ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης

Ενότητα 2: Το Θεώρημα Καραθεοδωρή και τα μέτρα Borel

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Μέτρο Lebesgue και μέτρα Borel επί του $\mathbb{R}$.
   i. Τα προ-μέτρα και η επέκτασή τους σε μέτρα.
   ii. Μέτρο Lebesgue και μέτρα Borel επί του $\mathbb{R}$.
   iii. Σύνολα μέτρου μηδέν.

Σκοποί ενότητας

- Αποδεικνύεται το Θεώρημα Καραθεοδωρή το οποίο μας δίνει μία γενική μέθοδο κατασκευής μέτρων. Μας επιτρέπει π.χ. να κατασκευάσουμε το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$, καθώς και τα μέτρα Lebesgue-Stieltjes. Επειδή όλα τα ως άνω μέτρα ορίζονται επί της σ-άλγεβρας Borel του $\mathbb{R}$, λέγονται και μέτρα Borel.

Εισαγωγή (1)

Το Θεώρημα του Καραθεοδωρή μας δίνει μία γενική μέθοδο κατασκευής μέτρων. Μας επιτρέπει π.χ. να κατασκευάσουμε το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$, καθώς και τα μέτρα Lebesgue-Stieltjes. Επειδή όλα τα ως άνω μέτρα ορίζονται επί της σ-άλγεβρας Borel του $\mathbb{R}$, λέγονται και μέτρα Borel.

Ας ξεκινήσουμε κάπως διαισθητικά. Αν θέλουμε να μετρήσουμε το εμβαδόν ενός επίπεδου χωρίου προχωρούμε με την ακόλουθη προσεγγιστική διαδικασία:

Μοιράζουμε το επίπεδο σε μικρά τετράγωνα και αθροίζουμε το εμβαδόν των τετραγώνων που τέμνουν το χωρίο μας. Όσο πιο μικρά είναι τα τετράγωνα, τόσο η προσέγγιση μας είναι καλύτερη αφού η κάλυψη του χωρίου γίνεται όλο και μικρότερη.

Εισαγωγή (2)

Προφανώς, στο ίδιο περίπου αποτέλεσμα θα φτάσουμε αν αντί των τετραγώνων χρησιμοποιηθούν δίσκοι.

Την διαισθητική αυτή ιδέα λαμβάνουμε υπόψην μας για να ορίσουμε τα εξωτερικά μέτρα, που είναι το πρώτο στάδιο στην κατασκευή αφηρημένων μέτρων.

Εξωτερικό μέτρο

Ορισμός: Έστω $\mathbb{X}$ ένα σύνολο και μ^* μια θετική συνάρτηση επί του $P(\mathbb{X})$. Το μ^* λέγεται **εξωτερικό μέτρο** αν ικανοποιεί

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. Το μ^* είναι αύξουσα συνάρτηση δηλαδή

   $$\mu^*(\mathrm{A}) \le \mu^*(\mathrm{B}) \text{ για κάθε } A, B \in P(\mathbb{X}) \text{ τ.ω. } \mathrm{A} \subset \mathrm{B}.$$

3. Το μ^* είναι αριθμήσιμα υποαθροιστικό, δηλαδή για κάθε ακολουθία (A_j) συνόλων του $\mathbb{X}$, ισχύει

   $$\mu^*\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \le \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(A_j)\,.$$

Η πρόταση που ακολουθεί δίνει τη μέθοδο κατασκευής εξωτερικών μέτρων.

Πρόταση 1

Πρόταση 1: Έστω $\mathcal{E}$ μια οικογένεια συνόλων του $\mathbb{X}$ που περιέχει το $\mathbb{X}$ και το κενό σύνολο (και χωρίς καμμία άλλη δομή) και ν θετική συνάρτηση επί της $\mathcal{E}$:

$$\nu: \mathcal{E} \to [0, +\infty] \text{ τ.ω } \nu(\emptyset) = 0.$$

Για κάθε $A \in P(\mathbb{X})$, θέτουμε

$$\mu^*(\mathrm{A}) = inf \sum_{j \in N} \nu\left(A_j\right),$$

για όλες τις αριθμήσιμες καλύψεις $\left(A_j\right)$ του A από στοιχεία του $\mathcal{E}$. Η μ^* είναι ένα εξωτερικό μέτρο επί του $P(\mathbb{X})$ και λέγεται εξωτερικό μέτρο που αντιστοιχεί στην ν.

$\boldsymbol{\mu}^*$ −μετρήσιμο

Από την Πρόταση 1 διαπιστώνουμε πως αν καταφέρουμε να προσδιορίσουμε μια σ-άλγεβρα όπου το εξωτερικό μέτρο είναι σ-αθροιστικό, τότε θα έχουμε ένα γνήσιο μέτρο.

Την εργολαβία αυτή την έφερε εις πέρας ο Καραθεοδωρή.

Ορισμός: Έστω μ^* ένα εξωτερικό μέτρο επί του συνόλου $\mathbb{X}$. Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{X}$ λέγεται $\boldsymbol{\mu}^*$ **−μετρήσιμο** αν για κάθε $E \in P(\mathbb{X})$,

$$\mu^*(\mathrm{E}) = \mu^*(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}) + \mu^*(\mathrm{E} \cap \mathrm{A}^c).$$

Θεώρημα 1 (Καραθεοδωρή)

Θεώρημα 1: Αν $\boldsymbol{\mu}^*$ είναι ένα εξωτερικό μέτρο επί του $\mathbb{X}$, τότε

i. Η κλάση $\mathcal{A}$ των $\boldsymbol{\mu}^*$ −**μετρήσιμων** συνόλων αποτελούν μια σ-άλγεβρα.

ii. Ο περιορισμός του $\boldsymbol{\mu}^*$ επι της $\mathcal{A}$ είναι σ-αθροιστικό δηλαδή το $\mu^*_{|\mathrm{A}}$ είναι μέτρο.

Εξωτερικά μέτρα (1)

Η κατασκευή του μέτρου Lebesgue διαφέρει από την κατασκευή των αφηρημένων μέτρων που μας έδωσε ο Καραθεοδωρή.

Εδώ θέλουμε ένα μέτρο που πληρεί ορισμένες προδιαγραφές.

Αν το πούμε μ, τότε θέλουμε:

$$\mu(a, b) = b - a, \text{ για κάθε } a, b \in \mathbb{R}.$$

Άρα το γνωρίζουμε πάνω σε όλα τα διαστήματα και προφανώς, το γνωρίζουμε και στις πεπερασμένες ενώσεις τους.

Όμως, η κλάση $\mathcal{F}$ των πεπερασμένων ενώσεων διαστημάτων είναι μια άλγεβρα, αφού είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα και τις πεπερασμένες ενώσεις.

Εξωτερικά μέτρα (2)

Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι το μέτρο του Lebesgue ορίζεται αρχικά επί της άλγεβρας $\mathcal{F}$.

Το σοβαρό πρόβλημα λοιπόν που καλούμεθα να λύσουμε είναι η επέκταση του μ, και μάλιστα κατά τρόπο μοναδικό στην σ-άλγεβρα του Borel που, όπως είδαμε, παράγεται από την $\mathcal{F}$.

Το πρώτο βήμα που πρέπει να κάνουμε είναι να δείξουμε ότι αν τα $I_j \in \mathcal{F}$, είναι ξένα μεταξύ τους και $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j \in \mathcal{F}$, τότε έχουμε την αριθμήσιμη αθροιστικότητα:

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(I_j)\,.$$

Εξωτερικά μέτρα (3)

Ο ορισμός που ακολουθεί εισάγει τις αριθμήσιμα αθροιστικές συναρτήσεις επί αλγεβρών.

Ορισμός: Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα του $\mathbb{X}$. Μία θετική συνάρτηση

$$\mu: \mathcal{A} \to [0, +\infty]$$

επί της άλγεβρας $\mathcal{A}$ λέγεται **προ-μέτρο** αν ικανοποιεί

i. $\mu^*(\emptyset) = 0.$

ii. Αν τα $\mathrm{A}_j \in \mathcal{A}$, είναι ξένα μεταξύ τους και $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$, τότε το μ είναι αριθμήσιμα αθροιστική

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j). \qquad (1)$$

Εξωτερικά μέτρα (4)

Το ζητούμενο λοιπόν είναι να επεκτείνουμε, κατά μοναδικό τρόπο, ένα προ-μέτρο που ορίζεται στην άλγεβρα $\mathcal{A}$ σε ένα μέτρο επί της σ-άλγεβρας που παράγει η $\mathcal{A}$. Για να το πετύχουμε, θα περάσουμε από τα εξωτερικά μέτρα και τον Καραθεοδωρή.

Σε ένα προ-μέτρο μ, αντιστοιχούμε ένα εξωτερικό μέτρο επί της $P(\mathbb{X})$ με τον γνωστό μας πια τρόπο:

Για κάθε $A \in \mathcal{A}$, θέτουμε

$$\mu^*(\mathrm{A}) = inf \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu\left(A_j\right),$$

για όλες τις ακολουθίες $\left(A_j\right)$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ που η ένωσή τους καλύπτει το Α.

Εξωτερικά μέτρα (5)

Πρόταση 2: Έστω μ ένα προ-μέτρο επί της άλγεβρας $\mathcal{A}$ και μ^* το εξωτερικό μέτρο που του αντιστοιχεί. Τότε,

i. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu^*(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A}).$$

ii. Κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι $\boldsymbol{\mu}^*$ **−μετρήσιμο.**

Ας δούμε τι έχουμε πετύχει.

Από το θεώρημα Καραθεοδωρή έχουμε ότι η κλάση $\mathcal{M}'$ των μ^* −μετρήσιμων συνόλων είναι σ-άλγεβρα και ότι το εξωτερικό μέτρο μ^* είναι μέτρο επί της $\mathcal{M}'$.

Τώρα από το (ii) της Πρότασης 2, η $\mathcal{M}'$ περιέχει την $\mathcal{A}$ και συνεπώς την $\mathcal{M}$.

Εξωτερικά μέτρα (6)

Αν λοιπόν θέσουμε

$$\bar{\mu} = \mu^*_{|\mathcal{M}},$$

τότε προφανώς

$$\bar{\mu}(\mathrm{A}) = \mu^*(\mathrm{A}),$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$, και το $\bar{\mu}$ είναι η ζητούμενη επέκταση του προμέτρου μ σε μέτρο.

Επέκταση προ-μέτρων σε μέτρα (1)

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι μία εφαρμογή του Θεωρήματος του Καραθεοδωρή και μας επιτρέπει να επεκτείνουμε, κατά μοναδικό τρόπο, τα προ-μέτρα που γνωρίζουμε μόνο πάνω στην άλγεβρα $\mathcal{A}$, σε γνήσια πλέον μέτρα ορισμένα πάνω στην σ-άλγεβρα που παράγεται από την άλγεβρα $\mathcal{A}$.

Θυμίζουμε πρώτα ότι ένα μέτρο μ, που ορίζεται πάνω σε μία σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ λέγεται σ-πεπερασμένο αν υπάρχει μία ακολουθία $\left(A_j\right)$ στοιχείων της $\mathcal{M}$ τ.ω.

$$\mu\left(A_j\right) < \infty, \text{ και } \mathbb{X} = \bigcup_j A_j \,.$$

Ανάλογος είναι ο ορισμός ενός σ-πεπερασμένου προ-μέτρου επί της άλγεβρας $\mathcal{A}$.

Επέκταση προ-μέτρων σε μέτρα (2)

Θεώρημα 2: Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα του $\mathbb{X}$ και μ ένα σ-πεπερασμένο προμέτρο επι της $\mathcal{A}$. Αν $\mathcal{M}$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{A}$, τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο $\bar{\mu}$ επί της $\mathcal{M}$ τέτοιο ώστε

$$\bar{\mu}(\mathrm{A}) = \mu^*(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A}), \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A},$$

όπου μ^* είναι το εξωτερικό μέτρο που αντιστοιχεί στο μ.

Μέτρα Borel – Μέτρο Lebesgue (1)

Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε μέτρα επί της σ-άλγεβρας Borel της ευθείας, που για αυτό τον λόγο λέγονται και μέτρα Borel. Το σημαντικότερο είναι το μέτρο Lebesgue.

Ας είναι

$$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

μία αύξουσα συνάρτηση. Είναι γνωστό ότι η φ έχει δεξιά και αριστερά όρια, που μπορεί να μην είναι ίδια.

Αν $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha +)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε λέμε πως η φ είναι συνεχής από δεξιά.

Το θεώρημα που ακολουθεί μας δίνει τα μέτρα Borel, τα γνωστά και ως Lebesgue-Stieltjes.

Μέτρα Borel – Μέτρο Lebesgue (2)

Θεώρημα 3 (μέτρα Borel)

i. Αν $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία αύξουσα και συνεχής από τα δεξιά συνάρτηση τότε υπάρχει ένα **μοναδικό** μέτρο μ_φ επί της σ-άλγεβρας Borel τ.ω.

$$\mu_\varphi((a,b]) = \varphi(b) - \varphi(a) \text{ για κάθε } a, b \in \mathbb{R}.$$

ii. Αν μ_φ είναι ένα άλλο τέτοιο μέτρο, που αντιστοιχεί στην ψ, τότε

$$\mu_\varphi = \mu_\psi, \text{ ανν } \varphi - \psi = \text{σταθερά}.$$

iii. Αντιστρόφως, έστω μ ένα μέτρο επί της $B_\mathbb{R}$, που είναι πεπερασμένο επί των φραγμένων συνόλων της $B_\mathbb{R}$. Αν θέσουμε

$$\varphi(x) = \mu((0,x]) \text{ για } x > 0,\ \varphi(0) = 0$$

Μέτρα Borel – Μέτρο Lebesgue (3)

και

$$\varphi(x) = -\mu((x, 0])\text{ για } x < 0,$$

τότε η φ είναι αύξουσα, συνεχής από τα δεξιά και

$$\mu_\varphi = \mu.$$

Η φ λέγεται **συνάρτηση κατανομής** του μέτρου μ.

Μέτρο Lebesgue (1)

Αν πάρουμε στο ως άνω θεώρημα

$$\varphi(x) = x,$$

τότε το μ_φ (που συμβολίζουμε απλά μ) λέγεται μέτρο του Lebesgue και ικανοποιεί

i. $\mu((a, b]) = b - a$, για κάθε $\mathrm{a}, b \in \mathbb{R}$.

ii. $\mu(\mathrm{A} + \mathrm{b}) = \mu(\mathrm{A})$, για κάθε $A \in B_{\mathbb{R}}$ και $b \in \mathbb{R}$.

iii. $\mu(rA) = r\mu(\mathrm{A})$, για κάθε $A \in B_{\mathbb{R}}$ και $r > 0$.

Μέτρο Lebesgue (2)

Ας ονομάσουμε με $\mathcal{F}$ την κλάση των πεπερασμένων ενώσεων ξένων μεταξύ τους διαστημάτων του τύπου $(a, b], (a, \infty)$. Η $\mathcal{F}$ περιέχει και το $\emptyset$ και είναι άλγεβρα. Από την Πρόταση 1 (Ενότητα 1) η $\mathcal{F}$ παράγει την σ-άλγεβρα του Borel.

Στην Πρόταση που ακολουθεί ορίζουμε την μ_φ ως προ-μέτρο επί των συνόλων της $\mathcal{F}$.

Πρόταση 3: Έστω $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια αύξουσα και συνεχής από τα δεξιά συνάρτηση. Αν $\mathrm{A} = U_1^n \left(a_j, b_j\right] \in \mathcal{F}$ και

$$\mu(A) = \sum_{1 \leq j \leq n} \varphi\left(b_j\right) - \varphi\left(a_j\right), \mu(\emptyset) = 0,$$

τότε το μ είναι ένα προ-μέτρο επί της $\mathcal{F}$.

Μέτρα Borel και Μέτρο Lebesgue

Θεώρημα 4: Αν μ είναι μέτρο Borel, τότε για κάθε $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$$\mu(\mathrm{A}) = \inf\{\mu(U) \colon U \supset A \; \kappa\alpha\iota \; U \; \alpha\nu o\iota\kappa\tau \acute{o}\}$$
$$= \sup\{\mu(\mathrm{K}) \colon \mathrm{K} \subset \mathrm{A} \text{ και } \mathrm{K} \text{ συμπαγές}\}.$$

Παρατήρηση

Το Θεώρημα 4 μας λέει πως τα σύνολα Borel του $\mathbb{R}$ δεν είναι πολύ πολύπλοκα αφού το μέτρο τους προσεγγίζεται όσο θέλουμε από τα ανοικτά σύνολα που τα καλύπτουν ή από τα συμπαγή που τα περικλείουν.

Σύνολα μέτρου μηδέν (1)

Ας ξεκινήσουμε με το μέτρο Lebesgue. Γράφοντας

$$\{x_0\} = \cap_n \left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right],$$

από το (4) της Πρότασης 2 (Ενότητα 1), έχουμε ότι

$$\mu(\{x_0\}) = \lim_{n\to\infty} \mu\left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Έτσι όλα τα μονοσύνολα του $\mathbb{R}$ έχουν μέτρο (Lebesgue) μηδέν. Από την σ-αθροιστικότητα του μέτρου, συμπεραίνουμε πως όλα τα αριθμήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ έχουν μέτρο μηδέν, π.χ. τα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$, και ακόμα και το $\mathbb{Q}$ που είναι παντού πυκνό στον $\mathbb{R}$. Θα δούμε αμέσως παρακάτω πως υπάρχουν και υπέρ-αριθμήσιμα σύνολα που έχουν μέτρο μηδέν.

Σύνολα μέτρου μηδέν (2)

Το κλασικό παράδειγμα είναι το σύνολο του Cantor.

Για το μέτρο Lebesgue, τα σύνολα αυτά δεν παίζουν κανένα ρόλο. Είναι σαν να μην υπάρχουν, αφού το μέτρο δεν τα 'βλέπει' και για αυτό δεν τα φορτώνει. Τα δίνει μέτρο μηδέν.

Γενικά όταν έχουμε ένα μετρητό χώρο $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$, ένα σύνολο $A \subset \mathbb{X}$ λέγεται σύνολο μ-μέτρου μηδέν αν $\mu(\mathrm{A}) = 0$.

Από την υπό-αθροιστικότητα έχουμε πως αν A είναι μ-μέτρου μηδέν, τότε τα υποσύνολα B του A, που ανήκουν στην $\mathcal{M}$, είναι και αυτά μέτρου μηδέν.

Όμως, όλα τα υποσύνολα του A δεν ανήκουν πάντα στην $\mathcal{M}$, παρόλο που για το μ, το A είναι αμελητέο.

Σύνολα μέτρου μηδέν (3)

Ένας μετρητός χώρος $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ λέγεται **πλήρης** αν η σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ περιέχει όλα τα μηδενοσύνολα της μ.

Για να αποφύγουμε τις ασάφειες που προαναφέραμε, όταν ο μετρητός χώρος δεν είναι πλήρης, τότε τον πληρούμε θεωρώντας την

$$\overline{\mathcal{M}} = \{A \cup N, A \in \mathcal{M} \; \kappa\alpha\iota \; \mu(N) = 0\}.$$

Σύνολα μέτρου μηδέν (4)

Θεώρημα 5: Έστω $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ μετρητός χώρος. Τότε

1. Η $\bar{\mathcal{M}}$ είναι σ-άλγεβρα.
2. Η
$$\bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A),$$
επεκτείνει την μ επί της $\bar{\mathcal{M}}$ κατά τρόπο μοναδικό και
3. Ο χώρος $(\mathbb{X}, \bar{\mathcal{M}}, \bar{\mu})$ είναι πλήρης.

Αν ο μετρητός χώρος $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ είναι πλήρης, και
$$f, g\colon \mathbb{X} \to \mathbb{C},$$
λέμε πως είναι ίσες μ −σχεδόν παντού αν διαφέρουν επί ενός συνόλου μέτρου μηδέν:
$$\mu(\{x \in \mathbb{X}: f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Σύνολα μέτρου μηδέν (5)

Γράφουμε μ −σ.π. ή σ.π.. Ομοίως, λέμε πως η ακολουθία των συναρτήσεων

$$f_n\colon \mathbb{X} \to \mathbb{C},$$

τείνει στην f μ −σ.π., αν

$$\mu(\{x \in \mathbb{X}\colon\ f_n(x) \nrightarrow f(x)\}) = 0.$$

Γενικά λέμε πως μια ιδιότητα P ισχύει μ −σ.π. αν τα x για τα οποία δεν ισχύει έχουν μέτρο μηδέν.

Σύνολο Cantor (1)

Θα τελειώσουμε με το παράδειγμα του συνόλου του Cantor, που έδωσε ψωμί σε κόσμο και κοσμάκι.

Παράδειγμα: Το σύνολο C του Cantor είναι υποσύνολο του διαστήματος [0,1] και κατασκευάζεται ως εξής:

1. Κόβουμε το [0,1] σε τρία ίσα κομμάτια και αφαιρούμε το μεσαίο τρίτο, δηλαδή το $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.
2. Κόβουμε τα εναπομείναντα διαστήματα $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ και $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ πάλι σε τρία ίσα κομμάτια και αφαιρούμε το μεσαίο τρίτο, δηλαδή τα $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$ και $\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$.
3. Κάνουμε το ίδιο στα εναπομείναντα διαστήματα και ούτω καθ’εξής.

Σύνολο Cantor (2)

Το C έχει μέτρο Lebesgue 0, αφού κατασκευάζοντάς το, αφαιρέσαμε από το [0,1] ένα διάστημα μήκους $\frac{1}{3}$, 2 διαστήματα μήκους $\frac{1}{9}$, κ.ο.κ.

Άρα

$$\mu(C) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \cdots = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{3^{j+1}} = 1 - 1 = 0$$

Όμως μπορούμε να δείξουμε ότι το C έχει την δύναμη του συνεχούς, δηλαδή

$$card(C) = card[0,1] = c.$$

Σύνολο Cantor (3)

Πράγματι, κάθε $x \in [0,1]$ έχει ένα ανάπτυγμα

$$x = \sum_1^\infty \frac{a_i}{3^i}, \mu\varepsilon\ a_i = 0{,}1 \text{ ή } 2.$$

Το ανάπτυγμα είναι μοναδικό, εκτός αν

$$x = \frac{p}{3^k},$$

για κάποιους φυσικούς p και k.

Σε αυτή την περίπτωση το x έχει δύο αναπτύγματα.

Ένα με όλα τα $a_i = 0$ για $i > k$, και ένα με όλα τα $a_i = 2$ για $i > k$. Υποθέτοντας ότι το p δεν διαιρείται με το 3, το ένα από αυτά τα αναπτύγματα θα έχει $a_k = 1$ και το άλλο $a_k = 0$ ή 2.

Αποφασίζουμε να διαλέξουμε το ανάπτυγμα με $a_k = 0$ ή 2.

Σύνολο Cantor (4)

Με αυτή την επιλογή, έχουμε ότι

- $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ $\alpha\nu\nu$ $\alpha_1 = 1$,
- $x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right] \cup \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ $\alpha\nu\nu$ $\alpha_1 \neq 1$ $\kappa\alpha\iota$ $\alpha_2 = 1, \kappa.\, o.\, \kappa.$

Βλέπουμε λοιπόν πως

$$x \in \mathbb{C}\ \alpha\nu\nu\ \alpha_i \neq 1 \text{ για κάθε } i,$$

και επομένως, αν $x \in \mathbb{C}$, τότε

$$x = \sum_1^\infty \frac{a_i}{3^i}, \mu\varepsilon\ a_i = 0 \text{ ή } 2.$$

Θεωρούμε την ακόλουθη συνάρτηση, που είναι γνωστή και ως συνάρτηση Cantor:

Σύνολο Cantor (5)

$$\mathbb{C} \xrightarrow{f} [0,1]$$

με

$$f(x) = f\left(\sum_1^\infty \frac{a_i}{3^i}\right) = \sum_1^\infty \frac{b_i}{2^i}, \text{ όπου } b_i = \frac{a_i}{2} = 0 \text{ ή } 1. \qquad (2)$$

Όμως, κάθε στοιχείο του [0,1] έχει δυαδικό ανάπτυγμα όπως στην (2), και συνεπώς η f είναι επί.

Βιβλιογραφία

1. G.B. Folland, Real Analysis, Modern techniques and their applications, John Wiley and sons, 1984, New York.
2. P. Malliavin, Integration et Probabilites, Analyse de Fourier et Analyse Spectrale, Masson, 1982, Paris.
3. Μιχ. Γ. Μαριάς, Μαθήματα Αρμονικής ανάλυσης, Εκδόσεις ζήτη, 2001, Θεσσαλονίκη.
4. W.Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1970, New York.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης. Ενότητα 2: Το Θεώρημα Καραθεοδωρή και τα μέτρα Borel». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS436/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης