ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης

Ενότητα 1: Μέτρα

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

Σκοποί ενότητας

Στην πρώτη αυτή ενότητα εισάγεται η έννοια του μέτρου και προτείνουμε μια γενική μέθοδο κατασκευής μέτρων, που στηρίζεται στο Θεώρημα Καραθεοδωρή. Κατόπιν, θα την εφαρμόσουμε για να κατασκευάσουμε μέτρα επί της πραγματικής ευθείας ανάμεσα στα οποία είναι και το πολύ σημαντικό μέτρο του Lebesgue.

Εισαγωγή (1)

Ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ήταν ο υπολογισμός του εμβαδού ενός επίπεδου χωρίου ή του όγκου ενός στερεού. Σ’ αυτό το πρόβλημα εξ’ άλλου οφείλει το όνομα της η Γεωμετρία=γαία+μετρώ. Στους Λογισμούς είδαμε το Θεώρημα του Lebesgue, που λέει ότι αν το σύνορο $\partial \mathrm{A}$ ενός πεδίου A είναι μέτρου 0, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση x_A είναι ολοκληρώσιμη και πως ο όγκος του χωρίου υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα Riemann

$$vol(A) = \int x_A(x)dx\,.$$

Αν όμως το μέτρο του $\partial \mathrm{A}$ είναι θετικό, τότε ο Riemann δεν μπορεί να υπολογίσει τον όγκο του A.

Εισαγωγή (2)

Το ολοκλήρωμα Riemann παρουσιάζει και άλλες αδυναμίες όπως

- Η δυσκολία εναλλαγής ορίου και ολοκληρώματος, μια διαδικασία απαραίτητη στην Ανάλυση, και
- Η μη πληρότητα του $L^2(0,1)$, που είναι ο κατ' εξοχήν χώρος των σειρών Fourier.

Οι αδυναμίες αυτές, που όπως δείχνει το θεώρημα του Lebesgue, οφείλονται στο μικρό μέγεθος του χώρου των ολοκληρωσίμων κατά Riemann συναρτήσεων, έγιναν γρήγορα αντιληπτές και άρχισαν οι προσπάθειες επέκτασης του ολοκληρώματος σε μια πιο μεγάλη κλάση συναρτήσεων με σκοπό να ξεπεραστούν οι προαναφερθείσες αδυναμίες.

Μέτρο (1)

Για να μετρήσουμε τον όγκο των υποσυνόλων π.χ. του επιπέδου, χρειαζόμαστε μια θετική συνάρτηση μ επί του συνόλου των υποσυνόλων $P(\mathbb{R}^2)$ του επιπέδου:

$$\mu\colon\ P(\mathbb{R}^2) \to [0, +\infty).$$

Την **μ** την λέμε **μέτρο** και τον αριθμό **μ(Α)** όγκο ή μέτρο του $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^2$.

Από την μ ζητούμε να ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες, που ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις που έχουμε για το εμβαδόν ενός συνόλου:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Αν τα $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_j, \dots, j \in \mathbb{N}$ είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και ξένα μεταξύ τους, τότε

Μέτρο (2)

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)\,, (1)$$

3. Το μέτρο κάθε συνόλου παραμένει αμετάβλητο από τις μεταθέσεις, τις στροφές και τις συμμετρίες ως προς τους άξονες, και τέλος
4. Ο όγκος του τετραγώνου με πλευρά 1 είναι ίσος με 1.

Όμως, μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχουν σύνολα που δεν ικανοποιούν συγχρόνως και τις ιδιότητες 2-4.

Έτσι λοιπόν,

- Ή πρέπει να κάνουμε την (1) πιο ασθενή (έτσι και αλλιώς οι άλλες δεν κουνιούνται)

Μέτρο (3)

- Ή πρέπει να δεχτούμε πως δεν είναι δυνατόν να μετρήσουμε τον όγκο όλων των υποσυνόλων του Ευκλείδειου χώρου με τις ως άνω προϋποθέσεις εν ισχύ.

Αν όμως εξασθενήσουμε την (1), ζητώντας π.χ. να ισχύει μόνο για πεπερασμένες ενώσεις, τότε θα παρουσιαστεί πρόβλημα στην εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος, κάτι που δεν είναι επιθυμητό.

Έτσι η καλύτερη λύση είναι να δεχτούμε ότι δεν μπορούμε να ολοκληρώσουμε όλα τα υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου, και να περιοριστούμε σε κλάσεις συνόλων που συναντούμε στην 'πράξη' όπως τα ανοικτά και κλειστά σύνολα.

Μέτρο (4)

Έτσι θα περιοριστούμε να μετρήσουμε τον όγκο των ανοικτών και κλειστών συνόλων καθών και των αριθμήσιμων ενώσεών τους αφού δεχτήκαμε την (1).

Όμως το κλειστό σύνολο είναι το συμπλήρωμα του ανοικτού.

Έτσι οι κλάσεις των μετρήσιμων συνόλων αποτελούν τις γνωστές **σ-άλγεβρες**.

σ-άλγεβρα (1)

Ας είναι $\mathbb{X}$ ένα σύνολο. Ένα υποσύνολο $\mathcal{A}$ του $P(\mathbb{X})$ λέγεται **σ-άλγεβρα** αν είναι κλειστό ως προς το συμπλήρωμα και τις αριθμητικές ενώσεις, δηλαδή

1. Αν $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, τότε και το συμπλήρωμα $A^C \in \mathcal{A}$, και
2. Αν τα $A_1, \dots, A_j \dots, j \in \mathbb{N}$, ανήκουν στην $\mathcal{A}$, τότε και η ένωσή τους $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

Το ζεύγος $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ λέγεται **μετρήσιμος χώρος**.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

- Μια σ-άλγεβρα είναι κλειστή και ως προς τις αριθμήσιμες τομές αφού

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j^C \right)^c,$$

σ-άλγεβρα (2)

και ότι

- Πάντα περιέχει το $\emptyset$ και ολόκληρο το $\mathbb{X}$. Πράγματι, αν $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, τότε και το συμπλήρωμα $A^c \in \mathcal{A}$. Οπότε

$$\emptyset = \mathrm{A} \bigcap \mathrm{A}^c \in \mathcal{A} \; και \; \mathbb{X} = \mathrm{A} \bigcup \mathrm{A}^c \in \mathcal{A}.$$

Παράδειγμα 1: Για κάθε σύνολο $\mathbb{X}$, τα $P(\mathbb{X})$ και $\{\emptyset, \mathbb{X}\}$ είναι σ-άλγεβρες.

Οι 2 παραπάνω σ-άλγεβρες δεν έχουν κανένα ενδιαφέρον. Για να κατασκευάσουμε ενδιαφέρουσες σ-άλγεβρες, χρειαζόμαστε τις παρατηρήσεις που ακολουθούν.

Παρατηρήσεις 1

- Αν οι $\mathcal{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda$, είναι μία οικογένεια σ-αλγεβρών του $\mathbb{X}$, τότε είναι εύκολο να δούμε ότι και η τομή τους

$$\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda = \{\mathrm{A} \in \mathrm{P}(\mathbb{X}) : A \in \mathcal{A}_\lambda \; για \; καθε \lambda \in \Lambda\}$$

είναι σ-άλγεβρα.

- Αν τώρα, $\mathcal{E}$ είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{X}$, τότε και η τομή όλων των σ-αλγεβρών του $\mathbb{X}$ που περιέχουν το $\mathcal{E}$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει το $\mathcal{E}$. Την συμβολίζουμε με $\mathbf{M}(\mathcal{E})$ και την λέμε **σ-άλγεβρα που παράγεται από το** $\mathcal{E}$**.**

Άλγεβρα Borel (1)

Ορισμός: Έστω $\mathbb{X}$ ένας τοπολογικός χώρος. Η σ-άλγεβρα του $\mathbb{X}$ που παραγεται από τα ανοικτά σύνολα, λέγεται **άλγεβρα Borel** του $\mathbb{X}$ και την συμβολίζουμε με $\mathrm{B}_{\mathbb{X}}$.

Πάνω στην άλγεβρα του Borel ορίζονται τα πιο σημαντικά για την Ανάλυση μέτρα.

Η άλγεβρα Borel περιέχει λοιπόν τους εξής τύπους συνόλων:

- Ανοικτά σύνολα και τα συμπληρώματα τους, δηλαδή
- Κλειστά σύνολα,
- Αριθμήσιμες ενώσεις ανοικτών και κλειστών συνόλων,
- Αριθμήσιμες τομές αριθμησίμων ενώσεων ανοικτών και κλειστών συνόλων.

Άλγεβρα Borel (2)

Με άλλα λόγια η σ-άλγεβρα Borel περιέχει οποιοδήποτε σύνολο που μπορεί να συναντήσει ένας Αναλύστας, που δεν έχει το βίτσιο των παθολογιών. Αν λοιπόν μπορέσουμε να μετρήσουμε τον όγκο κάθε συνόλου Borel των Ευκλειδείων χώρων, τότε έχουμε λύσει οριστικά και αμετάκλητα το πρόβλημα.

Επειδή η $\mathrm{B}_{\mathbb{R}}$ θα παίξει σημαντικό ρόλο στο μάθημα, στην Πρόταση που ακολουθεί επισημαίνουμε ότι μπορεί να παραχθεί από πολλές κατηγορίες συνόλων.

Πρόταση 1

Πρόταση 1: Η άλγεβρα Borel $\mathrm{B}_{\mathbb{R}}$ παράγεται από τους παρακάτω τύπους διαστημάτων:

1. Τα ανοικτά διαστήματα: $\mathcal{E}_1 = \{(a,b): a < b\}$.
2. Τα κλειστά διαστήματα: $\mathcal{E}_2 = \{[a,b]: a < b\}$.
3. Τα ημιανοικτά διαστήματα: $\mathcal{E}_3 = \{[a,b): a < b\}$ και $\mathcal{E}_4 = \{(\alpha,b]: a < b\}$.
4. Τα ανοικτά διαστήματα απείρου μήκους: $\mathcal{E}_5 = \{(a,+\infty): a \in \mathbb{R}\}$ ή $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty,a): a \in \mathbb{R}\}$.
5. Τα κλειστά διαστήματα απείρου μήκους: $\mathcal{E}_5 = \{[a,+\infty): a \in \mathbb{R}\}$ ή $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty,a]: a \in \mathbb{R}\}$.

σ-άλγεβρα γινόμενο

Αν έχουμε μία ακολουθία $(\mathbb{X}_n, \mathcal{A}_n)$ μετρήσιμων χώρων, τότε το γινόμενο $\prod \mathbb{X}_n$ εφοδιάζεται με την σ-άλγεβρα γινόμενο $\bigotimes \mathcal{A}_n$ που παράγεται από τα σύνολα

$$\prod A_j \, , \mu\varepsilon \; A_j \in A_n.$$

Αν τα $\mathbb{X}_n, n = 1, \dots, N$, είναι διαχωρίσιμοι τοπολογικοί **χώροι**, τότε η άλγεβρα Borel $\mathrm{B}_{\mathbb{X}}$ του γινομένου $\mathbb{X} = \prod_1^N \mathbb{X}_n$, είναι ίση με την άλγεβρα γινόμενο $\bigotimes_1^N B_{\mathbb{X}_n}$.

Έτσι

$$B_{\mathbb{R}^n} = \bigotimes_1^n B_{\mathbb{R}}$$

και συνεπώς η $B_{\mathbb{R}^n}$ παράγεται από τα σύνολα του τύπου

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n, \mu\varepsilon \; A_j \in B_{\mathbb{R}}.$$

Παρατηρήσεις 2 (1)

1. Πολλές φορές είναι χρήσιμο και απαραίτητο να αντικαταστήσουμε μια αριθμήσιμη ένωση $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ με μια αριθμήσιμη ένωση συνόλων ξένων μεταξύ τους. Το κόλπο είναι το ακόλουθο: Θέτουμε

$B_j = A_j \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) = A_j \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)^c$ και παρατηρούμε ότι τα B_j είναι ξένα μεταξύ τους και πως

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j.$$

2. Αν λοιπόν θέλουμε να δείξουμε ότι η ένωση $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ ανήκει σε κάποια κλάση $\mathcal{A}$, αρκεί να δείξουμε ότι η ένωση $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ των ξένων μεταξύ τους συνόλων (B_j) ανήκει στην $\mathcal{A}$.

Παρατηρήσεις 2 (2)

3. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε μια σ-άλγεβρα, ως μία κλάση που είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα και τις αριθμήσιμες ενώσεις ξένων μεταξύ τους συνόλων.

σ-αθροιστικότητα (1)

Ας είναι $\mathbb{X}$ ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$.
Ένα μέτρο **μ** είναι μια θετική συνάρτηση

$$\mu: \mathcal{M} \to [0, +\infty],$$

τέτοια ώστε

1. $\mu(\emptyset) = 0$, και
2. Αν τα $A_j, j \in \mathbb{N}$, είναι μια ακολουθία συνόλων της $\mathcal{M}$ που είναι ξένα μεταξύ τους, τότε

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)\,. \qquad (2)$$

Η ιδιότητα (2) λέγεται **αριθμήσιμη αθροιστικότητα** ή **σ-αθροιστικότητα.**

σ-αθροιστικότητα (2)

Το ζεύγος $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$ λέγεται **μετρήσιμος** χώρος και αν μ είναι ένα μέτρο ορισμένο επί της $\mathcal{M}$, τότε η τριάδα $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ λέγεται **μετρητός** χώρος.

Θα δώσουμε προς το παρόν, δύο παραδείγματα, μάλλον προφανή. Τα ουσιαστικά παραδείγματα θα μπορέσουμε να τα δώσουμε στο τέλος της ενότητας.

Παράδειγμα 1 (μέτρο Dirac)

Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{X}$ εφοδιασμένο με την σ-άλγεβρα $P(\mathbb{X})$. Αν $x_0 \in \mathbb{X}$ σταθερό, για κάθε $A \in P(\mathbb{X})$, θέτουμε

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, \alpha\nu\ x_0 \in A, \\ 0, \alpha\nu\ x_0 \notin A. \end{cases}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η δ_{x_0} είναι μέτρο. Η δ_{x_0} είναι το γνωστό μέτρο Dirac (η διαβόητη και 'μυστηριώδης' συνάρτηση Dirac των Φυσικών).

Εδώ διαπιστώνουμε ότι ο Dirac μετρά όλα τα σύνολα χωρίς πρόβλημα.

Παράδειγμα 2

Υποθέτουμε ότι το $\mathbb{X}$ είναι αριθμήσιμο και το εφοδιάζουμε με την σ-άλγεβρα $P(\mathbb{X})$. Για κάθε $A \in P(\mathbb{X})$, θέτουμε

$$\nu(A) = \#(A) = \text{το πλήθος των στοιχείων του } A,$$

τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η ν είναι μέτρο.

Η **ν** λέγεται και counting measure αφού μετρά τα στοιχεία των συνόλων.

Η Πρόταση που ακολουθεί συνοψίζει τις ιδιότητες των μέτρων.

Πρόταση 2 (Ιδιότητες του μέτρου)

Πρόταση 2: Έστω $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ ένας μετρητός χώρος.

1. (**Μονοτονία**) Αν $E, F \in \mathcal{M}$ και $E \subset F$, τότε $\mu(E) \leq \mu(F)$.
2. (**Υποαθροιστικότητα**) Αν $\left(A_j\right) \in \mathcal{M}$, χωρίς να υποθέσουμε ότι είναι ξένα μεταξύ τους, τότε
$$\mu\left(\cup_j A_j\right) \leq \sum_j \mu\left(A_j\right).$$
3. (Συνέχεια από κάτω) Αν η ακολουθία $\left(A_j\right) \in \mathcal{M}$ είναι αύξουσα, τότε $\mu\left(\cup_j A_j\right) = \lim_{j \to \infty} \mu\left(A_j\right)$.
4. (Συνέχεια από πάνω) Αν η ακολουθία $\left(A_j\right) \in \mathcal{M}$ είναι φθίνουσα και $\mu(A_k) < \infty$ για κάποιο k, τότε
$$\mu\left(\cap_j A_j\right) = \lim_{j \to \infty} \mu\left(A_j\right).$$

Βιβλιογραφία

1. G.B. Folland, Real Analysis, Modern techniques and their applications, John Wiley and sons, 1984, New York.
2. P. Malliavin, Integration et Probabilites, Analyse de Fourier et Analyse Spectrale, Masson, 1982, Paris.
3. Μιχ. Γ. Μαριάς, Μαθήματα Αρμονικής ανάλυσης, Εκδόσεις ζήτη, 2001, Θεσσαλονίκη.
4. W.Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1970, New York.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης. Ενότητα 1: Μέτρα». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS436/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης