

Απόδειξη.

$\{$συγκλίνει $\boxed{\text{απόλυτα}}$ η σειρά $\}\Leftrightarrow$

$$\left\{\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, N(\epsilon) \,:\, \forall\, n > m > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon\right\}$$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon \;\rightsquigarrow$$

$$\left\{\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists\, N(\epsilon) \,:\, \forall\, n > m > N(\epsilon) \;\rightsquigarrow\; \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \epsilon\right\}$$

$\square$

Κριτήριο Σύγκρισης (Comparison test)

$|b_n| \le a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει

Απόδειξη.

$$\begin{array}{c}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ \text{συγκλίνει}\end{array} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0, \quad \exists\, N(\epsilon) : \\ \forall n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} |b_k| \le \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \rightsquigarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0, \quad \exists\, N(\epsilon) : \\ \forall n > m > N(\epsilon) \rightsquigarrow \sum_{k=m+1}^{n} |b_k| < \epsilon \end{array} \right\} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ \text{συγκλίνει} \\ \text{απόλυτα}\end{array}$$

□

Πρόταση

$0 \le a_n \le b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ αποκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ αποκλίνει

Απόδειξη.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \rightsquigarrow \left\{ \forall R > 0,\ \exists N(R) > 0 :\ n > N(R) \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{n} a_k > R \right\}$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \ge \sum_{k=1}^{n} a_k > R \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$$

□

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΑΣ-αποδείξεις (4/7)

Κριτήριο των λόγων (Ratio test)

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(i) συγκλίνει απόλυτα αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

(ii) αποκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$

(iii) δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

☐ *Απόδ* (i) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathfrak{c} < 1$ για $\epsilon = \frac{1-\mathfrak{c}}{2}$, $\exists\, n_0$:

$$n > n_0 \rightsquigarrow |a_{n+1}| < (\mathfrak{c} + \frac{1-\mathfrak{c}}{2})\,|a_n|$$

$$\rightsquigarrow |a_n| < \left(\frac{\mathfrak{c}+1}{2}\right)^n \frac{|a_{n_0}|}{\left(\frac{\mathfrak{c}+1}{2}\right)^{n_0}}$$

Επειδή $\frac{\mathfrak{c}+1}{2} < 1 \rightsquigarrow$ (κριτήριο σύγκρισης) η σειρά $\sum_n |a_n|$ συγκλίνει απόλυτα.

☐ *Απόδ* (ii) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathfrak{f} > 1$ για $\epsilon = \frac{\mathfrak{f}-1}{2}$, $\exists\, n_0$:

$$n > n_0 \rightsquigarrow |a_{n+1}| > (\mathfrak{f} - \frac{\mathfrak{f}-1}{2})\,|a_n|$$

$$\rightsquigarrow |a_n| > \left(\frac{\mathfrak{f}+1}{2}\right)^n \frac{|a_{n_0}|}{\left(\frac{\mathfrak{f}+1}{2}\right)^{n_0}}$$

Επειδή $\frac{\mathfrak{f}+1}{2} > 1 \rightsquigarrow$ η ακολουθία a_n δεν είναι μηδενική $\rightsquigarrow$ δεν συγκλίνει η σειρά $\sum_n a_n$

Κριτήριο των ριζών (Root test)

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(i) συγκλίνει απόλυτα αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

(ii) αποκλίνει αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$

(iii) δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Κριτήριο συμπύκνωσης (Condensation test)

Αν $0 < a_{n+1} < a_n$ φθίνουσα θετική ακολουθία τότε:
$\left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \right\}$ υπάρχει $\Leftrightarrow \left\{ \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ υπάρχει} \right\}$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
S_{2^{k+1}-1} &= a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3)}_{2 \text{ όροι}} + \underbrace{(a_4 + a_5 + a_6 + a_7)}_{4 \text{ όροι}} + \\
&+ \underbrace{(a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15})}_{8 \text{ όροι}} \\
&+ \cdots + \\
&+ \underbrace{(a_{2^k} + a_{2^k+1} + a_{10} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}-1})}_{2^k \text{ όροι}} \leq \\
&\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^k a_{2^k} = T_k
\end{aligned}$$

η ακολουθία T_k συγκλίνει $\Rightarrow$ η υπακολουθία $S_{2^{k+1}-1}$ συγκλίνει και η ακολουθία S_n είναι αύξουσα $\rightsquigarrow$ η S_n συγκλίνει.

$$\begin{aligned}
&\frac{T_k}{2} = \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} \leq \\
&\leq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \\
&+ \cdots + \\
&+ (a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k}) = S_{2^k}
\end{aligned}$$

η ακολουθίαS_n συγκλίνει και είναι αύξουσα $\Rightarrow$ η υπακολουθία S_{2^k} συγκλίνει $\Rightarrow$ η ακολουθία T_k συγκλίνει. $\square$

πχ $\sum\limits_{n=2} \frac{1}{n \ln n}$ δεν συγκλίνει

$\sum\limits_{n=2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ συγκλίνει

$\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^r}$ συγκλίνει για $r > 1$,
δεν συγκλίνει για $r \leq 1$

Κριτήριο σύγκλισης εναλλασσομένης σειράς (Alternating Series Test)

Αν $0 < a_{n+1} < a_n$ φθίνουσα θετική ακολουθία και $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ τότε:

$\Rightarrow \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ υπάρχει} \right\}$

Απόδειξη.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$

$S_{m+2} - S_m = (-1)^{m+3} a_{m+2} - (-1)^{m+2} a_{m+1} = (-1)^{m+2}(a_{m+1} - a_{m+2}) \rightsquigarrow$

$|S_{m+2} - S_m| = a_{m+1} - a_{m+2} \geq 0$

$|S_{m+4} - S_{m+2}| = a_{m+3} - a_{m+4}$

$|S_{m+6} - S_{m+4}| = a_{m+5} - a_{m+6}$

$\ldots\ldots\ldots$

$|S_{m+2p} - S_{m+2(p-1)}| = a_{m+2p-1} - a_{m+2p}$

$|S_{m+2p} - S_m| \leq$

$\leq |S_{m+2p} - S_{m+2p-2}| + |S_{m+2p-2} - S_{m+2p-4}| + \cdots + |S_{m+2} - S_m|$

$|S_{m+2p} - S_m| \leq$

$\leq a_{m+2p-1} - a_{m+2p} + a_{m+2p-3} - a_{m+2p-2} + \cdots + a_{m+3} - a_{m+4} + a_{m+1} - a_{m+2}$

$|S_{m+2p} - S_m| \leq a_{m+1} - a_{m+2p} < a_{m+1}$

$|S_{m+2p+1} - S_m| \leq |S_{m+2p+1} - S_{m+2p}| + |S_{m+2p} - S_m| \leq a_{m+2p+1} + a_{m+1} - a_{m+2p} < a_{m+1}$

$n > m \rightsquigarrow |S_n - S_m| < a_{m+1}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \rightsquigarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N(\epsilon) \ : \ m > N(\epsilon) \rightsquigarrow a_{m+1} < a_m < \epsilon$$

$$\rightsquigarrow |S_n - S_m| < \epsilon \rightsquigarrow S_n \text{ Cauchy}$$

□

πχ $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει

$\sum_n \frac{(-1)^n}{\ln n}$ συγκλίνει

$\sum_n (-1)^n \sin \frac{\pi}{n}$ συγκλίνει

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΑΣ-αποδείξεις (7/7)

Σύγκλιση αναδιατεταγμένης σειράς

Αν η σειρά $\sum_n a_n$ συγκλίνει απόλυτα τότε κάθε αναδιάταξη της σειράς $\sum_n b_n$ συγκλίνει απόλυτα στο ίδιο όριο.

Απόδειξη.

Θεωρούμε την αναδιάταξη των Φυσικών αριθμών:

$$(1, 2, \dots, k, \dots) \xrightarrow{\sigma} (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots)$$

$$\forall \sigma_k \; \exists n_k \in \mathbb{N} \; : \; \max\{\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_k\} < n_k$$

Εστω τα μερικά αθροίσματα:

$$S_\ell = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_\ell|, \quad T_k = |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_k|$$

όπου $b_m = a_{\sigma_m}$ επομένως $T_k \leq S_{n_k}$. Η υπακολουθία S_{n_k} συγκλινει δηλαδή είναι μια ακολουθία Cauchy $\rightsquigarrow$ η ακολουθία T_k είναι μια ακολουθία Cauchy, δηλαδή συγκλίνει. Επειδή έχουν αύξουσες ακολουθίες που συγκλίνουν, τότε το όριο της υπακολουθίας είναι και το όριο της ακολουθίας. Αρα

$$T_k \leq S_{n_k} \rightsquigarrow \lim_{k\to\infty} T_k \leq \lim_{k\to\infty} S_{n_k} \rightsquigarrow \sum_n b_n \leq \sum_n a_n$$

Η ακολουθία a_n μια αναδιάταξη της ακολουθίας b_n, επομένως

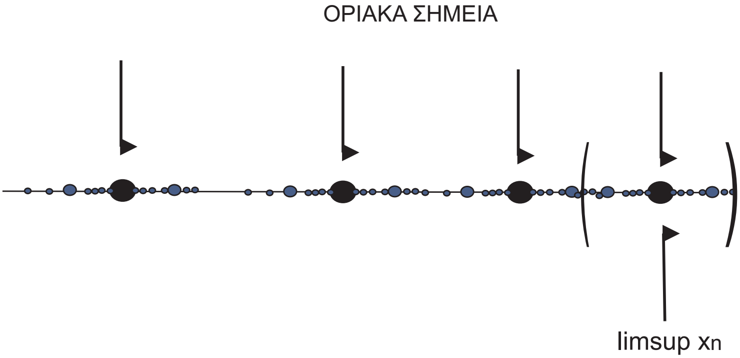
$$\sum_n a_n \leq \sum_n b_n$$

Αρα οι δύο σειρές συγκλίνουν στο ίδιο όριο. □ □

Οριακά Σημεία

$\mathfrak{X} =$ σύνολο των οριακών σημείων
της φραγμένης ακολουθίας x_n

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} x_n = \overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\, x_n = \sup \mathfrak{X} = \boxed{\text{μεγαλύτερο οριακό σημείο}}$$



Λήμμα

$\mathfrak{X} =$ σύνολο των οριακών σημείων της φραγμένης ακολουθίας x_n

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} x_n = \underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} x_n = \inf \mathfrak{X} = \boxed{\text{μικρότερο οριακό σημείο}}$$

$$\mathfrak{m} = \liminf_{n\in\mathbb{N}} x_n \rightsquigarrow \left\{\forall \epsilon > 0 \ \exists \quad \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \ : \ \mathfrak{m} + \epsilon > x_{n_k}\right\}$$

Λήμμα

Αν x_n τελικά μικρότερο (ή μεγαλύτερο) του c

$$\Downarrow$$

$$\limsup_{n} x_n \le c \text{ (ή } \liminf_{n} x_n \ge c\text{)}$$

Πρόταση 2

Πρόταση

$$\liminf \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq \liminf \sqrt[n]{|x_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|x_n|} \leq \limsup \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$$

$\square$ *Απόδ*: $\limsup_n \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \mathfrak{c} \rightsquigarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \;: n \geq n_0 \rightsquigarrow \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < \mathfrak{c} + \epsilon$$

$$\left|\frac{x_n}{x_{n_0}}\right| < \mathfrak{c}^{n-n_0} \;\;\rightsquigarrow\;\; \sqrt[n]{|x_n|} < (\mathfrak{c}+\epsilon)\sqrt[n]{\frac{|x_{n_0}|}{\mathfrak{c}^{n_0}}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{|x_{n_0}|}{\mathfrak{c}^{n_0}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \;\Rightarrow\; \exists\, n_1 \;:\; n > n_1 \;\rightsquigarrow\; \sqrt[n]{\frac{|x_{n_0}|}{\mathfrak{c}^{n_0}}} < 1 + \frac{\epsilon}{\mathfrak{c}}$$

$$\Rightarrow \;\; \text{τελικά} \;\; \sqrt[n]{|x_n|} < \mathfrak{c} + 2\epsilon + \frac{\epsilon^2}{\mathfrak{c}} \;\rightsquigarrow\; \limsup_n \sqrt[n]{|x_n|} \leq \mathfrak{c}$$

γιατί αν θέσουμε $\epsilon' = 2\epsilon + \frac{\epsilon^2}{\mathfrak{c}}$ και $N' = \max\{n_0, n_1\}$ έχουμε ότι

$$\forall\, \epsilon',\; \exists\, N' \;:\; n > N' \;\rightsquigarrow\; \sqrt[n]{|x_n|} < \mathfrak{c} + \epsilon'$$

δηλαδή πέραν του $\mathfrak{c} + \epsilon'$ βρίσκεται ένας πεπερασμένος αριθμός μελών της ακολουθίας $\square$

Πρόταση 3

Πρόταση

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \Rightarrow \sqrt[n]{|x_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

πχ $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

☐ *Απόδ*:

$$x_n = \frac{n!}{n^n} \rightsquigarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right) \Big/ \left(\frac{n!}{n^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\mathrm{e}} \rightsquigarrow$$

$$\sqrt[n]{x_n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\mathrm{e}}$$

☐

π.χ. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5 - 3n^3 + 8} = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n - 2^n} = 5$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- *Απειροστικός Λογισμός*-Τόμος Α′ Σ.Κ. Ντούγιας, LEADER BOOKS, 2003
- *Διαφορικός Ολοκληρωτικός Λογισμός*, M. Spivak , Παν. Εκδ. Κρήτης,
- *Απειροστικός Λογισμός*, THOMAS-FINLEY, Παν. Εκδ. Κρήτης
- Μαθήματα στο δίκτυο: Μαθήματα Μ. Παπαδημητράκη (Παν. Κρήτης) http://www.math.uoc.gr/~papadim/Apeirostikos1.pdf
- Μαθήματα στο δίκτυο: Μαθήματα Α. Γιαννόπολου (Παν. Αθηνών) http://users.uoa.gr/~apgiannop
- Διαφάνειες: http://users.auth.gr/~daskalo

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Δασκαλογιάννης Κωνσταντίνος. "Λογισμός Ι. Ενότητα 2: Ακολουθίες - Σειρές ". Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
http://eclass.auth.gr/courses/OCRS434/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης