ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης

Ενότητα 5: Οι χώροι L^p

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Οι ανισότητες Hölder και Minkowski.
2. Ορισμός και ιδιότητες των L^p.
3. Προσέγγιση των συναρτήσεων του L^p.

Σκοποί ενότητας

- Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι χώροι L^p και οι ιδιότητές τους.

Οι χώροι L^p

Όπως ήδη είπαμε, οι χώροι $L^p(\mathbb{R}^n)$ ή απλά L^p, που ορίσαμε στην Εισαγωγή, είναι οι χώροι που προτιμούμε στην Αρμονική ανάλυση.

Ξεκινούμε με δύο κλασικές και πολύ χρήσιμες ανισότητες.

Αν $p, q \in [1, \infty]$ και ικανοποιούν

$$p + q = pq, \qquad \eta \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

τότε λέγονται **συζυγείς**.

Δύο ενδιαφέροντα ζευγάρια είναι τα $p = q = 2$ και $p = 1, q = \infty$.

Ανισότητα Hölder(1)

Θεώρημα 1: (Ανισότητα Hölder) Αν $p, q \in [1, \infty]$, συζυγείς και $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, τότε ισχύει η ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, (1)$$

Απόδειξη: Κοιτάζουμε πρώτα την περίπτωση $p = \infty$ και $q = 1$. Έχουμε

$$|f(x)g(x)| \leq |g(x)| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = |g(x)| \|f\|_\infty,$$

και ολοκληρώνοντας έχω το αποτέλεσμα:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx = \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

Ανισότητα Hölder (2)

Η απόδειξη της Hölder στην περίπτωση $p, q \in (1, \infty)$, στηρίζεται στην ακόλουθη στοιχειώδη ανισότητα: Αν $a \geq 0$ και $b \geq 0$, τότε

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, (2)$$

Για την απόδειξη της (2), θεωρούμε την

$$H(t) = \frac{a^p}{p} + \frac{t^q}{q} - at$$

και αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{H}(t) \geq 0$, για κάθε $a \geq 0$ και $t \geq 0$. Έχουμε

$$H'(t) = t^{q-1} - a = 0, αν\ t = a^{\frac{1}{q-1}}.$$

Άρα η H φθίνει από το 0 μέχρι το $a^{\frac{1}{q-1}}$ και αυξάνει από το $a^{\frac{1}{q-1}}$ μέχρι το ∞.

Ανισότητα Hölder (3)

Όμως $\frac{q}{q-1} = p$, και επομένως

$$H(t) \geq H\left(a^{\frac{1}{q-1}}\right) = \frac{a^p}{p} + \frac{a^{\frac{q}{q-1}}}{q} - a a^{\frac{1}{q-1}}$$

$$= \frac{a^p}{p} + \frac{a^p}{q} - a^{\frac{q-1}{q-1}} a^{\frac{1}{q-1}} = a^p \left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right\} - a^p = 0.$$

Για την απόδειξη της (1) μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$0 < \|f\|_p, \|g\|_q < \infty,$$

αλλιώς είναι προφανής. Θέτοντας

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \qquad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q},$$

και ολοκληρώνοντας, από την (2) έχουμε την (1).

Παρατήρηση (1)

Αν $p = q = 2$, τότε η ανισότητα Hölder είναι η γνωστή μας ανισότητα των Cauchy-Schwarz.

Μία δεύτερη ανισότητα που χρειαζόμαστε (για να δείξουμε π.χ. ότι η $\| \quad \|_p$ είναι νόρμα) είναι η ανισότητα Minkowski.

Ανισότητα Minkowski (1)

Θεώρημα 2: (ανισότητα Minkowski) Αν $p \in [1, \infty]$ και $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, τότε ισχύει η ανισότητα

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Απόδειξη:

Αν $p = 1$ ή $p = \infty$, τότε η Minkowski είναι προφανής συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας $|f + g| \leq |f| + |g|$.

Για $p, q \in (1, \infty)$, η Minkowski είναι συνέπεια της Hölder. Πράγματι

Ανισότητα Minkowski (2)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x) + g(x)| dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2,$$

απο την τριγωνική ανισότητα.

Τώρα, αν p, q είναι συζυγείς, από τον Hölder έχουμε

$$I_1 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

Ανισότητα Minkowski (3)

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p$$

αφού $(p-1)q = p$. Με τον ίδιο τρόπο έχουμε για το

$$I_1 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{q}} \|g\|_p$$

Προσθέτοντας έχουμε

Ανισότητα Minkowski (4)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^p dx$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \{ \|f\|_p + \|g\|_p \},$$

και διαιρώντας

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

έχουμε την Minkowski αφού $1 - \frac{1}{q} = p$.

Ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα

Από την Hölder αποδεικνύουμε μια δεύτερη ανισότητα του Minkowski που μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

Θεώρημα 3 (Ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα): Αν $1 \leq p < \infty$, τότε

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy$$

Η Minkowski μας λέει ότι η νόρμα ενός ολοκληρώματος, είναι μικρότερη από το ολοκλήρωμα της αντίστοιχης νόρμας.

Ορισμός και ιδιότητες των L^p

- Για $p \in [1, \infty]$, ο $L^p(\mathbb{R}^n)$ είναι ο διανυσματικός χώρος των μετρήσιμων συναρτήσεων που ικανοποιούν
$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$
- Αν $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ και από τον Minkowski έχουμε ότι
$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$
- Επιπλέον, αν $\|f\|_p = 0$, τότε $f = 0$ σ.π. δηλαδή $f = 0$, αφού γενικά στην θεωρία μέτρου, τα σύνολα μέτρου 0 δεν μετράνε.
- Οι L^p, $p \in [1, \infty)$ είναι λοιπόν χώροι με νόρμα.

Ιδιότητες L^2, L^∞

- Ο L^2 είναι η εξαίρεση, αφού η νόρμα του προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx\,.$$

- Για τον L^∞, ο ορισμός είναι λίγο διαφορετικός. Μία μετρήσιμη f ανήκει στον L^∞ αν είναι φραγμένη στον $\mathbb{R}^n$ εκτός ίσως από ένα σύνολο μέτρου 0.

Θέτουμε

$$\|f\|_\infty = inf\{\lambda \in \mathbb{R}\colon\ \mu\varepsilon\tau\rho o\{|f(x)| > \lambda\} = 0\}$$

Θυμίζω ότι ένας χώρος με νόρμα είναι Banach αν είναι πλήρης, δηλαδή αν κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.

Ιδιότητες των L^p (1)

Θεώρημα 4: Για $p \geq 1$, ο L^p είναι Banach.

Απόδειξη: θα δώσω την απόδειξη για την περίπτωση $1 \leq p < \infty$. Είναι μία καλή ευκαιρία να θυμηθούμε αρκετές χρήσιμες έννοιες.

Ας είναι f_m μια ακολουθία Cauchy στον L^p: για κάθε $\varepsilon > 0$, $\exists \mathrm{M}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\|f_m - f_l\|_p \leq \varepsilon, \forall m, l \geq \mathrm{M}(\varepsilon).$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η f_m συγκλίνει σε κάποια $f \in L^p$.

Αν εντοπίσουμε μια υπακολουθία της που συγκλίνει, τότε έχουμε πολλές ελπίδες να δείξουμε και την σύγκλιση της ίδιας της f_m αφού, από την ιδιότητα του Cauchy, οι όροι της είναι κοντά μεταξύ τους.

Διαλέγω τώρα μια υπακολουθία $f_{m_k}, k = 1,2, \ldots$ της f_m

Ιδιότητες των L^p (2)

τέτοια ώστε

$$\|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}, \forall k = 1,2, \dots$$

Παρατηρώ ότι

$$\begin{aligned} f_{m_{K+1}} - f_{m_1} &= (f_{m_2} - f_{m_1}) + (f_{m_3} - f_{m_2}) + \cdots + (f_{m_{K+1}} - f_{m_K}) \\ &= \sum_{k=1}^{K} (f_{m_{k+1}} - f_{m_k}). \end{aligned}$$

Από την επιλογή της υπακολουθίας έχω

$$\|f_{m_{K+1}} - f_{m_1}\|_p \leq \sum_{k=1}^{K} \|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\|_p \leq \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k}$$

Ιδιότητες των L^p (3)

Θέτω λοιπόν

$$g_K(x)=\sum_{k=1}^{K}\left|f_{m_{k+1}}(x)-f_{m_k}(x)\right|.$$

Η $g_K, K=1,2,\dots$, είναι μια αύξουσα ακολουθία θετικών συναρτήσεων και συνεπώς έχει ένα όριο g (πεπερασμένο ή άπειρο):

$$g(x)=\lim_{K\to\infty} g_K(x)=\lim_{K\to\infty}\sum_{k=1}^{K}\left|f_{m_{k+1}}(x)-f_{m_k}(x)\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left|f_{m_{k+1}}(x)-f_{m_k}(x)\right|$$

Ιδιότητες των L^p (4)

Έχουμε

$$\|g\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\|f_{m_{k+1}} - f_{m_k}\right\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Από εδώ, η θεωρία μέτρου, μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι η $g(x) < \infty$ σ.π., δηλαδή η σειρά

$\sum_{k=1}^{\infty} \left|f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)\right|$ συγκλίνει σ.π.

Άρα το ίδιο και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)\right\}.$$

Άρα η συνάρτηση

Ιδιότητες των L^p (5)

$$f_{m_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\{f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)\}$$

ορίζεται καλά σ.π.

Αφού η ως άνω σειρά συγκλίνει σ.π., τα μερικά της αθροίσματα

$$f_{m_1}(x) + \sum_{k=1}^{\mathrm{K}}\{f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)\}$$

$$= f_{m_1}(x) + f_{m_{\mathrm{K}+1}}(x) - f_{m_1}(x) = f_{m_{\mathrm{K}+1}}(x)$$

συγκλίνουν σ.π. Άρα η υπακολουθία $f_{m_{\mathrm{K}+1}}(x)$ συγκλίνει σ.π.

Θέτουμε

$$f(x) = \lim_{K\to\infty} f_{m_{\mathrm{K}+1}}(x) = f_{m_1} + \sum_{k=1}^{\infty}\{f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)\}.$$

Ιδιότητες των L^p (6)

Έχουμε $f \in L^p$, αφού $f_{m_1} \in L^p$ και όπως είδαμε πιο πάνω

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \left| f_{m_{k+1}} - f_{m_k} \right| \in L^p.$$

Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι η ακολουθία f_m συγκλίνει στην f με την έννοια του L^p, δηλαδή

$$\|f_m - f\|_p \to 0, \text{ καθώς } m \to \infty.$$

Έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} \left| f_m(x) - f_{m_k}(x) \right|^p = |f_m(x) - f(x)|^p,$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_m(x) - f(x)|^p \, dx = \|f_m - f\|_p^p < \infty.$$

Ιδιότητες των L^p (7)

Άρα από το θεώρημα του Lebesgue, μπορούμε να αλλάξουμε όριο και ολοκλήρωση:

$$\|f_m - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f_m(x) - f(x)|^p \, dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} \left|f_m(x) - f_{m_k}(x)\right|^p dx = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} \left|f_m(x) - f_{m_k}(x)\right|^p dx$$

$$= \lim_k \left\|f_m - f_{m_k}\right\|_p^p \le \varepsilon,$$

απο Cauchy αν το m είναι μεγάλο.

Προσέγγιση των συναρτήσεων του L^p (1)

Ένα από τα ατού της θεωρίας ολοκλήρωσης του Lebesgue είναι η προσέγγιση των μετρήσιμων συναρτήσεων με απλές συναρτήσεις

$$s(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j X_{A_j}(x)\,,$$

όπου $a_j \in \mathbb{C}$ και A_j μετρήσιμα σύνολα.

Αν τώρα $f \geq 0$ και $f \in L^p, 1 \leq p < \infty$, τότε η f, ως μετρήσιμη συνάρτηση, προσεγγίζεται από μια ακολουθία απλών συναρτήσεων s_k: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ τ.ω.

$$|f(x) - s_k(x)| \leq \varepsilon, \forall x \;\kappa\alpha\iota\; \forall k \geq N.$$

Όμως,

Προσέγγιση των συναρτήσεων του L^p (2)

$$|f(x) - s_k(x)|^p \leq f(x)^p.$$

Άρα $f - s_k \in L^p$ και από την κυριαρχούμενη σύγκλιση έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - s_k(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} |f(x) - s_k(x)|^p \, dx = 0,$$

δηλαδή η f προσεγγίζεται από την s_k με την έννοια του L^p.

Για την γενική περίπτωση γράφουμε $f = f^+ + f^-$, κ.λ.π.

Τώρα από το Θεώρημα του Lusin, μία f απλή και με συμπαγή φορέα, προσεγγίζεται από μια συνεχή με συμπαγή φορέα. Συνεπώς,

Πρόταση 1: Οι συνεχείς με συμπαγή φορέα είναι παντού πυκνές στους L^p για $1 \leq p < \infty$.

Ο χώρος $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (1)

Ένας άλλος χώρος συναρτήσεων, που όμως θα δείξουμε, είναι παντού πυκνός στους L^p για $1 \leq p < \infty$, είναι ο $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, f\ \varepsilon\iota\nu\alpha\iota\ C^\infty\ \kappa\alpha\iota\ 0\ \varepsilon\xi\omega\ \alpha\pi\text{o}\ \varepsilon\nu\alpha\ \sigma\upsilon\mu\pi\alpha\gamma\varepsilon\varsigma\}$.

Ο χώρος αυτός είναι πιο χρήσιμος στην Ανάλυση από ότι οι απλές ή οι συνεχείς συναρτήσεις λόγω της ομαλότητας των στοιχείων του.

Ένας κλασικός κάτοικος του $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι η

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}, & \alpha\nu\ \|x\|^2 \leq 1 \\ 0, & \alpha\nu\ \|x\|^2 > 1 \end{cases}$$

Πράγματι,

$$\varphi(x) = f(\|x\|^2 - 1),$$

Ο χώρος $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (2)

όπου

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}}, & \alpha\nu\ t \leq 0, \\ 0, & \alpha\nu\ t > 0. \end{cases}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η f είναι C^∞ αφού όλες οι παράγωγοί της τείνουν στο 0 καθώς το $t \to 0$.

Διαιρώντας την φ με το $\int \varphi$, έχουμε μια συνάρτηση ψ η οποία είναι C^∞, θετική, έχει φορέα την μπάλλα B(0,1) και $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1$.

Με την βοήθεια των ως άνω συναρτήσεων, σιδερώνουμε οποιαδήποτε συνάρτηση με συμπαγή φορέα, την κάνουμε C_0^∞ χωρίς να την μεγαλώνουμε πολύ:

Πρόταση 2: Αν $1 \leq p < \infty$, ο $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι παντού πυκνός στον $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Ο χώρος του Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$

Τέλος ο χώρος του Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$, είναι και αυτός παντού πυκνός στους L^p για $1 \leq p < \infty$.

Θυμίζουμε ότι μια $f \in S(\mathbb{R}^n)$ αν είναι C^∞ και αν οι μερικές της παράγωγοι κάθε τάξης, τείνουν στο 0 καθώς το x τείνει στο ∞, πιο γρήγορα από κάθε πολυώνυμο.

Δηλαδή, για κάθε $m_1, \dots, m_n, N$ και $R > 0$, υπάρχει θετική σταθερά $c = c(m_1, \dots, m_n, N, R)$ τέτοια ώστε

$$\left| \frac{\partial^{m_1 + \cdots + m_n}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} f(x) \right| \leq \frac{c}{(1 + \|x\|^2)^N}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ο χώρος του Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ είναι ο πιο κατάλληλος χώρος για τον μετασχηματισμό Fourier.

Παρατήρηση (2)

Ο L^∞ για τις προσεγγίσεις, αλλά και για την δυικότητα είναι κατά κάποιο τρόπο η εξαίρεση των L^p.

Αν πάρω π.χ. τον $C_0(\mathbb{R}^n)$, τότε το Λήμμα του Urysohn, η πλήρωσή του με την νόρμα $\| \quad \|_\infty$ δίνει τις συνεχείς που φθίνουν στο ∞ και όχι τον L^∞.

Βιβλιογραφία

1. G.B. Folland, Real Analysis, Modern techniques and their applications, John Wiley and sons, 1984, New York.
2. P. Malliavin, Integration et Probabilites, Analyse de Fourier et Analyse Spectrale, Masson, 1982, Paris.
3. Μιχ. Γ. Μαριάς, Μαθήματα Αρμονικής ανάλυσης, Εκδόσεις ζήτη, 2001, Θεσσαλονίκη.
4. W.Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1970, New York.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης. Ενότητα 5: Οι χώροι L^p». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS436/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης