ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός Ι

Ενότητα 3: Συνέχεια

Κ. Δασκαλογιάννης
Τμήμα Μαθηματικών

Α.Π.Θ.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο "Ανοικτά Ακαδημαικά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης " έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος "Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση" και συγχρηματοδοτείται απο την Ευρωπαική Ένωση (Ευρωπαικό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

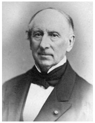
Περιεχόμενα Ενότητας

- Σύγκλιση Συνάρτησης
- Αρχή μεταφοράς
- Συνεχής συνάρτηση σε σημείο
- Συνεχής συνάρτηση σε σύνολο
- Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών
- Θεώρημα Bolzano
- Ομοιόμορφη συνέχεια
- Όρια στο άπειρο
- Ασύμπτωτες καμπύλης
- Συνέχεια μονότονων συναρτήσεων
- Εκθετική συνάρτηση

Σκοποί Ενότητας

Σε αυτή την ενότητα θα μελετησούμε τη συνέχεια των συναρτήσεων.

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: Ορισμός Cauchy



Augustin-Louis Cauchy 1789-1857

Ορισμός σύγκλισης Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Η συνάρτηση } f(x) \\ \text{συγκλίνει για } x \to \xi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \lim_{x \to \xi} f(x) = \ell \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon, \xi) \, : \, |x - \xi| < \delta \rightsquigarrow |f(x) - \ell| < \epsilon \right\}$$

ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

$$\lim_{x \to \xi^-} f(x) = \ell_- \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_L(\epsilon, \xi) \, : \, \xi - \delta_L < x \leq \xi \rightsquigarrow \\ |f(x) - \ell| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \to \xi^+} f(x) = \ell_+ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_R(\epsilon, \xi) \, : \, \xi \leq x < \xi + \delta_R \rightsquigarrow \\ |f(x) - \ell| < \epsilon \end{array} \right\}$$

Πρόταση

$$\left\{ \lim_{x \to \xi} f(x) = \ell \right\} \Leftrightarrow \left\{ \ell_+ = \ell_- = \ell \right\}$$

Παράδειγμα 1

Παραδείγμα Αν $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$ τότε $\lim_{x \to \xi} f(x) \ = f(\xi)$ για $\xi > 0$

Πρόχειρο

$$|\sqrt{x} - \sqrt{\xi}| = \frac{|x - \xi|}{\sqrt{x} + \sqrt{\xi}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{\xi}} \equiv \epsilon \rightsquigarrow \boxed{\delta(\epsilon, \xi) = \epsilon\sqrt{\xi}}$$

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta(\epsilon, \xi) = \epsilon\sqrt{\xi} \ :\ |x - \xi| < \delta(\epsilon, \xi) \rightsquigarrow |\sqrt{x} - \sqrt{\xi}| < \epsilon$$

Παραδείγμα Αν $f(x) = x^5$ **τότε** $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$

$$(x^5 - \xi^5) = (x - \xi)\left(x^5 + x^4\xi + x^3\xi^2 + x^2\xi^3 + x\xi^4 + \xi^5\right)$$

$$\left|x^5 - \xi^5\right| \leq |x - \xi| \cdot \left(|x|^5 + |x|^4|\xi| + |x|^3|\xi|^2 + |x|^2|\xi|^3 + |x||\xi|^4 + |\xi|^5\right)$$

$$\boxed{|x - \xi| < \delta} \rightsquigarrow |x| < |\xi| + \delta \rightsquigarrow$$

$$\left(|x|^5 + |x|^4|\xi| + |x|^3|\xi|^2 + |x|^2|\xi|^3 + |x||\xi|^4 + |\xi|^5\right) <$$

$$< \frac{(|\xi| + \delta)^5 - |\xi|^5}{(|\xi| + \delta) - |\xi|} = \frac{(|\xi| + \delta)^5 - |\xi|^5}{\delta} \rightsquigarrow$$

$$\left|x^5 - \xi^5\right| \leq |x - \xi| \cdot \frac{(|\xi| + \delta)^5 - |\xi|^5}{\delta} \rightsquigarrow$$

$$\left|x^5 - \xi^5\right| < (|\xi| + \delta)^5 - |\xi|^5 = \epsilon \rightsquigarrow$$

$$\delta(\epsilon, \xi) = \sqrt[5]{\epsilon + |\xi|^5} - |\xi|$$

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta(\epsilon, \xi) = \sqrt[5]{\epsilon + |\xi|^5} - |\xi| \ :\ |x - \xi| < \delta(\epsilon, \xi) \rightsquigarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{\xi}\right| < \epsilon$$

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ: Ορισμός Heine

Heinrich Eduard Heine 1821-81

Ορισμός σύγκλισης Heine

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Η συνάρτηση } f(x) \\ \text{συγκλίνει} \\ \text{για } x \to \xi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \exists \lim_{x \to \xi} f(x) \right\}$$

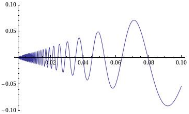
$$\Leftrightarrow \left\{ \forall\, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \rightsquigarrow f(x_n) \ \text{συγκλίνει} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Η συνάρτηση } f(x) \\ \text{ΔΕΝ συγκλίνει} \\ \text{για } x \to \xi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Αν } \exists\, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \\ \text{τότε } f(x_n) \ \text{ΔΕΝ συγκλίνει} \end{array} \right\}$$

Παράδειγμα 3

πχ. Η $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ συγκλίνει για $x \to 0$.

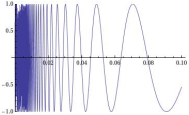
$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \rightsquigarrow f(x_n) = \underbrace{x_n}_{\text{μηδενική}} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)}_{\text{φραγμένη}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$



πχ. Η $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ **ΔΕΝ** συγκλίνει για $x \to 0$.

$$\exists\, x_n = \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \rightsquigarrow f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi = (-1)^n$$

$f(x_n)$ δεν συγκλίνει $\rightsquigarrow$ $f(x)$ δεν συγκλίνει για $x \to 0$



Μοναδικότητα ορίου

Ορισμός σύγκλισης Heine

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Η συνάρτηση } f(x) \\ \text{συγκλίνει} \\ \text{για } x \to \xi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \{\exists \lim_{x\to\xi} f(x)\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \\ \rightsquigarrow f(x_n) \text{ συγκλίνει} \end{array} \right\}$$

Μοναδικότητα ορίου

Το όριο μιας συνάρτησης είναι μοναδικό

Απόδειξη.

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \rightsquigarrow f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_1$$

$$y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \rightsquigarrow f(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_2$$

$$z_n \leftrightarrow (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k, \ldots)$$

$$z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \rightsquigarrow f(z_n) \text{ συγκλίνει}$$

Οι δύο υπακολουθίες $f(z_{2k-1}) = f(x_k)$ και $f(z_{2k}) = f(y_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ έχουν το ίδιο όριο $\rightsquigarrow \ell_1 = \ell_2$ □

Ισοδυναμία ορισμών Heine ⇔ Cauchy (Αρχή μεταφοράς)

$$\left\{\ \text{Η συνάρτηση } f(x) \text{ συγκλίνει για } x \to \xi\ \right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$$

Ορισμός Heine	Ορισμός Cauchy
	
γιά κάθε $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$ $\Downarrow$ $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$	$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon, \xi)$: $\lvert x - \xi \rvert < \delta(\epsilon, \xi)$ $\rightsquigarrow \lvert f(x) - \ell \rvert < \epsilon$

Ακολουθίες	Συναρτήσεις
$\lim\limits_{n\to\infty} \lvert a_n \rvert = \lvert \lim\limits_{n\to\infty} a \rvert$	$\lim\limits_{x\to\xi} \lvert f(x) \rvert = \lvert \lim\limits_{x\to\xi} f(x) \rvert$
$\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda\, a_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{x\to\xi} (\lambda\, f(x)) = \lambda \lim\limits_{x\to\xi} (f(x))$
$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{x\to\xi} (f(x) + g(x)) = = \lim\limits_{x\to\xi} f(x) + \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$
$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{x\to\xi} (f(x) \cdot g(x)) = = \lim\limits_{x\to\xi} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$
$0 \leq a_n \Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$0 \leq f(x) \Rightarrow 0 \leq \lim\limits_{x\to\xi} f(x)$
$a_n \leq b_n \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$f(x) \leq g(x) \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) \leq \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$
$a_n \leq b_n \leq c_n$ και $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$	$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ και $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \ell$ $\lim\limits_{x\to\xi} h(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to\xi} g(x) = \ell$
$\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0,$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$	$\lim\limits_{x\to\xi} g(x) \neq 0,$ $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\xi} f(x)}{\lim\limits_{x\to\xi} g(x)}$

Απόδειξη

$$\boxed{\boxed{\text{Cauchy} \Rightarrow \mathfrak{Heine}}}$$

$$\text{Cauchy} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta\,(\epsilon, \xi)\ : \\ |x - \xi| < \delta\,(\epsilon, \xi)\,; \rightsquigarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \exists\, N\,(\widetilde{\epsilon})\ : \\ n > N\,(\widetilde{\epsilon}) \rightsquigarrow |x_n - \xi| < \widetilde{\epsilon} \end{array} \right\}$$

Αν $\widetilde{\epsilon} = \delta\,(\epsilon, \xi)$ Cauchy $\rightsquigarrow$

$$|x_n - \xi| < \delta(\epsilon, \xi) \rightsquigarrow |f(x_n) - \ell| < \epsilon$$

Αρα

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N'(\epsilon) = N\,(\delta\,(\epsilon, \xi))\ : \\ n > N'(\epsilon) \rightsquigarrow |f(x_n) - \ell| < \epsilon \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$$

$$\boxed{\boxed{\mathfrak{Heine} \Rightarrow \text{Cauchy}}}$$

$\boxed{\textbf{Υπόθεση}}$ Cauchy $\boxed{\textbf{μη}}$ **αληθινή**

$$\exists\, \epsilon, \quad \forall\, \delta\ \exists x : \left\{ \begin{array}{c} \xi - \delta < x < \xi + \delta \rightsquigarrow \\ |f(x) - \ell| \geq \epsilon \end{array} \right\}$$

Επομένως μπορούμε να διαλέξουμε μια ακολουθία

$$\xi - \frac{1}{n} < x_n < \xi + \frac{1}{n} \rightsquigarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$$

"ΟΧΙ" Cauchy $\rightsquigarrow |f(x_n) - \ell)| \geq \epsilon$ **άρα η ακολουθία** $f(x_n)$ **δεν συγκλίνει στο** ℓ, **πράγμα** $\boxed{\textbf{άτοπο}}$, **για τί από υπόθεση η ακολουθία** $f(x_n)$ **συγκλίνει.**

ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ σε ένα σημείο

Ορισμός:ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ σε ένα σημείο

$$\left\{ f(x) \ \text{ συνεχής στο } \ \xi \right\} \Leftrightarrow \left\{ \lim_{x\to\xi} f(x) \ = f(\xi) \right\}$$

$$\mathfrak{Heine} : \forall\, x_n \ \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ \xi \ \Rightarrow \ f(x_n) \ \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ f(\xi)$$

$$\text{Cauchy} : \forall\, \epsilon > 0 \ \exists\, \delta \ : \ |x-\xi| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(\xi)| < \epsilon$$

Πλευρικά Ορια

$$\lim_{x\to\xi^-} f(x) \ \equiv f(\xi^-) \qquad\qquad \lim_{x\to\xi^+} f(x) \ \equiv f(\xi^+)$$

Πρόταση

$$\left\{ f(x) \ \text{ συνεχής στο } \ \xi \right\} \Leftrightarrow \ \left\{ f(\xi^-) = f(\xi^+) \right\}$$

ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΕ ΕΝΑ ΣΥΝΟΛΟ

Ορισμός

$$\Big\{ f(x) \ \text{συνεχής στο σύνολο } \mathbb{A} \Big\} \Leftrightarrow \Big\{ \lim_{\substack{x \to \xi \\ x, \xi \in \mathbb{A}}} f(x) = f(\xi) \Big\}$$

$$\Big\{ f(x) \ \text{συνεχής στο κλειστό διάστημα } \mathbb{I} = [a,\, b] \Big\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \xi \in (a,\, b) \ \rightsquigarrow & \displaystyle\lim_{\mathbb{I} \ni x \to \xi} f(x) & = f(\xi) \\ \xi = a \ \rightsquigarrow & \displaystyle\lim_{x \to a^+} f(x) & = f(a) \\ \xi = b \ \rightsquigarrow & \displaystyle\lim_{x \to b^-} f(x) & = f(b) \end{array} \right\}$$

Φραγμένη συνάρτηση

Ορισμός

$f(x)$ φραγμένη $\Leftrightarrow m < f(x) < M$

Πρόταση

$$\left\{ f(x) \text{ συνεχής στο ανοικτό } A \text{ και } \xi \in A \right\} \Rightarrow \left\{ f(x) \text{ φραγμένη γύρω από το } \xi \right\}$$

Πρόταση 1

Πρόταση

$$\left\{ f(x) \text{ συνεχής στο ανοικτό } A \text{ και } \xi \in A \right\} \Rightarrow$$
$$\left\{ f(x) \text{ φραγμένη γύρω από το } \xi \right\}$$

Απόδειξη.

Περίπτωση 1: $f(\xi) = 0$

$$\left\{ f(x) \text{ συνεχής στο } \xi \right\} \Rightarrow$$

$$\epsilon = M \, \exists \delta \ : \ |x - \xi| < \delta \ \rightsquigarrow \ |f(x)| < M$$

Περίπτωση 2: $f(\xi) \neq 0$

$$\left\{ f(x) \text{ συνεχής στο } \xi \right\} \Rightarrow$$

$$\epsilon = \frac{|f(\xi)|}{2} \, \exists \delta \ : \ |x - \xi| \ \rightsquigarrow \ |f(x) - f(\xi)| < \frac{|f(\xi)|}{2}$$

$$\Big| |f(x)| - |f(\xi)| \Big| \leq |f(x) - f(\xi)| < \frac{|f(\xi)|}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|f(\xi)|}{2} \leq |f(x)| \leq \frac{3\,|f(\xi)|}{2}$$

$\square$

Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

Αν

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & y \arrow[d, "g"] \\ & z \end{tikzcd}$$

$$[a,\, b] \ni x \xrightarrow{f} f(x) = y \in [m,\, M]$$
$$[m,\, M] \ni y \xrightarrow{g} g(y) = z \in [n,\, N]$$

Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(y)$ είναι συνεχείς $\rightsquigarrow$ η σύνθεση των συναρτήσεων $h(x) = (g \circ f)(x) = g\left(f\left(x\right)\right)$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων (Απόδειξη)

Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων (Απόδειξη)

Αν

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & y \arrow[d, "g"] \\
& z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l}
[a,\, b] \ni x \xrightarrow{f} f(x) = y \in [m,\, M] \\
[m,\, M] \ni y \xrightarrow{g} g(y) = z \in [n,\, N]
\end{array}
$$

Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(y)$ είναι συνεχείς $\rightsquigarrow$ η σύνθεση των συναρτήσεων $h(x) = (g \circ f)(x) = g\left(f\left(x\right)\right)$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη.

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \underset{\textbf{συνεχής}}{\overset{f}{\Longrightarrow}} y_n = f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\xi) = \eta$$

$$y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta \underset{\textbf{συνεχής}}{\overset{g}{\Longrightarrow}} z_n = g(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(\eta) = \theta$$

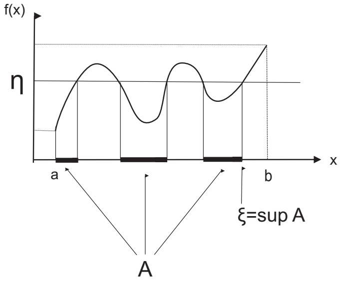
Αν $h = g \circ f$ν δηλ. $h(x) = g\left(f\left(x\right)\right)$

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \underset{\textbf{συνεχής}}{\overset{h}{\Longrightarrow}} z_n = h(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h(\xi) = \theta$$

□

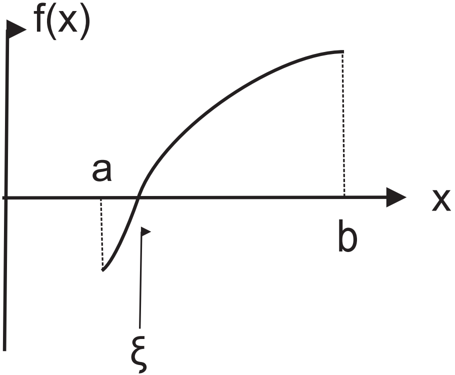
Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \ \ \textbf{συνεχής στο} \ \ [a,\, b] \\ f(a) \neq f(b) \ \big(\ \textbf{πχ} \ \ f(a) < f(b)\big) \\ \forall\, \eta,\ f(a) < \eta < f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \Big\{\exists\, \xi \in [a,\, b] \ \rightsquigarrow \ f(\xi) = \eta\Big\}$$



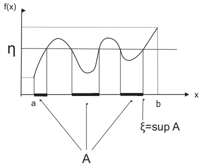
Θεώρημα Bolzano

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) \ \ \textbf{συνεχής στο} \ \ [a,\, b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \exists\, \xi \in (a,\, b) \ \rightsquigarrow \ f(\xi) = 0 \right\}$$



Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

$$\left\{\begin{array}{c} f(x)\ \text{συνεχής στο}\ \ [a,\,b] \\ f(a)\neq f(b)\ \big(\text{πχ}\ \ f(a)<f(b)\big) \\ \forall\,\eta,\ f(a)<\eta<f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \Big\{\exists\,\xi\in[a,\,b]\ \rightsquigarrow\ f(\xi)=\eta\Big\}$$



Απόδειξη.

$\mathbb{A}=\{x\in[a,\,b]\ :\ f(x)\leq\eta\}\subset[a,\,b]\rightsquigarrow\ \exists\,\xi=\sup\,\mathbb{A}\ \rightsquigarrow$

$$\forall\,n\in\mathbb{N}\quad\exists\,x_n\in\mathbb{A}\ :\ \xi-\frac{1}{n}<x_n\leq\xi\ \rightsquigarrow\ \lim_{n\to\infty}\,x_{\,n}=\xi$$

$$f(x)\ \text{συνεχής}\ \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}f(x_n)\ =\ \lim_{x\to\xi^-}f(x)\ =f(\xi)\leq\eta$$

$\xi<b$ διότι $f(\xi)\leq\eta<f(b)$

$$x\geq\xi\ \rightsquigarrow\ f(x)\geq\eta\ \rightsquigarrow\ \lim_{x\to\xi^+}f(x)\ =f(\xi)\geq\eta$$

Αρα $f(\xi)=\eta$ □

Ομοιόμορφη συνέχεια (1/2)

Ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση σε ένα σύνολο A

$$\{\text{ Ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο σύνολο } A\} \Leftrightarrow$$
$$\{\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta(\epsilon) > 0\, \forall\, x,\, y \in A \,:\, |x - y| < \delta(\epsilon) \rightsquigarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon\}$$

πχ. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ για $x \in (-\infty, \infty)$

Συμπέρασμα

$$\{\text{ Ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο σύνολο } A\} \Rightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \forall\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ είναι ακολουθία Cauchy} \\ \rightsquigarrow \{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ είναι ακολουθία Cauchy} \end{array} \right\}$$

ΜΗ Ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση σε ένα σύνολο A

$$\{\text{ΜΗ Ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο σύνολο } A\} \Leftrightarrow$$
$$\{\exists\, \epsilon > 0\, \forall\, \delta > 0\, \exists\, x,\, y \in A \,:\, |x - y| < \delta \rightsquigarrow |f(x) - f(y)| \geq \epsilon\} \Leftrightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \exists \text{ συγκλίνουσα (δηλ. Cauchy) ακολουθία } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ \rightsquigarrow \{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ΜΗ συγκλίνουσα (δηλ. ΟΧΙ Cauchy) ακολουθία} \end{array} \right\}$$

πχ. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ για $x \in (0, 1]$

$$\left\{ f(x) \text{ ομοιόμορφα συνεχής στο } \mathbb{I} \right\} \Leftrightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \forall \epsilon > 0, \\ \exists \delta(\epsilon) > 0 \ : \ \forall x, \xi \in \mathbb{I}, \ |x - \xi| < \delta(\epsilon, \xi) \rightsquigarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$$\left\{ f(x) \ \boxed{\text{ΜΗ}} \text{ ομοιόμορφα συνεχής} \right\} \Leftrightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \exists \epsilon > 0, \ \forall \delta > 0 \ : \\ \exists x, \xi \in \mathbb{I}, \ |x - \xi| < \delta \ \rightsquigarrow |f(x) - f(\xi)| \geq \epsilon \end{array} \right\}$$

Πρόταση

$$\left\{ f(x) \text{ συνεχής στο } [a,\, b] \right\} \Rightarrow$$
$$\left\{ f(x) \text{ ομοιόμορφα συνεχής στο } [a,\, b] \right\}$$

Πρόταση 2

Πρόταση

$$\left\{ f(x) \text{ συνεχής στο } [a,\, b] \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ f(x) \text{ ομοιόμορφα συνεχής στο } [a,\, b] \right\}$$

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι η $f(x)$ ΔΕΝ είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά είναι ΜΟΝΟ απλά συνεχής στο $[a,\, b]$.
όχι ομοιόμορφα συνεχής $\Rightarrow$

$$\exists\, \epsilon_0 \; : \; \forall\, \delta_0 \; \exists\, x_0,\, y_0 \; : \; |x_0 - y_0| < \delta_0 \; \Rightarrow \; |f(x_0) - f(y_0)| \geq \epsilon_0$$

$f(x)$ συνεχής $\Rightarrow$

$$\forall\, \epsilon > 0 \; \exists \delta(\epsilon, y_0) \; : \; \forall\, x,\; |x - y_0| < \delta(\epsilon, y_0) \; \Rightarrow \; |f(x) - f(y_0)| < \epsilon$$

Διαλέγουμε $\epsilon = \epsilon_0/2$ και $\delta_0 = \delta(\epsilon_0/2, y_0)$ οπότε θα πρέπει
$|f(x_0) - f(y_0)| < \epsilon_0/2$ οπότε έχουμε άτοπο $\square$

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ορισμός συνέχειας Cauchy σε ένα υποσύνολο $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$
πχ $\mathbb{I} = [a,\, b]$ ή $[a,\, \infty)$ ή $(-\infty,\, b]$ κλπ

$$\left\{ \lim_{x \to \xi} f(x) \;= f(\xi) \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall\, x, \xi \in \mathbb{I},\; \forall\, \epsilon > 0\; \exists\; \delta\,(\epsilon, \xi) > 0 \;\; : \\ |x - \xi| < \delta\,(\epsilon, \xi) \rightsquigarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon \end{array} \right\}$$

$\forall\, \epsilon > 0 \;\rightsquigarrow\; \inf_{\xi \in \mathbb{I}} \delta(\epsilon, \xi) > 0$ $\Rightarrow$ Ομοιόμορφη συνέχεια

πχ $f(x) = \sqrt{x},\; x > 1,\; f(x) = \mathrm{e}^x,\; x \in [0, 1],\; f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1},\; x \in \mathbb{R}$

Συνάρτηση Lipschitz

Ορισμός

$f(x)$ συνάρτηση Lipschitz $\Leftrightarrow$ $\boxed{|f(x) - f(y)| < K\,|x - y|}$

Πρόταση

$f(x)$ συνάρτηση Lipschitz σε ένα διάστημα $\rightsquigarrow$ $f(x)$ ομοιόμορφα συνεχής

πχ Η $f(x) = \mathrm{e}^x$ είναι Lipschitz σε ένα διάστημα $[a, b]$ $\rightsquigarrow$ $f(x)$ συνεχής

Η $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ είναι Lipschitz στο $\mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $f(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λήμμα

Λήμμα

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) \ \text{συνεχής στο ανοικτό} \\ \text{διάστημα} \quad (a,\, b) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{και} \ \left\{ \begin{array}{c} \text{για} \ \ \xi \in (a,\, b) \\ f(\xi) > 0 \end{array} \right\}$$

$$\{\exists\, \delta > 0 \ : \ a < \xi - \delta < x < \xi + \delta < b \ \rightsquigarrow \ f(x) > 0\}$$

Απόδειξη.

$\square$ *Απόδ*: Για $\epsilon = \dfrac{f(\xi)}{2} \ \exists\, \delta > 0 \ :$

$$a < \xi - \delta < x < x + \delta < b \ \rightsquigarrow \ 0 < \frac{f(\xi)}{2} < f(x) < \frac{3f(\xi)}{2}$$

$\square$

ΟΡΙΑ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

Cauchy : $\forall\, R > 0, \quad \exists\, \delta \;:\; |x-\xi| < \delta \rightsquigarrow f(x) > R$

$\mathfrak{Heine}$: $\forall\, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \rightsquigarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

Cauchy : $\forall\, R > 0\,, \quad \exists\, \delta \;:\; |x-\xi| < \delta \rightsquigarrow f(x) < -R$

$\mathfrak{Heine}$: $\forall\, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \rightsquigarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow$$

Cauchy : $\forall\, \epsilon > 0\,, \quad \exists\, r \;:\; x > r \rightsquigarrow |f(x)-\ell| < \epsilon$

$\mathfrak{Heine}$: $\forall\, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \rightsquigarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow$$

Cauchy : $\forall\, \epsilon > 0\,, \quad \exists\, r \;:\; x < r \rightsquigarrow |f(x)-\ell| < \epsilon$

$\mathfrak{Heine}$: $\forall\, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty \rightsquigarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

Πλάγια ασύμπτωτη:

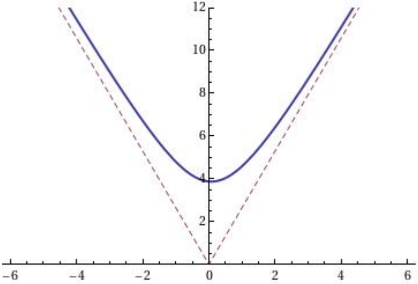
$$\exists\, \boxed{\alpha \neq 0} \text{ και } \beta : \lim_{x\to\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$$

ή

$$\exists\, \boxed{\alpha \neq 0} \text{ και } \beta : \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$$

$$\boxed{\alpha = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \boxed{\beta = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - \alpha x)}$$

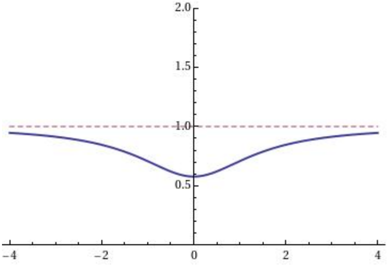
πχ $f(x) = \sqrt{7\,x^2 - x + 15}$



Οριζόντια ασύμπτωτη:

$$\exists\ \beta_+ \ \text{ή/και}\ \ \beta_+ \ : \ \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - \beta_\pm\right) = 0$$

πχ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$



Θεώρημα Bolzano - Weierstrass

$$\left\{\mathbb{A} \text{ φραγμένο σύνολο}\right\} \Leftrightarrow \left\{\exists\, m,\ M\ :\ x \in \mathbb{A} \rightsquigarrow m \leq x \leq M\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\exists\, K\ :\ \forall\, x \in \mathbb{A} \rightsquigarrow |x| \leq K\right\}$$

$$\left\{\mathbb{A} \text{ ΜΗ φραγμένο σύνολο}\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\, K\ :\ \exists\, x \in \mathbb{A} \rightsquigarrow |x| > K\right\}$$

Θεώρημα Bolzano - Weierstrass

$$\left\{\mathbb{A} \text{ φραγμένο απειροσύνολο}\right\} \overset{\text{Bolzano}}{\Longrightarrow} \forall\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{A} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} \exists \text{ συγκλίνουσα} \\ \text{υπακολουθία } \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \end{array}\right\}$$

Μη φραγμένα σύνολα

$$\left\{\exists\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{A} \text{ μονότονη ΜΗ συγκλίνουσα}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\mathbb{A}\ \underline{\text{ΜΗ}} \text{ φραγμένο σύνολο}\right\}$$

Συνεχής εικόνα κλειστού διαστήματος

Πρόταση

$$\{f(x) \ \text{συνεχής στο κλειστό διάστημα} \ \mathbb{I} = [a,\, b]\} \ \Rightarrow$$
$$\Big\{f(\mathbb{I}) \ \text{φραγμένο σύνολο}\Big\} \Rightarrow \Big\{\exists\, m \leq M \ : \ x \in \mathbb{I} \ \rightsquigarrow \ m \leq f(x) \leq M\Big\}$$

Πρόταση

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) \ \text{συνεχής στο κλειστό} \\ \text{διάστημα} \ \mathbb{I} = [a,\, b] \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \exists\, \xi \in [a,\, b] \ : \ f(\xi) = \min\, f\,([a,\, b]) = m \\ \exists\, \eta \in [a,\, b] \ : \ f(\eta) = \max\, f\,([a,\, b]) = M \end{array} \right\}$$

Συμπέρασμα

Αν $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση τότε η εικόνα ενός κλειστού διαστήματος είναι ένα κλειστό διάστημα

$$[a,\, b] \xrightarrow[\text{επί}]{f} [m,\, M]$$

Αποδείξεις (1/2)

Πρόταση

$$\{f(x) \text{ συνεχής στο κλειστό διάστημα } \mathbb{I} = [a,\, b]\} \Rightarrow$$
$$\left\{ f(\mathbb{I}) \text{ φραγμένο σύνολο} \right\} \Rightarrow \left\{ \exists\, m \leq M \;:\; x \in \mathbb{I} \rightsquigarrow m \leq f(x) \leq M \right\}$$

Απόδειξη.

<u>Εστω</u> $\left\{ f(\mathbb{I}) \text{ ΜΗ φραγμένο σύνολο} \right\} \Rightarrow \exists\, y_n \in f(\mathbb{I})$ <u>μονότονη</u> ΜΗ φραγμένη και $y_n = f(x_n)$, $x_n \in \mathbb{A}$, η y_n δεν συγκλίνει

$$\left\{ \mathbb{I} \text{ φραγμένο σύνολο} \right\} \overset{\text{Bolzano}}{\Longrightarrow} \forall\, x_n \in \mathbb{I} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{c} \exists \text{ συγκλίνουσα} \\ \text{υπακολουθία } x_{n_k} \end{array} \right\}$$
$$\text{Επειδή } \mathbb{I} = [a,\, b] \text{ φραγμένο σύνολο} \rightsquigarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \in \mathbb{I}$$
$$\overset{f \text{ συνεχής}}{\Longrightarrow} \boxed{\exists \lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)}$$

Αρα η υπακολουθία $y_{n_k} = f\left(x_{n_k}\right)$ μιας μονότονης ακολουθίας συγκλίνει $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} y_n$ πράγμα άτοπο, δηλαδή $f(\mathbb{I})$ είναι φραγμένο σύνολο.

$$m = \inf f\left([a,\, b]\right), \quad M = \sup f\left([a,\, b]\right)$$

□

Αποδείξεις (2/2)

Πρόταση

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) \ \text{συνεχής στο κλειστό} \\ \text{διάστημα} \ \ \mathbb{I} = [a,\, b] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} \exists\, \xi \in [a,\, b] \ : \ f(\xi) = \min\, f\left([a,\, b]\right) \\ \exists\, \eta \in [a,\, b] \ : \ f(\eta) = \max\, f\left([a,\, b]\right) \end{array}\right\}$$

Απόδειξη.

Εστω $M = \sup\, f\left([a,\, b]\right)$, τότε

$$\forall\, x \in [a,\, b] \ \rightsquigarrow \ f(x) \leq M \ \Rightarrow$$

$$\rightsquigarrow \{\exists\, x_n \in [a, b] \ : \ M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M\} \ \rightsquigarrow \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$$

$$\text{Weierstrass} \ \rightsquigarrow \ \exists\, x_{n_k} \ : \ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$$

συνέχεια $\rightsquigarrow \ \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$

κάθε υπακολουθία $f(x_{n_k})$ της συγκλίνουσας ακολουθίας $f(x_n)$ έχει το ίδιο όριο, δηλαδή $\rightsquigarrow f(\xi) = M$. Αρα $M = \max f(\mathbb{I})$ $\square$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΜΟΝΟΤΟΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (1/2)

Πρόταση

$$\left\{\ f(x)\ \text{ συνεχής στο }\ [a,\, b]\ \boxed{\text{ΚΑΙ}}\ f(x)\ \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα }\right\}$$
$$\Rightarrow \left\{\ \exists\, f^{-1}\ \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα }\ \text{ και συνεχής }\right\}$$

Πρόταση

$$\left\{\ f(x)\ \text{ συνεχής στο }\ [a,\, b]\ \boxed{\text{ΚΑΙ}}\ f(x)\ \text{ αμφιμονότιμη δηλ. } \exists\, f^{-1}\ \right\}$$
$$\Rightarrow \left\{ f(x)\ \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα } \right\}$$

Πρόταση

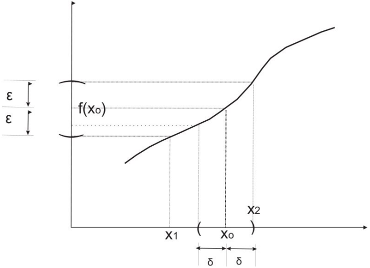
$$\left\{\ f(x)\ \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα }\ \boxed{\text{ΚΑΙ}}\ \exists\, f^{-1}\ \right\}$$
$$\Rightarrow \left\{ f(x)\ \text{ συνεχής στο }\ [a,\, b] \right\}$$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΜΟΝΟΤΟΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (2/2)

Πρόταση

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) \ \text{γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \\ f(x) \ \text{αμφιμονότιμη δηλ.} \ \exists\, f^{-1} \\ \text{και} \quad [a,\, b] \xrightarrow[\text{επί}]{f} [m,\, M] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ f(x) \ \text{συνεχής στο} \ [a,\, b] \right\}$$



Συνέχεια Μονότονων Συναρτήσεων-Αποδείξεις (1/3)

Πρόταση

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) \text{ συνεχής στο } [a,\, b] \\ f(x) \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \exists\, f^{-1} \\ \text{γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \\ \text{και συνεχής} \end{array}\right\}$$

Απόδειξη.

(Απόδειξη με $\mathfrak{Heine}$)

Βήμα i: $f(x)$ γνήσια αύξουσα στο $[a,\, b] \Rightarrow$

$$a \leq x < x' \leq b \rightsquigarrow$$
$$m = f(a) \leq f(x) < f(x') < f(b) = M$$

αν $f(a) < y < f(b)$ Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών $\rightsquigarrow \exists x \in [a,\, b]$ $y = f(x)$

$\rightsquigarrow$ το x ορίζεται μονοσήμαντα από το $y \Rightarrow \boxed{\exists\, f^{-1}}$ και είναι αύξουσα

Βήμα ii: Εστω ότι $y_n \in f([a,\, b])$ είναι μια αύξουσα ακολουθία και $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta$ τότε $x_n = f^{-1}(y_n)$ είναι αύξουσα ακολουθία και φραγμένη ($x_n \in [a,\, b]$) οπότε $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$. Επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής θα έχουμε $f(\xi) = \eta$ και επειδή υπάρχει η f^{-1} τότε $\xi = f^{-1}(\eta)$. Δηλαδή $f^{-1}(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f^{-1}(\eta)$. Οπότε $\lim\limits_{y\to\eta-} f^{-1}(y) = f^{-1}(\eta)$.

Βήμα iii: Με τον ίδιο τρόπο, διαλέγουμε μια φθίνουσα ακολουθία $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta$ και βρίσκουμε ότι $f^{-1}(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f^{-1}(\eta)$. Οπότε $\lim\limits_{y\to\eta+} f^{-1}(y) = f^{-1}(\eta)$.

$\Rightarrow$ $\boxed{f^{-1} \text{ είναι συνεχής}}$ □

Συνέχεια Μονότονων Συναρτήσεων-Αποδείξεις (2/3)

Πρόταση

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) \text{ συνεχής στο } [a,\, b] \\ f(x) \text{ αμφιμονότιμη δηλ. } \exists\, f^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\left\{ f(x) \text{ γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \right\}$$

Απόδειξη.

Εστω $f(a) < f(b)$ και $a < x_1 < x_2 < b$

Περ. (i) $f(x_1)\big($ ή $f(x_2)\big) < f(a) < f(b)$
Θεώρημα ενδιαμέσου σημείου $\rightsquigarrow$
$\exists\, x_0 \in [x_1,\, b] \;:\; f(x_0) = f(a)$
$x_0 \neq a \rightsquigarrow$ Ατοπο

Περ. (ii) $f(a) < f(b) < f(x_1)\big($ ή $f(x_2)\big)$
Θεώρημα ενδιαμέσου σημείου $\rightsquigarrow$
$\exists\, x_0 \in [a,\, x_1] \;:\; f(x_0) = f(b)$
$x_0 \neq b \rightsquigarrow$ Ατοπο

Περ. (iii) $f(a) < f(x_2) < f(x_1) < f(b)$
Θεώρημα ενδιαμέσου σημείου $\rightsquigarrow$
$\exists\, x_0 \in [a,\, x_1] \;:\; f(x_0) = f(x_2)$
$x_0 \neq x_2 \rightsquigarrow$ Ατοπο

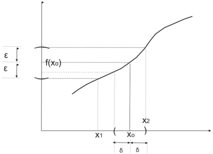
Η μόνη περίπτωση που μένει είναι:
$f(a) < f(x_1) < f(x_2) < f(b)$ $\square$

Συνέχεια Μονότονων Συναρτήσεων-Αποδείξεις (3/3)

Πρόταση

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) \ \text{γνήσια αύξουσα/φθίνουσα} \\ f(x) \ \text{αμφιμονότιμη δηλ.} \ \exists\, f^{-1} \\ \text{και} \ \ [a,\, b] \xrightarrow[\text{επί}]{f} [m,\, M] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ f(x) \ \ \text{συνεχής στο} \ [a,\, b] \right\}$$



Απόδειξη.

Εστω $f(x)$ γνήσια αύξουσα, $m = f(a)$ και $M = f(b)$

Εστω $\epsilon > 0$

$$\begin{gathered} y_0 - \epsilon < y_0 < y_0 + \epsilon \ \rightsquigarrow \\ x_1 = f^{-1}(y_0 - \epsilon) < x_0 = f^{-1}(y_0) < x_2 = f^{-1}(y_0 + \epsilon) \\ \rightsquigarrow \ \delta(\epsilon) = \min\{x_0 - x_1,\, x_2 - x_0\} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} x_1 \le x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \le x_2 \\ y_0 - \epsilon = f(x_1) \le f(x_0 - \delta) < f(x) < f(x_0 + \delta) \le f(x_2) = y_0 + \epsilon \end{gathered}$$

$f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση □

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- Ορισμός: $\boxed{\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots}$
- Κριτήριο λόγων $\rightsquigarrow$ η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\boxed{\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$, $e^0 = 1$, $e \notin \mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{lcl} X_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} & & X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^x \\ Y_n = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{y^\ell}{\ell!} & \Rightarrow & Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^y \\ Z_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{z^m}{m!}, & & Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+y} \\ z = x + y & & \end{array}$$

- $Z_n \leq X_n Y_n \rightsquigarrow \mathrm{e}^{x+y} \leq \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$
- $X_n Y_n \leq Z_{2n} \rightsquigarrow \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y \leq \mathrm{e}^{x+y}$
- $\boxed{\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}}$
- $x > y \geq 0 \rightsquigarrow (x - y)\mathrm{e}^y \leq \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y \leq (x - y)\mathrm{e}^x$
- $x > 0 \rightsquigarrow \mathrm{e}^x > 1 \rightsquigarrow \mathrm{e}^x$ αύξουσα συνάρτηση
- $\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1 \rightsquigarrow \lim_{x\to y} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \rightsquigarrow$ $\boxed{\mathrm{e}^x \text{ συνεχής}}$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- *Απειροστικός Λογισμός*-Τόμος Α′ Σ.Κ. Ντούγιας, LEADER BOOKS, 2003
- *Διαφορικός Ολοκληρωτικός Λογισμός*, M. Spivak , Παν. Εκδ. Κρήτης,
- *Απειροστικός Λογισμός*, THOMAS-FINLEY, Παν. Εκδ. Κρήτης
- Μαθήματα στο δίκτυο: Μαθήματα Μ. Παπαδημητράκη (Παν. Κρήτης) http://www.math.uoc.gr/~papadim/Apeirostikos1.pdf
- Μαθήματα στο δίκτυο: Μαθήματα Α. Γιαννόπολου (Παν. Αθηνών) http://users.uoa.gr/~apgiannop
- Διαφάνειες: http://users.auth.gr/~daskalo

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Δασκαλογιάννης Κωνσταντίνος. "Λογισμός Ι. Ενότητα 3: Συνέχεια". Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
http://eclass.auth.gr/courses/OCRS434/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης