ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός Ι

Ενότητα 4: Παράγωγοι

Κ. Δασκαλογιάννης
Τμήμα Μαθηματικών

Α.Π.Θ.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο "Ανοικτά Ακαδημαικά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης " έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος "Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση" και συγχρηματοδοτείται απο την Ευρωπαική Ένωση (Ευρωπαικό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Περιεχόμενα Ενότητας

- Παράγωγος συνάρτησης - Ιδιότητες Παραγώγων
- Υπερβολικές συναρτήσεις
- Θεώρημα εσωτερικών ακραίων σημείων
- Θεώρημα Darboux
- Θεώρημα Rolle
- Θεώρημα Μέσης Τιμής
- Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής
- Κανόνες de l' Hospital
- Τύπος Taylor - Ανάπτυγμα Taylor
- Ανάπτυγμα Maclaurin - Σειρές Maclaurin
- Δυναμοσειρές
- Θεώρημα Fermat
- Κυρτή συνάρτηση-Σημεία Καμπής

Σκοποί Ενότητας

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τις παραγώγους των συναρτήσεων και τις ιδιότητές τους.

Παράγωγος Συνάρτησης

Ορισμός Παραγώγου σε ένα σημείο

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ σε ένα σημείο ξ είναι το όριο (αν υπάρχει!)

$$\boxed{f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} g(x,\xi), \quad g(x,\xi) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}$$

- Ορισμός *Cauchy*:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta(\epsilon,\xi) > 0 \, \forall x \, |x-\xi| < \delta \Rightarrow |f'(\xi) - g(x,\xi)| < \epsilon$$

- Ορισμός $\mathfrak{Heine}$:

$$\forall x_n \to \xi \Rightarrow g(x_n,\xi) \to f'(\xi)$$

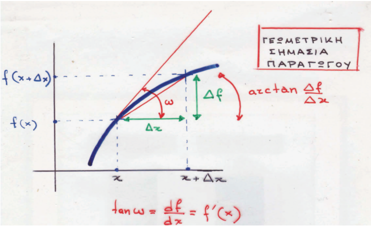
$$\exists\, f'(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Παράγωγος από αριστερά } = \\ = \text{ Παράγωγος από δεξιά} \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x\to\xi-} g(x,\xi) \equiv f'_-(\xi) = f'_+(\xi) \equiv \lim_{x\to\xi+} g(x,\xi)$$

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\left(\begin{array}{c}\text{όπου } \Delta f(x) = \\ = f(x+\Delta x)-f(x)\end{array}\right) = \boxed{\frac{df}{dx}}$$



$$\boxed{\frac{df}{dx} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

Πρόταση 1

Πρόταση

Αν υπάρχει το $f'(\xi)$ τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο ξ

Απόδειξη.

$$f(x) - f(\xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}(x - \xi) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \lim_{x \to \xi} (f(x) - f(\xi)) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \lim_{x \to \xi} (x - \xi) = 0$$

□

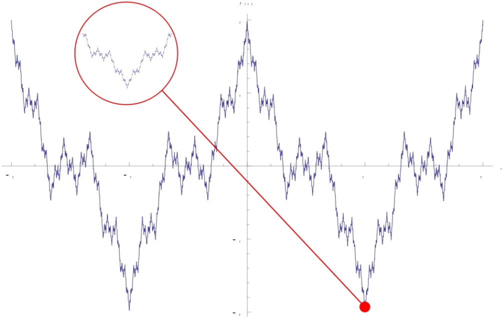
- Προσοχή: Το αντίστροφο <u>δεν</u> ισχύει. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής σε κάθε περιοχή γύρω από το $x = 0$ αλλά <u>δεν</u> έχει παράγωγο στο $x = 0$
- Υπάρχουν συναρτήσεις παντού συνεχείς αλλά δεν έχουν πουθενά παράγωγο ! πχ η συνάρτηση Weierstrass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(17^n x)}{2^n}$$

Παράδειγμα 1

Υπάρχουν συναρτήσεις παντού συνεχείς αλλά δεν έχουν πουθενά παράγωγο ! πχ η συνάρτηση Weierstrass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(17^n x)}{2^n}$$



'fractal' δομή της καμπύλης.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

1. $(\mu f)'(x) = \mu f'(x)$ για $\mu \in \mathbb{R}$
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
3. $(f\,g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ Leibnitz rule
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
5. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$ Chain rule

   ή $\dfrac{d}{dx} f(g(x)) = \dfrac{df}{dg}\,\dfrac{dg}{dx}$
6. $f(x)$ γνήσια μονότονη συνάρτηση, $f'(x) \neq 0$

   $$\left.\begin{array}{c} f(\xi) = \eta \\ \xi = f^{-1}(\eta) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(\eta) = 1/f'(\xi)$$

   ή $\frac{df^{-1}(\eta)}{d\eta} = \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{d\eta/d\xi} = \frac{1}{df(\xi)/d\xi}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ- Αποδείξεις

1. $(\mu f)'(x) = \mu f'(x) \quad$ για $\quad \mu \in \mathbb{R}$
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
3. $(f\,g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ Leibnitz rule

   □ *Απόδ* ($\mathfrak{Heine}$):

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_n)g(x_n)}{x - x_n} = f(x)\frac{g(x) - g(x_n)}{x - x_n} + g(x_n)\frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n}$$

   Παίρνουμε το όριο $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ □

4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
5. $(f \circ g)'(x) = f'\left(g(x)\right) g'(x)$ Chain rule

   ή $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{dg}\,\dfrac{dg}{dx}$

   □ *Απόδ* ($\mathfrak{Heine}$):

$$\frac{f\left(g(x)\right) - f\left(g(x_n)\right)}{x - x_n} == \frac{f\left(g(x)\right) - f\left(g(x_n)\right)}{g(x) - g(x_n)} \cdot \frac{g(x) - g(x_n)}{x - x_n} = \frac{f\left(g\right) - f\left(g\right)}{g - g_n} \cdot \frac{g(x) - g(x_n)}{x - x_n}$$

   Παίρνουμε το όριο $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \rightsquigarrow g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ □

6. $f(x)$ γνήσια μονότονη συνάρτηση, $f'(x) \neq 0$

$$\left.\begin{array}{c} f(\xi) = \eta \\ \xi = f^{-1}(\eta) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(\eta) = 1/f'(\xi)$$

   ή $\quad \frac{df^{-1}(\eta)}{d\eta} = \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{d\eta/d\xi} = \frac{1}{df(\xi)/d\xi}$

   □ *Απόδ* ($\mathfrak{Heine}$):

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \leftrightsquigarrow f(x_n) = y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta = f(\xi)$$
$$y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta \leftrightsquigarrow f^{-1}(y_n) = x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi = f^{-1}(\eta)$$
$$\frac{f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y_n)}{\eta - y_n} = \frac{\xi - x_n}{f(\xi) - f(x_n)} = \frac{1}{\dfrac{f(\xi) - f(x_n)}{\xi - x_n}}$$

   Παίρνουμε το όριο $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi \rightsquigarrow y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta$ □

Παραγωγίσεις Παραμετρικών μορφών συναρτήσεων

Μια καμπύλη περιγράφεται είναι με μια συνάρτηση $y = f(x)$ είτε με μια παραμετρική συνάρτηση των συντεταγμένων πχ.

$$x = X(t), \quad y = Y(t)$$

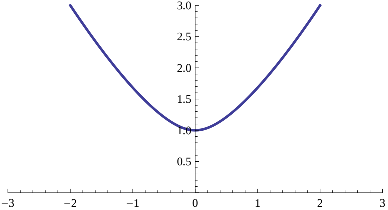
Θέτουμε $y = f(x)$ και $y' = f(x')$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}} = \lim_{x' \to x} \frac{y' - y}{x' - x} = \lim_{t' \to t} \frac{\frac{y'-y}{t'-t}}{\frac{x'-x}{t'-t}} = \frac{\lim_{t' \to t} \frac{y'-y}{t'-t}}{\lim_{t' \to t} \frac{x'-x}{t'-t}} = \boxed{\frac{dy/dt}{dx/dt}}$$

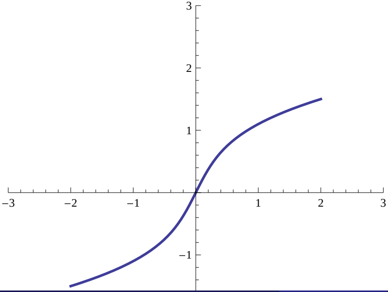
$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \boxed{\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)}{\frac{dx}{dt}}}$$

Παράδειγμα 2

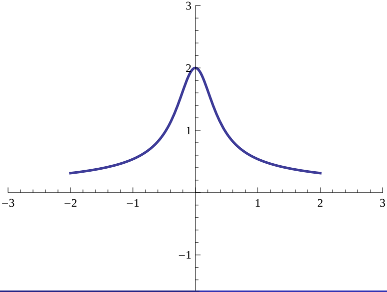
$$\left\{x=t^3+t,\quad y=t^4+t^2+1,\quad -1<t<1\right\}$$



$$\left\{x=t^3+t,\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{4\,t^3+2\,t}{3\,t^2+1},\quad -1<t<1\right\}$$

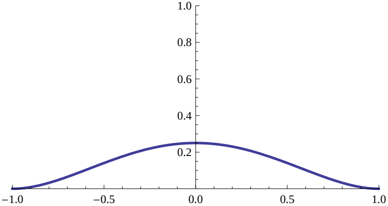


$$\left\{x=t^3+t,\ \frac{d^2\,y}{\mathrm{dx}^2}=\frac{\frac{12\,t^2+2}{3\,t^2+1}-\frac{6\,t\left(4\,t^3+2\,t\right)}{\left(3\,t^2+1\right)^2}}{3\,t^2+1},\quad -1<t<1\right\}$$

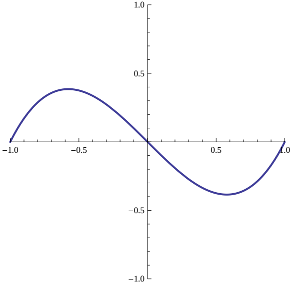


Παράδειγμα 3

$$\left\{x = \sin(t), \quad y = \frac{\cos^4(t)}{4}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right\}$$

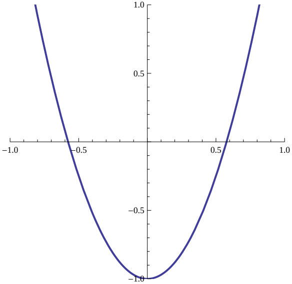


$$\left\{x = \sin(t), \ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \sin(t)\left(-\cos^2(t)\right), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right\}$$



,

$$\left\{x = \sin(t), \ \frac{d^2 y}{\mathrm{dx}^2} = 2\sin^2(t) - \cos^2(t), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right\}$$



Παράγωγος Εκθετικής Συνάρτησης

$$\boxed{\mathrm{e}^x \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

για $\boxed{0 \leq y < x < \infty}$

$$\rightsquigarrow \boxed{(x-y)\mathrm{e}^y < \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y < (x-y)\mathrm{e}^x}$$

$$\rightsquigarrow \mathrm{e}^y < \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{x-y} < \mathrm{e}^x$$

$$\Rightarrow (\mathrm{e}^x)'_- = \lim_{y \to x^-} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{x-y} = \mathrm{e}^x$$

$$x \leftrightarrow y \rightsquigarrow (\mathrm{e}^x)'_+ = \mathrm{e}^x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\,\mathrm{e}^x}{dx} = \mathrm{e}^x}$$

$$\rightsquigarrow (x-y)\mathrm{e}^y < \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y < (x-y)\mathrm{e}^x$$

$$\rightsquigarrow \boxed{(x-y)\mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-x} < (x-y)\mathrm{e}^{-y}}$$

Παράγωγος Λογαριθμικής Συνάρτησης

$$x > 0\,, y = \ln\, x = \exp^{-1} x \overset{1:1}{\longleftrightarrow} x = \exp\, y = \mathrm{e}^y,\ y > 0$$

$$\frac{d}{dx}(\ln\, x) = \frac{d \exp^{-1} x}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln\, x)} = \lim_{x' \to x} \frac{\ln\, x - \ln\, x'}{x - x'} =$$

$$= \lim_{y' \to y} \frac{y - y'}{\exp\, y - \exp\, y'} =$$

$$= \lim_{y' \to y} \frac{1}{\dfrac{\exp\, y - \exp\, y'}{y - y'}} = \boxed{\frac{1}{\dfrac{d}{dy}(\exp\, y)}} = \frac{1}{\exp\, y} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{x}}$$

Παράδειγμα 4

$|x| \le 1$

$$y = \arcsin\, x = \sin^{-1} x \overset{1:1}{\longleftrightarrow} x = \sin\, y, \qquad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dx}(\arcsin\, x) = \frac{d\sin^{-1} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\arcsin\, x)} = \lim_{x' \to x} \frac{\arcsin\, x - \arcsin\, x'}{x - x'} =$$

$$= \lim_{y' \to y} \frac{y - y'}{\sin\, y - \sin\, y'} =$$

$$= \lim_{y' \to y} \frac{1}{\dfrac{\sin\, y - \sin\, y'}{y - y'}} = \boxed{\frac{1}{\dfrac{d}{dy}(\sin\, y)}} =$$

$$= \frac{1}{\cos\, y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Παράδειγμα 5

$|x| \leq \infty$

$$y = \arctan\, x = \tan^{-1} x \xleftrightarrow{1:1} x = \tan\, y,\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

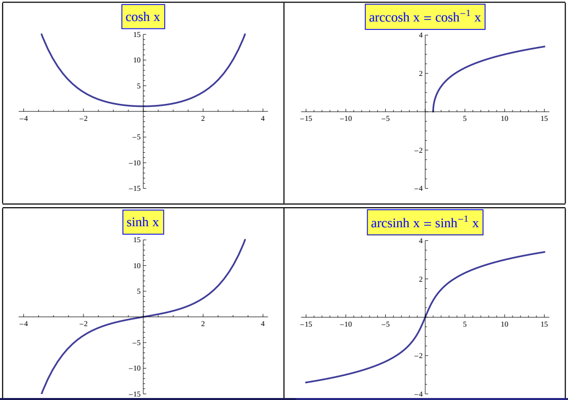
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\arctan\, x) = \frac{d\tan^{-1} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{\frac{d}{dx}(\arctan\, x)} &= \lim_{x' \to x} \frac{\arctan\, x - \arctan\, x'}{x - x'} = \\
&= \lim_{y' \to y} \frac{y - y'}{\tan\, y - \sin\, y'} = \\
&= \lim_{y' \to y} \frac{1}{\dfrac{\tan\, y - \tan\, y'}{y - y'}} = \boxed{\frac{1}{\dfrac{d}{dy}(\tan\, y)}} = \\
&= \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2\, y}} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}
\end{aligned}$$

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (1/2)

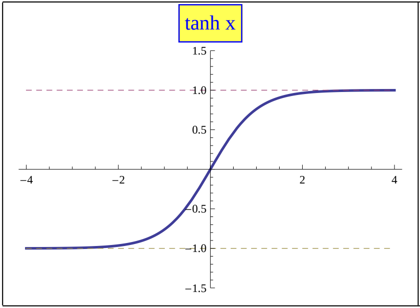
$$\cosh\, x \equiv \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \sinh\, x \equiv \frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

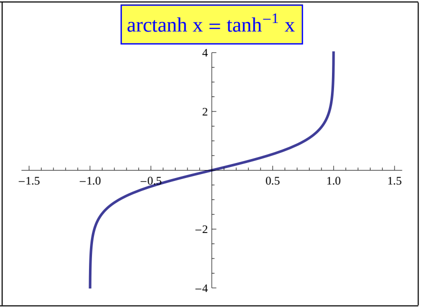
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$



ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (2/2)

$$\tanh\ x \equiv \frac{\sinh\ x}{\cosh\ x}$$





Παράγωγοι Υπερβολικών Συναρτήσεων

$$\frac{d\cosh\ x}{dx} = \sinh\ x, \quad \frac{d\sinh\ x}{dx} = \cosh\ x$$

$$\frac{d\cosh^{-1}\ x}{dx} = \frac{d\,\mathrm{arccosh}\, x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d\sinh^{-1}\ x}{dx} = \frac{d\,\mathrm{arcsinh}\, x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d\tanh\ x}{dx} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\frac{d\mathrm{tanh}^{-1}\, x}{dx} = \frac{d\,\mathrm{arctanh}\, x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1$$

$$\frac{d\coth\ x}{dx} = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

$$\frac{d\mathrm{coth}^{-1}\, x}{dx} = \frac{d\,\mathrm{arccoth}\, x}{dx} = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1$$

ΤΥΠΟΣ *LEIBNITZ*

ΤΥΠΟΣ *NEWTON*

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k}}$$

ΤΥΠΟΣ *LEIBNITZ*

$$\boxed{(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \, g^{(n-k)}}$$

Θεώρημα εσωτερικών ακραίων τιμών/Interior Extremum Theorem

Πρόταση

$$f:\,[a,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}\quad \text{και}\quad \forall c\in(a,\,b)\quad \exists\, f'(c)\,\text{αν}\quad f'(c)>0\ \Rightarrow$$
$$\exists\,\delta>0\ :c<x<c+\delta\ \rightsquigarrow\ f(c)<f(x)$$
$$\text{και}\quad c-\delta<x'<c\ \rightsquigarrow\ f(x')<f(c)$$

$f'(c)>0\ \rightsquigarrow$ η $f(x)$ είναι τοπικά αύξουσα

$f'(c)<0\ \rightsquigarrow$ η $f(x)$ είναι τοπικά φθίνουσα

Θεώρημα εσωτερικών ακραίων τιμών/Interior Extremum Theorem

$$f(x)\ \text{παραγωγίσιμη στο}\ [a,\,b]\Rightarrow f(x)\ \text{συνεχής στο}\ [a,\,b]$$
$$\Downarrow$$
$$\exists\,x_m\in[a,\,b]\ :\ f(x_m)=\min_{x\in[a,\,b]} f(x)\Rightarrow \boxed{\text{Αν } x_m\in(a,\,b)\rightsquigarrow f'(x_m)=0}$$
$$\text{και}$$
$$\exists\,x_M\in[a,\,b]\ :\ f(x_M)=\max_{x\in[a,\,b]} f(x)\Rightarrow \boxed{\text{Αν } x_M\in(a,\,b)\rightsquigarrow f'(x_M)=0}$$

Απόδειξη

Πρόταση

Θεώρημα εσωτερικών ακραίων τιμών/Interior Extremum Theorem-Αποδείξεις

$$\begin{gathered} f:[a,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}\quad\text{και}\quad\forall c\in(a,\,b)\quad\exists\, f'(c)\\ \text{αν}\quad f'(c)>0\ \Rightarrow\\ \exists\,\delta>0\ :c<x<c+\delta\ \rightsquigarrow\ f(c)<f(x)\\ \text{και}\ \ c-\delta<x'<c\ \rightsquigarrow\ f(x')<f(c)\end{gathered}$$

Απόδειξη.

$$g(x,\,c)=\frac{f(c)-f(x)}{c-x}$$

$$f'(c)>0\ \rightsquigarrow\ \lim_{x\to c} g(x,c)\ =f'(c)\ \rightsquigarrow$$

$$\forall\,\epsilon>0\quad\exists\,\delta>0\ :$$

$$c-\delta<x<c+\delta\rightsquigarrow\ f'(c)-\epsilon<g(x,c)<f'(c)+\epsilon$$

$$\text{Αν}\ \epsilon<f'(c)\ \big(\ \text{πχ}\ \ \epsilon=\frac{f'(c)}{10}\big)\ \rightsquigarrow\ 0<g(x,c)$$

Αν $c<x<c+\delta\ \rightsquigarrow$

$$0<\frac{f(c)-f(x)}{c-x}\ \rightsquigarrow\ f(c)-f(x)<0$$

Αν $c-\delta<x<c\ \rightsquigarrow$

$$0<\frac{f(c)-f(x)}{c-x}\ \rightsquigarrow\ f(c)-f(x)>0$$

□

$f'(c)>0\ \rightsquigarrow$ η $f(x)$ είναι τοπικά αύξουσα
$f'(c)<0\ \rightsquigarrow$ η $f(x)$ είναι τοπικά φθίνουσα

Θεώρημα εσωτερικών ακραίων τιμών/Interior Extremum Theorem

$$\begin{gathered} f(x)\ \text{παραγωγίσιμη στο}\ [a,\,b]\\ \Downarrow\\ f(x)\ \text{συνεχής στο}\ [a,\,b]\\ \Downarrow\\ \exists\, x_m\in[a,\,b]\ :\ f(x_m)=\min_{x\in[a,\,b]} f(x)\\ \Downarrow\\ \boxed{\text{Αν}\ x_m\in(a,\,b)\rightsquigarrow f'(x_m)=0}\\ \text{και}\\ \exists\, x_M\in[a,\,b]\ :\ f(x_M)=\max_{x\in[a,\,b]} f(x)\\ \Downarrow\\ \boxed{\text{Αν}\ x_M\in(a,\,b)\rightsquigarrow f'(x_M)=0}\end{gathered}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ DARBOUX

ΘΕΩΡΗΜΑ DARBOUX ή Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών για παραγώγους

$$f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textbf{και} \quad \forall x \in [a,\, b] \rightsquigarrow \exists\, f'(x)$$
$$\textbf{και} \quad f'(a) < f'(b) \;\; (\text{ή } f'(a) > f'(b))$$
$$\textbf{αν} \quad f'(a) < k < f'(b) \;\; \big(\text{ή } f'(a) > k > f'(b)\big) \;\Rightarrow\; \exists\, \xi \in (a,\, b) : f'(\xi) = k$$

ΘΕΩΡΗΜΑ DARBOUX-Απόδειξη

ΘΕΩΡΗΜΑ DARBOUX ή Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών για παραγώγους

$$
\begin{gathered}
f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \forall x \in (a,\, b) \ \rightsquigarrow \ \exists\, f'(x) \\
\text{και} \quad f'(a) < f'(b) \ \ (\text{ή } f'(a) > f'(b)) \\
\text{αν} \quad f'(a) < k < f'(b) \ \ \big(\text{ή } f'(a) > k > f'(b)\big) \ \Rightarrow \\
\Rightarrow \ \exists \xi \in (a,\, b) : f'(\xi) = k
\end{gathered}
$$

Απόδειξη.

$f'(a) < k < f'(b)$, $g(x) = f(x) - kx$

$$
\begin{aligned}
&g'(a) = f'(a) - k < 0 \rightsquigarrow \\
&\qquad \exists\, \delta_1 > 0 \ : a < x < a + \delta_1 \ \rightsquigarrow \ g(x) < g(a) \\
&g'(b) = f'(b) - k > 0 \rightsquigarrow \\
&\qquad \exists\, \delta_2 > 0 \ : b - \delta_2 < x < b \ \rightsquigarrow \ g(x) < g(b)
\end{aligned}
$$

$f(x)$ **συνεχής** $\rightsquigarrow \exists \xi \in (a,\, b)$:

$$
\begin{aligned}
g(\xi) = \min\Big\{g(x),\ x \in [a,\, b]\Big\} \ &\rightsquigarrow \ g'(\xi) = 0 \\
\rightsquigarrow \ f'(\xi) = k&
\end{aligned}
$$

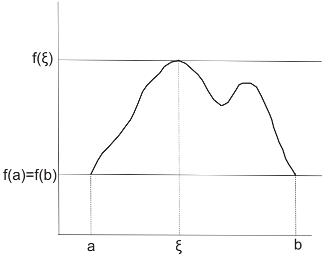
Σημ. Το ξ δεν μπορεί να είναι το a είτε το b. □

□

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE (1/2)

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

$$\left\{\begin{array}{l} f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textbf{συνεχής} \\ \boxed{\textbf{και}} \quad \forall x \in (a,\, b) \quad \exists\, f'(x) \\ \qquad \boxed{\textbf{και}} \quad f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\exists\, \xi \in (a,\, b) \ : \ f'(\xi) = 0\right\}$$



Μεταξύ δύο (διαδοχικών) ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης υπάρχει μια ρίζα της παραγώγου

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE (2/2)

Από τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle καμμιά δεν μπορεί να παραληφθεί

$f(x)$ συνεχής , $f(0) = f(1)$ αλλά $\boxed{\text{μη}}$ παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο π.χ

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{αν} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \text{ΟΧΙ} \quad f'(\xi) = 0$$

$f(x)$ $\boxed{\text{μη}}$ συνεχής σε κάποιο σημείο, $f(0) = f(1)$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ π.χ

$$f(x) = x - [x] \;\Rightarrow\; f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 1 \end{cases}$$

$f'(x) = 1$ για $x \in (0, 1)$

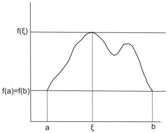
$f(x)$ συνεχής και παραγωγίσιμη αλλά $\boxed{f(1) \neq f(2)}$ πχ

$$f(x) = x^2, \quad x \in [1, 2] \quad \text{ΟΧΙ} \quad f'(\xi) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE-Απόδειξη

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

$$\left\{ \begin{array}{l} f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{συνεχής} \\ \boxed{\text{και}} \quad \forall x \in (a,\, b) \quad \exists\, f'(x) \\ \quad \boxed{\text{και}} \quad f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \exists\, \xi \in (a,\, b) \ : \ f'(\xi) = 0 \right\}$$



Απόδειξη.

☐ *Απόδ*:

$$\begin{aligned} & f(x) \ \text{συνεχής} \ \rightsquigarrow \\ & \exists\, x_m \in [a,\, b] \ \rightsquigarrow m = f(x_m) = \min\left\{ f(x),\ x \in [a,\, b] \right\} \\ & \exists\, x_M \in [a,\, b] \ \rightsquigarrow M = f(x_M) = \max\left\{ f(x),\ x \in [a,\, b] \right\} \end{aligned}$$

Περίπτωση 1: $m = M \rightsquigarrow f(x) =$σταθερά $\rightsquigarrow f'(x) = 0$
Περίπτωση 2α: $m < M$ Αν $x_M \neq a$ και $x_M \neq b$ τότε

$$\exists\, \xi = x_M \in (a,\, b) \ \rightsquigarrow \ f'(\xi) = 0$$

Περίπτωση 2β: $m < M$ Αν $x_M = a$ (ή $x_M = b$) τότε $f(a) = f(b) = M$

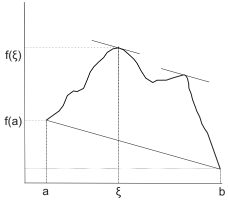
$$\exists\, \xi = x_m \in (a,\, b) \ \rightsquigarrow \ f'(\xi) = 0$$

☐

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ- ΓΕΝΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

$$\left.\begin{array}{lll} f:[a,\,b] \longrightarrow \mathbb{R} & & \text{συνεχής} \\ \text{και} & \forall\, x \in (a,\,b) & \exists\, f'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \exists \xi \in (a,\,b) \;:\; f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right.$$



ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

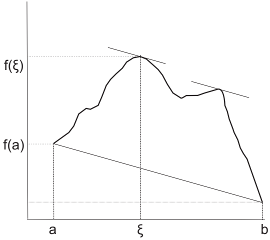
$$\left\{\begin{array}{lll} f:[a,\,b] \longrightarrow \mathbb{R} & & \text{συνεχής} \\ \text{και} & \forall\, x \in (a,\,b) & \exists\, f'(x) \\ g:[a,\,b] \longrightarrow \mathbb{R} & & \text{συνεχής} \\ \text{και} & \forall\, x \in (a,\,b) & \exists\, g'(x) \\ & \text{και} \quad g(a) \neq g(b) & \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \xi \in (a,\,b) \;:\; \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

$$\left\{\begin{array}{lll} f : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R} & & \text{συνεχής} \\ \text{και} \quad \forall\, x \in (a,\, b) & & \exists\, f'(x) \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \xi \in (a,\, b) \,:\, f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Απόδειξη.

$$h(x) = x\,(f(b) - f(a)) - f(x)\,(b - a)$$
$$h(a) = a\,(f(b) - f(a)) - f(a)\,(b - a) = af(b) - bf(a)$$
$$h(b) = b\,(f(b) - f(a)) - f(b)\,(b - a) = af(b) - bf(a)$$
$$\rightsquigarrow\ h(a) = h(b)$$
$$h'(x) = (f(b) - f(a)) - f'(x)\,(b - a)$$

Η συνάρτηση $h(x)$ είναι συνεχής για $x \in [a,\, b]$ και $\exists\, f'(x)$ για $x \in (a,\, b)$

$\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists\, \xi \in (a,\, b)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ □

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ-Απόδειξη

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ-Απόδειξη

$$\left\{\begin{array}{l} f:[a,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}\quad \text{συνεχής} \\ \text{και}\quad \forall x\in(a,\,b)\quad \exists\, f'(x) \\ g:[a,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}\quad \text{συνεχής} \\ \text{και}\quad \forall x\in(a,\,b)\quad \exists\, g'(x) \\ \text{και}\quad g(a)\neq g(b) \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists\xi\in(a,\,b)\;:\;\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} h(x)&=g(x)\,(f(b)-f(a))-f(x)\,(g(b)-g(a)) \\ h(a)&=g(a)\,(f(b)-f(a))-f(a)\,(g(b)-g(a))= \\ &=g(a)f(b)-g(b)f(a) \\ h(b)&=g(b)\,(f(b)-f(a))-f(b)\,(g(b)-g(a))= \\ &=g(a)f(b)-g(b)f(a) \\ &\rightsquigarrow\; h(a)=h(b) \\ h'(x)&=g'(x)\,(f(b)-f(a))-f'(x)\,(g(b)-g(a)) \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $h(x)$ είναι συνεχής για $x\in[a,\,b]$ και $\exists\, f'(x)$ για $x\in(a,\,b)$

$\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow}\exists\,\xi\in(a,\,b)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ $\square$ $\square$

Εφαρμογές Θεωρήματος Μέσης Τιμής

$f(x)$ είναι συνεχής στο $[a,\ b]$ και $f'(x) = 0$ για $x \in (a,\ b)$. Τότε η συνάρτηση είναι σταθερά στο $[a,\ b]$.

$f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x \in (a,\ b)$. Αν η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσιμο τότε είναι μονότονη.

Αν $|f'(x)| < M$ τότε $|f(x) - f(y)| < M\,|x - y|$

ΚΑΝΟΝΕΣ de l' HOSPITAL σε ένα σημείο, για συναρτήσεις που μηδενίζονται

$f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις και παραγωγίσιμες γιά $x \in (\xi, a)$

$$\lim_{x\to\xi^+} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\xi^+} g(x) = 0$$

$$\exists \lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις και παραγωγίσιμες γιά $x \in (a, \xi)$

$$\lim_{x\to\xi^-} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\xi^-} g(x) = 0$$

$$\exists \lim_{x\to\xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

KANONEΣ de l' HOSPITAL σε ένα σημείο, για συναρτήσεις που απειρίζονται

$f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις και παραγωγίσιμες γιά $x \in (\xi, b)$

$$\lim_{x \to \xi^+} g(x) = \pm\infty$$

$$\exists \lim_{x \to \xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ KAI } \lim_{x \to \xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \to \xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις και παραγωγίσιμες γιά $x \in (a, \xi)$

$$\lim_{x \to \xi^-} g(x) = \pm\infty$$

$$\exists \lim_{x \to \xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ KAI } \lim_{x \to \xi^-} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \to \xi^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Παράδειγμα που ΔΕΝ ισχύει ο κανόνας $\lim_{x \to \infty} \frac{2x + \cos x}{2x - \cos x}$

KANONEΣ de l' HOSPITAL σε ένα σημείο για συναρτήσεις που μηδενίζονται

$f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις και παραγωγίσιμες γιά $x \in (a, \xi)$

$$\lim_{x\to\xi^+} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\xi^+} g(x) = 0$$

$$\exists \lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Απόδειξη.

Περίπτωση $\boxed{|\xi| < \infty}$

$$\left\{ \lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall, \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \;: \\ \xi < s < \xi + \delta \rightsquigarrow -\epsilon < \dfrac{f'(s)}{g'(s)} - \ell < \epsilon \end{array} \right\}$$

Γενικευμένο Θεωρ. Μ.Τ. $\rightsquigarrow$
Αν $\xi < y < x < \xi + \delta \Rightarrow \exists s \;:\; \xi < y < s < x < \xi + \delta$
$\dfrac{f'(s)}{g'(s)} = \dfrac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}$ επομένως

$$-\epsilon < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \ell < \epsilon \rightsquigarrow$$

$$-\epsilon \leq \lim_{y\to\xi^+} \left(\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \ell \right) = \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \leq \epsilon$$

Δηλαδή αποδείξαμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall, \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \;: \\ \xi < x < \xi + \delta \rightsquigarrow -\epsilon \leq \dfrac{f(x)}{g(x)} - \ell \leq \epsilon \end{array} \right\} \rightsquigarrow$$

$$\lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Περίπτωση $\boxed{\xi = -\infty}$ Ιδια απόδειξη, θέτουμε $\xi \to -\infty$ και $\xi + \delta \to -R$ □

KANONEΣ de l' HOSPITAL σε ένα σημείο για συναρτήσεις που μηδενίζονται

$f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις και παραγωγίσιμες γιά $x \in (a, \xi)$

$$\lim_{x\to\xi^-} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\xi^-} g(x) = 0$$

$$\exists \lim_{x\to\xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Κανόνες de l'Hospital για απειρήσημες συναρτήσεις

Κανόνες de l'Hospital για απειρήσημες συναρτήσεις

$f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις και παραγωγίσιμες γιά $x \in (\xi,\, b)$

$$\lim_{x\to\xi^+} g(x) = \pm\infty$$

$$\exists \lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Απόδειξη.

Περίπτωση $\boxed{|\xi| < \infty}$

$$\left\{ \lim_{x\to\xi^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall,\, \epsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0 \ : \\ \xi < s < \xi + \delta \ \rightsquigarrow\ -\epsilon < \dfrac{f'(s)}{g'(s)} - \ell < \epsilon \end{array} \right\}$$

Γενικευμένο Θεωρ. Μ.Τ. $\rightsquigarrow$
Αν $\xi < y < x < \xi + \delta \Rightarrow \exists s \ : \ \xi < y < s < x < \xi + \delta$

$$\frac{f'(s)}{g'(s)} = \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)}}{1 - \frac{g(x)}{g(y)}}$$

$$\left\{ \lim_{x\to\xi^+} g(x) = \pm\infty \right\} \Rightarrow$$

$$\exists\, \delta_1 \ : \ \xi < y < \xi + \delta_1 \ \rightsquigarrow\ \frac{g(x)}{g(y)} < 1 \ \rightsquigarrow\ 0 < 1 - \frac{g(x)}{g(y)}$$

επομένως

$$\ell - \epsilon < \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)}}{1 - \frac{g(x)}{g(y)}} < \ell + \epsilon \rightsquigarrow$$

$$(\ell - \epsilon)\left(1 - \frac{g(x)}{g(y)}\right) < \frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)} < (\ell + \epsilon)\left(1 - \frac{g(x)}{g(y)}\right)$$

$$\rightsquigarrow\ (\ell - \epsilon) + \underbrace{\frac{f(x)}{g(y)} - (\ell - \epsilon)\frac{g(x)}{g(y)}}_{K_L} < \frac{f(y)}{g(y)} <$$

$$(\ell + \epsilon) + \underbrace{\frac{f(x)}{g(y)} - (\ell + \epsilon)\frac{g(x)}{g(y)}}_{K_R}$$

$$\left\{ \lim_{y\to\xi^+} g(y) = \pm\infty \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \lim_{y\to\xi^+} \frac{g(x)}{g(y)} = 0, \ \text{και} \ \lim_{y\to\xi^+} \frac{f(x)}{g(y)} = 0 \right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{y\to\xi^+} K_R = 0 \ \text{και} \ \lim_{y\to\xi^+} K_L = 0 \Rightarrow$$

$$\exists\, \delta_2 \ : \ \xi < y < \xi + \delta_2 \ \rightsquigarrow\ K_R < \frac{\epsilon}{2} \ \text{και} \ -\frac{\epsilon}{2} < K_L$$

Δηλαδή αποδείξαμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall,\, \epsilon > 0, \quad \exists\, \delta' = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\} > 0 \ : \\ \xi < y < \xi + \delta' \ \rightsquigarrow\ -\frac{3\epsilon}{2} \leq \dfrac{f(y)}{g(y)} - \ell \leq \frac{3\epsilon}{2} \end{array} \right\} \rightsquigarrow$$

$$\lim_{y\to\xi^+} \frac{f(y)}{g(y)} = \ell$$

Περίπτωση $\boxed{\xi = -\infty}$
Ιδια απόδειξη, θέτουμε $\xi \to -\infty$ και $\xi + \delta' \to -R$ □

$f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις και παραγωγίσιμες γιά $x \in (a,\, \xi)$

$$\lim_{x\to\xi^-} g(x) = \pm\infty$$

$$\exists \lim_{x\to\xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to\xi^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Παραδείγματα

- $\boxed{\dfrac{0}{0}}$:
  - $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x} = \ln \dfrac{a}{b}$
  - $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{(3^x - 2^x)^2} = \dfrac{1}{2\ln^2\left(\frac{3}{2}\right)}$
  - $\lim_{x\to a^+} \dfrac{x^{1/2} - a^{1/2} + (x-a)^{1/2}}{(x^2-a^2)^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$
  - $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}{1-\cos x} = 2$
- $\boxed{\infty - \infty}$
  - $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[n]{x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n} - x\right) = \dfrac{a_1}{n}$
- $\boxed{0\cdot\infty}$
  - $\lim_{x\to\infty} x\left(b^{1/x} - 1\right) = \ln b$
- $\boxed{\infty^0}$
  - $\lim_{x\to\infty} (1+x)^{1/x} = 1$
  - $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - \mathrm{e}}{x} = -\frac{\mathrm{e}}{2}$
  - $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) = 0$

Τύπος TAYLOR

Τύπος TAYLOR

$$\boxed{\begin{array}{c} f : [a,\, b] \to \mathbb{R} \\ f^{(n-1)}(x) \quad \textbf{συνεχής} \quad \forall\, x \in [a,\, b] \\ \exists\, f^{(n)}(x) \quad \forall\, x \in (a,\, b) \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists\, \xi \quad \textbf{μεταξύ} \quad x \quad \textbf{και} \quad x_0$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!}\, f^{(k)}(x_0) \,+\, R_n(x)}$$

$$\boxed{R_n(x) \;=\; \frac{(x-\xi)^{n-p}\,(x-x_0)^p}{p(n-1)!}\, f^{(n)}(\xi)}$$

υπόλοιπο Sclömlich-Roche

$p = 1$ υπόλοιπο Cauchy

$$R_n(x) \;=\; \frac{(x-\xi)^{n-1}\,(x-x_0)}{(n-1)!}\, f^{(n)}(\xi)$$

$p = n$ υπόλοιπο Lagrange

$$R_n(x) \;=\; \frac{(x-x_0)^n}{n!}\, f^{(n)}(\xi)$$

Απόδειξη του Τύπου TAYLOR

Απόδειξη.

Θεωρούμε ότι $x < x_0$ (αν $x > x_0$ η απόδειξη είναι η ίδια)

$$
\begin{aligned}
& x \leq t \leq x_0 \\
\phi(t) & \overset{\text{ορ.}}{\equiv} f(t) + \frac{x-t}{1!} f'(t) + \\
& + \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) + \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(3)}(t) + \\
& + \cdots + \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t) + A\,(x-t)^p = \\
& = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) + A\,(x-t)^p
\end{aligned}
$$

Το A είναι διαλεγμένο έτσι ώστε $\phi(x) = \phi(x_0)$. Εχουμε:

$$
\begin{aligned}
\phi(x_0) = & f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \\
& + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(3)}(x_0) + \\
& + \cdots + \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + A\,(x-x_0)^p = \\
& = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + A\,(x-x_0)^p \\
\phi(x) = & f(x)
\end{aligned}
$$

Η συνάρτηση $\phi(t)$ είναι συνεχής για $t \in [x,\, x_0]$ και υπάρχει $\phi'(t)$ για $t \in (x,\, x_0)$ και $\phi(x) = \phi(x_0)$ άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (x,\, x_0)$ τέτοιο ώστε $\phi'(\xi) = 0$.

$$
\begin{aligned}
\phi'(t) = & \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) - k \frac{(x-t)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(t) \right) - \\
& - pA\,(x-t)^{p-1} = \\
& = f'(t) + \left(\frac{(x-t)}{1!} f^{(2)}(t) - f'(t) \right) + \\
& \quad + \left(\frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t) - \frac{(x-t)}{1!} f^{(2)}(t) \right) + \\
& + \left(\frac{(x-t)^3}{3!} f^{(4)}(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t) \right) + \\
& + \cdots\cdots + \\
& + \left(\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(t) \right) + \\
& - pA\,(x-t)^{p-1} = \\
& = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) - pA\,(x-t)^{p-1}
\end{aligned}
$$

$$\phi'(\xi) = 0 \;\rightsquigarrow\; A = \frac{(x-\xi)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(\xi)$$

Το υπόλοιπο Sclömlich-Roche δίνεται από τον τύπο

$$R_n(x) = A\,(x-x_0)^p$$

□

Ανάπτυγμα Taylor

Ανάπτυγμα Taylor

Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει $\boxed{\text{φραγμένη παράγωγο κάθε τάξης}}$,
$\forall\, n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(x)$ για $x \in (a,\, b)$ και $\left|f^{(n)}(x)\right| < M \Rightarrow$

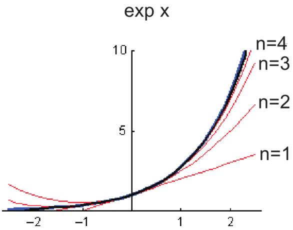
$$x,\, x_0 \in (a,\, b) \;\rightsquigarrow\; f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

Ανάπτυγμα Maclaurin

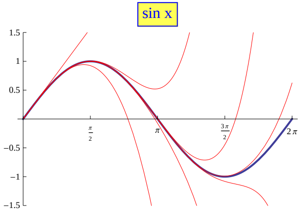
Ανάπτυγμα Maclaurin $\equiv$ Ανάπτυγμα Taylor για $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$$

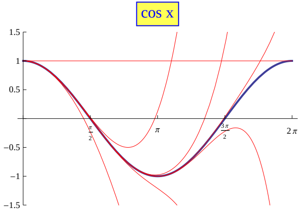
Παράδειγμα 6



$$\exp x = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad |x| < \infty$$



$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$



$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

ΣΕΙΡΕΣ MACLAURIN (1/2)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

$$\ln\,(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad |x| < 1$$

$$\exp x = \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad |x| < \infty$$

$$\cosh x \equiv \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x \equiv \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}$$

ΣΕΙΡΕΣ MACLAURIN (2/2)

$$\exp(x) = e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightsquigarrow \exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$$

$$\cosh x \equiv \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x \equiv \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\exp(i\,x) = e^{i\,x} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{\,n} \frac{x^n}{n!} \rightsquigarrow \exp i\,(x+y) = (\exp i\,x)(\exp i\,y)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Ιδιότητες τριγωνομετρικών- υπερβολικών συναρτήσεων

$$\cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{8} + \frac{3}{8}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \\ &= \frac{\cos 3x}{4} + \frac{3\cos x}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sinh 5x}{\sinh x} &= \frac{(e^x)^5 - (e^{-x})^5}{e^x - e^{-x}} = \\ &= (e^x)^4 + (e^x)^3 (e^{-x}) + (e^x)^2 (e^{-x})^2 + (e^x)(e^{-x})^3 + (e^{-x})^4 = \\ &= 2\cosh 4x + 2\cosh 2x + 1 \end{aligned}$$

Ανάπτυγμα Taylor

Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει $\boxed{\text{φραγμένη παράγωγο κάθε τάξης}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x)$ για $x \in (a,\, b)$ και $\left|f^{(n)}(x)\right| < M \Rightarrow$

$$x,\, x_0 \in (a,\, b) \rightsquigarrow \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)}$$

☐ *Απόδ*: Χρησιμοποιούμε το υπόλοιπο Lagrange, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} R_n(x) =& \frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) = \\ =& f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \end{aligned}$$

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-\xi|^n}{n!}$$

$$a_n = \frac{|x-\xi|^n}{n!} \rightsquigarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x-\xi|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Επομένως $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \rightsquigarrow R_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \rightsquigarrow$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

☐

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Ορισμός Δυναμοσειράς-Ακτίνα σύγκλισης

Ορισμός Δυναμοσειράς: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$

Ακτίνα σύγκλισης

$$R = \sup\{|x - x_0| \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n \text{ συγκλίνει}\}$$

$$\forall\, x \ : \ |x - x_0| < R \ \rightsquigarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n \text{ συγκλίνει}$$

Σημείωση Συνήθως (ΟΧΙ ΠΑΝΤΑ!!!) η ακτίνα σύγκλισης R βρίσκεται εφαρμόζοντας

- **είτε** το **κριτήριο του λόγου**

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x - x_0| < 1 \ \rightsquigarrow \ |x - x_0| < R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

- **είτε** το **κριτήριο της ρίζας**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\, |x - x_0| < 1 \ \rightsquigarrow \ |x - x_0| < R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $R = 1$ και $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$, $R = \infty$

Πρόταση 2

Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει $\boxed{\text{φραγμένη παράγωγο κάθε τάξης}}$ $f^{(n)}(x)$ για $x \in (a,\, b)$ και $\left|f^{(n)}(x)\right| < M \Rightarrow$

$$x,\, x_0 \in (a,\, b) \;\rightsquigarrow\; \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!}\, f^{(k)}(x_0)}$$

$\square$ *Απόδ*: Χρησιμοποιούμε το υπόλοιπο Lagrange, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} R_n(x) =& \frac{(x-\xi)^n}{n!}\, f^{(n)}(\xi) = \\ =& f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!}\, f^{(k)}(x_0) \end{aligned}$$

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-\xi|^n}{n!}$$

$$a_n = \frac{|x-\xi|^n}{n!} \;\rightsquigarrow\; \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x-\xi|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Επομένως $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \rightsquigarrow R_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \rightsquigarrow$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

$\square$

Θεώρημα FERMAT

x_0 Τοπικό Ακρότατο (Local Extremum)

$$\boxed{\exists\, \delta \;:\; |x - x_0| < \delta \;\rightsquigarrow\; f(x) - f(x_0) \text{ έχει σταθερό πρόσημο}}$$

$\swarrow$ $\searrow$

Τοπικό Μέγιστο (Local Maximum)	Τοπικό Ελάχιστο (Local Minimum)
$\exists\, \delta : \|x - x_0\| < \delta \;\Downarrow\; f(x) \leq f(x_0)$	$\exists\, \delta : \|x - x_0\| < \delta \;\Downarrow\; f(x) \geq f(x_0)$

ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

$$\left.\begin{array}{l} \triangleright\ f(x) \text{ συνεχής γύρω από το } x_0 \\ \triangleright\ \text{Υπάρχει το } f'(x_0) \\ \triangleright\ \text{Το } x_0 \text{ είναι τοπικό ακρότατο} \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad f'(x_0) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

- ▷ $f(x)$ συνεχής γύρω από το x_0
- ▷ Υπάρχει το $f'(x_0)$ $\qquad \Rightarrow f'(x_0) = 0$
- ▷ Το x_0 είναι τοπικό ακρότατο

Απόδειξη.

$$\exists\, f'(x_0) \;\Leftrightarrow\; g(x,x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0)$$

$$\boxed{\left\{\text{Αν } \; f'(x_0) > 0\right\}} \Rightarrow \epsilon = \frac{f'(x_0)}{2}\; \exists\, \delta \;:$$

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \;\rightsquigarrow\; 0 < \frac{f'(x_0)}{2} < g(x,x_0)$$

$$\left.\begin{array}{r} 0 < g(x,x_0) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ x < x_0 \end{array}\right\} \rightsquigarrow\; f(x) - f(x_0) < 0$$

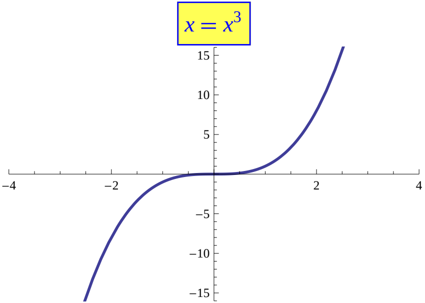
$$\left.\begin{array}{r} 0 < g(x,x_0) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ x > x_0 \end{array}\right\} \rightsquigarrow\; f(x) - f(x_0) > 0$$

$\boxed{\text{Το } f(x_0) \text{ δεν είναι ακρότατο}}$.

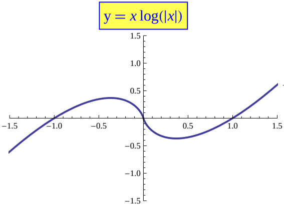
Το ίδιο συμβαίνει αν $f'(x_0) <)$. Αρα $f'(x_0) = 0$. $\square$

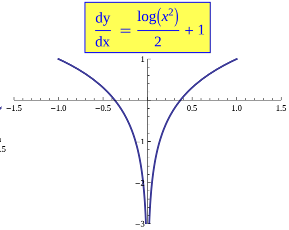
Παράδειγμα 8

$f'(0) = 0$ αλλά το $x_0 = 0$ δεν είναι extremum



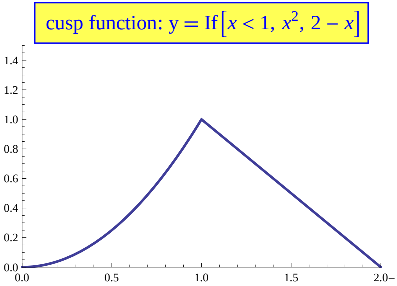
$f'(x_0)$ δεν ορίζεται, όχι extremum

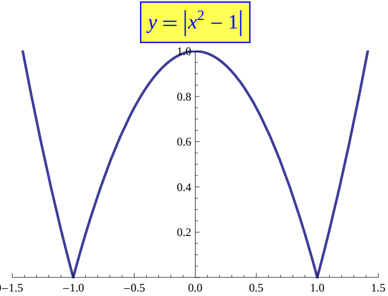




Παράδειγμα 9

$f'(x_0)$ δεν ορίζεται, υπάρχει extremum





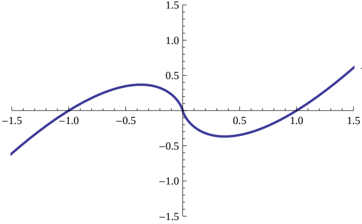
Κρίσιμα σημεία

x_0 κρίσιμο σημείο (critical point) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ $\boxed{\text{ή}}$ $f'(x_0)$ <u>δεν</u> υπάρχει

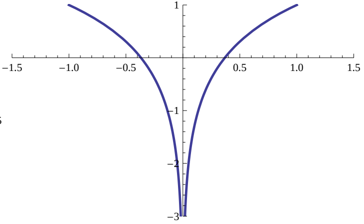
$$x_0 \text{ τοπικό μέγιστο}$$
$$\Downarrow$$
$$x_0 \text{ κρίσιμο σημείο}$$

$\Rightarrow$ SOS Τα κρίσιμα σημεία $\boxed{\boxed{\text{δεν}}}$ ειναι πάντα τοπικά ακρότατα

$\boxed{y = x\log(|x|)}$



$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\log(x^2)}{2} + 1}$



ΠΡΟΤΑΣΗ "νιοστής παραγώγου"

ΠΡΟΤΑΣΗ

$f(x)$ συνεχής στο $[a,\, b]$
$\forall\, x \in (a,\, x_0) \bigcup (x_0,\, b) \ \rightsquigarrow\ \exists\, f'(x)$

$$\begin{aligned} \exists\, \delta > 0 \ : x \in (x_0 - \delta,\, x_0) \ &\rightsquigarrow\ f'(x) > 0 \\ x \in (x_0,\, x_0 + \delta) \ &\rightsquigarrow\ f'(x) < 0 \end{aligned}$$

τότε το x_0 είναι τοπικό μέγιστο

ΠΡΟΤΑΣΗ "νιοστής παραγώγου"

$f(x)$ συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[a,\, b]$
$x \in [a,\, b] \ \rightsquigarrow\ \exists\, f^{(n-1)}(x)$ και είναι συνεχής
$x \in (a,\, b) \ \rightsquigarrow\ \exists\, f^{(n)}(x)$
$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ και $f^{(n)}(x)$ συνεχής γύρω από το x_0, τότε αν n άρτιος το x_0 είναι τοπικό μέγιστο

- Αν $f^{(n)}(x_0) > 0$ τοπικό ελάχιστο
- Αν $f^{(n)}(x_0) < 0$ τοπικό μέγιστο

ΠΡΟΤΑΣΗ "νιοστής παραγώγου" (Απόδειξη)

ΠΡΟΤΑΣΗ "νιοστής παραγώγου"

$f(x)$ συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[a,\, b]$
$x \in [a,\, b] \rightsquigarrow \exists\, f^{(n-1)}(x)$ και είναι συνεχής
$x \in (a,\, b) \rightsquigarrow \exists\, f^{(n)}(x)$
$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ και $f^{(n)}(x)$ συνεχής γύρω από το x_0, τότε αν n άρτιος το x_0 είναι τοπικό μέγιστο

- Αν $f^{(n)}(x_0) > 0$ τοπικό ελάχιστο
- Αν $f^{(n)}(x_0) < 0$ τοπικό μέγιστο

Απόδειξη.

Με τις προϋποθέσεις ισχύει το ανάπτυγμα Taylor με υπόλοιπο Lagrange

$$\begin{aligned} f(x) = &\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x) = \\ = &\; f(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad \xi \in (a,\, b) \end{aligned}$$

$n = 2k$. Αν $f^{(n)}(\xi) > 0$ τότε $f(x) - f(x_0) \geq 0$ άρα το x_0 τοπικό minimum. □

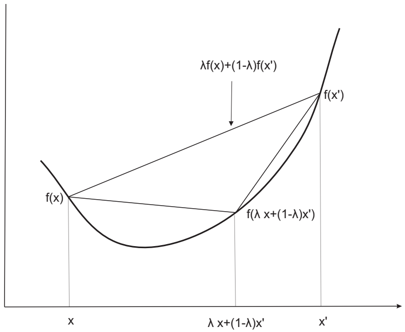
Κυρτή συνάρτηση

Ορισμός κυρτής συνάρτησης

$f(x)$ $\boxed{\text{κυρτή}}$ (convex)$\Leftrightarrow$

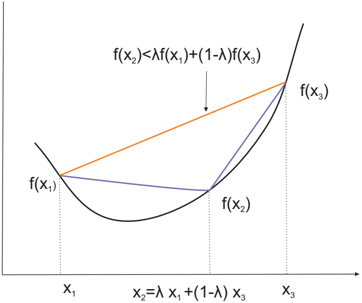
$$a \leq x < x' \leq b \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \ \rightsquigarrow$$

$$\boxed{f\left(\lambda x + (1-\lambda)x'\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')}$$



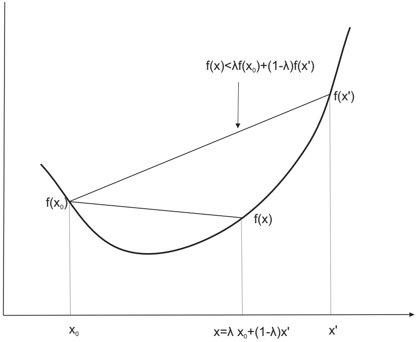
$\boxed{f(x) \text{ κυρτή}} \Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} &x_1 < x_2 < x_3 \ \rightsquigarrow \\ &\qquad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \\ &\quad \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \end{aligned}}$$



Προτάσεις (Κυρτή Συνάρτηση) 2

$f(x)$ κυρτή $\Leftrightarrow g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι αύξουσα συνάρτηση.



Πρ:

$f(x)$ κυρτή $\Rightarrow f'_-(x) \leq f'_+(x)$

Πρ:

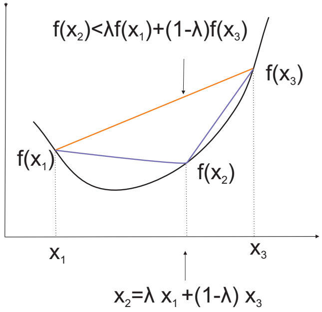
$f(x)$ κυρτή $\Leftrightarrow f'(x)$ αύξουσα $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$

Προτάσεις (Κυρτή Συνάρτηση) 3

Πρ:

$\boxed{f(x) \text{ κυρτή}} \Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} &x_1 < x_2 < x_3 \rightsquigarrow \\ &\qquad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \\ &\quad \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \end{aligned}}$$



$f(x)$ κυρτή $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ αύξουσα $\Leftrightarrow$ $f''(x) \ge 0$

Προτάσεις (Κυρτή Συνάρτηση) 4

$f(x)$ κυρτή $\Rightarrow$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq$$
$$\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

$f(x)$ κυρτή $a_k > 0 \Rightarrow$

$$f\left(\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right) \leq$$
$$\leq \frac{a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_n f(x_n)}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

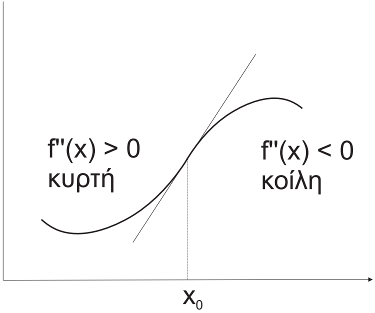
$f(x) = \mathrm{e}^x \;\rightsquigarrow\; f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ κυρτή

$a_k > 0 \Rightarrow$

$$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}$$

Σημείο Καμπής (1/2)

Σημείο καμπής (turning point) $\Leftrightarrow \quad f''(x_0 - h) \cdot f''(x_0 + h) < 0$



x_0 σημείο καμπής $\exists\, f''(x_0)$ $\Rightarrow \boxed{f''(x_0) = 0}$

(Σημ. το αντίστροφο δεν ισχύει)

Σημείο Καμπής (2/2)

Σημείο καμπής

$$\boxed{\begin{array}{c} f^{(n)}(x) \text{ συνεχής στο } (a,\, b) \\ f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \cdots = \\ \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0 \\ n \text{ περιττός} \end{array}} \Rightarrow \boxed{x_0 \text{ σημείο καμπής}}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- *Απειροστικός Λογισμός*-Τόμος Α΄ Σ.Κ. Ντούγιας, LEADER BOOKS, 2003
- *Διαφορικός Ολοκληρωτικός Λογισμός*, M. Spivak , Παν. Εκδ. Κρήτης,
- *Απειροστικός Λογισμός*, THOMAS-FINLEY, Παν. Εκδ. Κρήτης
- Μαθήματα στο δίκτυο: Μαθήματα Μ. Παπαδημητράκη (Παν. Κρήτης) http://www.math.uoc.gr/~papadim/Apeirostikos1.pdf
- Μαθήματα στο δίκτυο: Μαθήματα Α. Γιαννόπολου (Παν. Αθηνών) http://users.uoa.gr/~apgiannop
- Διαφάνειες: http://users.auth.gr/~daskalo

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Δασκαλογιάννης Κωνσταντίνος. "Λογισμός Ι. Ενότητα 4: Παράγωγοι". Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
http://eclass.auth.gr/courses/OCRS434/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης