Θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης

Ενότητα 3: Ολοκλήρωση

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Ολοκλήρωση θετικών συναρτήσεων.
    i. Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης.
    ii. Άρση της μονοτονίας, Λήμμα του Fatou.
2. Ολοκλήρωση μιγαδικών συναρτήσεων.
    i. Το θεώρημα της Κυριαρχούμενης σύγκλισης.
    ii. Σχέση ολοκληρώματος Riemann και Lebesgue.
    iii. L^1-σύγκλιση και σύγκλιση κατά μέτρο.

Σκοποί ενότητας

- Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα ως προς ένα αφηρημένο μέτρο και θα αποδείξουμε τα θεωρήματα σύγκλισης του Lebesgue.

Μετρήσιμες συναρτήσεις (1)

Όλοι οι μετρητοί χώροι που χρησιμοποιούμε εφεξής είναι πλήρεις.

Στην ενότητα αυτή ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue μιας θετικής και μετρήσιμης συνάρτησης και αποδεικνύουμε ένα από τα κεντρικά θεωρήματα της θεωρίας: Το Θεώρημα της μονότονης σύγκλισης.

Έστω $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$ ένας μετρήσιμος χώρος και

$$f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}.$$

Θυμίζουμε ότι η f λέγεται **μετρήσιμη** αν

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{M} \text{ για κάθε } A \in B_{\mathbb{R}}.$$

Μετρήσιμες συναρτήσεις (2)

Γενικά, αν $(\mathbb{X}_1, \mathcal{M}_1)$ και $(\mathbb{X}_2, \mathcal{M}_2)$ είναι μετρήσιμοι χώροι, μια συνάρτηση

$$f: \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2,$$

είναι **μετρήσιμη** αν

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_1 \text{ για κάθε } A \in \mathcal{M}_2.$$

Δεν θα παραθέσουμε τις ιδιότητες των μετρήσιμων συναρτήσεων. Απλώς αναφέρουμε πως οι αλγεβρικές πράξεις καθώς και οι αναλυτικές (όρια, suprema, infima,…) διατηρούν την μετρησιμότητα.

Θα αποδείξουμε μόνο το πολύ βασικό Λήμμα της προσέγγισης των μετρήσιμων συναρτήσεων από τις απλές συναρτήσεις.

Μετρήσιμες συναρτήσεις (3)

Θυμίζουμε πως απλές λέγονται οι συναρτήσεις που γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί χαρακτηριστικών μετρησίμων συνόλων:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{N} a_j x_{A_j}(x)\,,$$

όπου $a_j \in \mathbb{R}$ και $A_j \in \mathcal{M}$.

Λήμμα 1: Αν η

$$f\colon \mathbb{X} \to [0,+\infty],$$

είναι μετρήσιμη, τότε υπάρχει s_n αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων τ.ω. $s_n \leq f$ και

$$s_n(x) \to f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{X}.$$

Μετρήσιμες συναρτήσεις (4)

Απόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $j \in [1, 2^n]$, θέτουμε

$$A_{j,n} = f^{-1}\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right), \ A_{n,n} = f^{-1}[2^n, \infty),$$

και

$$s_n(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j-1}{2^n} x_{A_{j,n}}(x) + n, A_{n,n}$$

Εύκολα βλέπουμε πως η ακολουθία s_n είναι αύξουσα και πως $s_n \leq f$.

Αν τώρα

$$x \in A_{j,n} = f^{-1}\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right),$$

τότε

Μετρήσιμες συναρτήσεις (5)

$$\frac{j-1}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{j}{2^n},$$

και

$$s_n(x) = \frac{j-1}{2^n} x_{A_{j,n}}(x) = \frac{j-1}{2^n}.$$

Άρα

$$0 \leq f(x) - s_n(x) \leq \frac{j}{2^n} = \frac{j-1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

Αν

$$x \in A_{n,n} = f^{-1}[2^n, \infty),$$

τότε

$$2^n \leq f(x) \leq \infty \text{ και } s_n(x) = n.$$

Ορισμός του ολοκληρώματος (1)

Ορισμός : Έστω $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ μετρητός χώρος.

1. Αν

$$s(x) = \sum_{i=1}^{N} a_j x_{A_j}(x)\,, a_j \geq 0, A_j \in \mathcal{M},$$

είναι απλή θετική συνάρτηση επί του $\mathbb{X}$, τότε το ολοκλήρωμα της s ως προς το μέτρο μ ορίζεται από τον τύπο

$$\int_{\mathbb{X}} s d\mu = \sum_{i=1}^{N} a_j \mu(\mathrm{A}_j).$$

Ορισμός του ολοκληρώματος (2)

2. Αν η

$$f: \mathbb{X} \to [0, +\infty],$$

είναι μετρήσιμη, τότε το ολοκλήρωμα της ως προς το μέτρο μ ορίζεται από τον τύπο

$$\int_{\mathbb{X}} f d\mu = sup \int_{\mathbb{X}} s d\mu \,,$$

για όλες τις απλές s που ικανοποιούν $0 \leq s \leq f$.

3. Αν $A \in \mathcal{M}$, θέτουμε

$$\int_{A} f d\mu = \int_{\mathbb{X}} x_A f d\mu$$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος (1)

Στην πρόταση που ακολουθεί δίνουμε τις ιδιότητες του ολοκληρώματος που είναι άμεση συνέπεια του ορισμού.

Πρόταση 1 (θετικότητα**)**: Ισχύει

$$\int_{\mathbb{X}} f d\mu \geq 0,$$

και

$$\int_{A} f d\mu \geq 0 \text{ και } \int_{\mathbb{X}} f d\mu \geq \int_{\mathbb{X}} g d\mu \,, \alpha\nu\ f \geq g.$$

Για κάθε $\lambda \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{X}} \lambda f d\mu = \lambda \int_{\mathbb{X}} f d\mu \,.$$

Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης (1)

Το Θεώρημα σύγκλισης που ακολουθεί είναι από τα κεντρικά της θεωρίας ολοκλήρωσης.

Θεώρημα 1 (Μονότονη σύγκλιση): Αν οι f_n είναι μια αύξουσα ακολουθία θετικών και μετρήσιμων συναρτήσεων και

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,, για\ καθε\ x \in \mathbb{X},$$

τότε

$$\int f d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu\,, (1)$$

δηλαδή έχουμε εναλλαγή ολοκληρώματος και ορίου.

Πριν περάσουμε στην απόδειξη επισημαίνουμε τα εξής:

Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης (2)

- Η υπόθεση της μονοτονίας είναι απαραίτητη. Πράγματι αν μ είναι το μέτρο Lebesgue επί της ευθείας, και

$$f_n(x) = \mathcal{X}_{(n,n+1)}(x), x \in \mathbb{R},$$

τότε

$$\mathcal{X}_{(n,n+1)}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

ενώ

$$\int \mathcal{X}_{(n,n+1)} d\mu = 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Συνδυάζοντας την Μονότονη σύγκλιση με το Λήμμα 1, συνάγεται ότι αν $f \geq 0$, τότε

Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης (3)

$$\int f d\mu = \lim_{n} \int s_n d\mu \,,$$

όπου οι s_n είναι απλές και ικανοποιούν $0 \leq s_n \leq f$. Το κέρδος είναι ότι το ολοκλήρωμα της f υπολογίζεται πλέον ως όριο και όχι ως sup.

Για την απόδειξη της Μονότονης σύγκλισης χρειαζόμαστε το Λήμμα που ακολουθεί.

Λήμμα 2: Έστω s απλή θετική συνάρτηση, τότε η απεικόνιση

$$\mathcal{M} \ni \mathrm{A} \rightsquigarrow \nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} s d\mu$$

είναι μέτρο επί της $\mathcal{M}$.

Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης (4)

Απόδειξη: Αφού η (f_n) είναι αύξουσα, από την Πρόταση 1 συνάγεται ότι και η ακολουθία

$$\int f_n d\mu$$

είναι αύξουσα.
Άρα το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

υπάρχει (και μπορεί να είναι άπειρο). Επιπλέον, επειδή

$$f_n \leq f = \lim_{n\to\infty} f_n = \sup_n f_n \,, \forall n,$$

Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης (5)

έχουμε ότι

$$\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$$

και συνεπώς

$$\lim_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu\,.$$

Μένει να δείξουμε την ανάποδη ανισότητα

$$\int f d\mu \leq \lim_n \int f_n d\mu\,.$$

Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης (6)

Ας είναι $a \in (0,1)$ και s μια οποιαδήποτε μετρήσιμη απλή συνάρτηση τ.ω. $0 \leq s \leq f$. Θέτουμε

$$A_n = \{x: f_n(x) \geq as(x)\}.$$

Επειδή (f_n) είναι αύξουσα και $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, συνάγεται ότι

$$A_n \nearrow \text{ και } \cup_n A_n = \mathbb{X}.$$

Επιπλέον

$$\int_{\mathbb{X}} f_n d\mu \geq \int_{A_n} f_n d\mu \geq \int_{A_n} as d\mu \geq a \int_{A_n} s d\mu \,. (2)$$

Τώρα από το Λήμμα 2, το

$$\nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} s d\mu \,,$$

Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης (7)

είναι μέτρο και τα (A_n) είναι αύξουσα ακολουθία, άρα

$$\nu(\cup_n A_n) = \lim_n \nu(A_n)\,,$$

δηλαδή

$$\int_{\mathbb{X}} s d\mu = \nu(\mathbb{X}) = \nu(\cup_n A_n) = \lim_n \nu(A_n) = \lim_n \int_{A_n} s d\mu\,.\,(3)$$

Από τις (2) και (3), έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{X}} f_n d\mu \geq \lim_n a \int_{A_n} s d\mu = a \int_{\mathbb{X}} s d\mu\,,$$ για κάθε $a \in (0,1)$.

Άρα

$$\lim_n \int_{\mathbb{X}} f_n d\mu \geq \int_{\mathbb{X}} f d\mu\,. \quad (4)$$

Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης (8)

για κάθε απλή που ικανοποιεί $0 \leq s \leq f$.

Παίρνοντας στην (4) το sup ως προς όλες αυτές τις s, έχουμε

$$\lim_n \int_{\mathbb{X}} f_n d\mu \geq \int_{\mathbb{X}} f d\mu \, .$$

Η Μονότονη σύγκλιση μας επιτρέπει να δείξουμε την εναλλαγή σειράς και ολοκλήρωσης (και παρεπιπτώντος την αθροιστικότητά του).

Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης (9)

Πόρισμα 1: Αν οι f_n είναι μία ακολουθία θετικών και μετρήσιμων συναρτήσεων, τότε

1. $\int \sum_n f_n d\mu = \sum_n \int f_n d\mu$,

   δηλαδή έχουμε την εναλλαγή σειράς και ολοκλήρωσης.

2. Αν η σειρά είναι πεπερασμένη, τότε το (1) δίνει την αθροιστικότητα του ολοκληρώματος

$$\int \{f_1 + \cdots + f_n\} d\mu = \int f_1 d\mu + \cdots + \int f_n d\mu\,.$$

Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης (10)

Πόρισμα 2: Αν η f είναι θετική και μετρήσιμη, τότε

$$\int_{\mathbb{X}} f d\mu = 0, \alpha\nu\nu\ f \equiv 0\ \sigma.\pi.$$

Πόρισμα 3: Αν η $\varphi: \mathbb{X} \to [0, \infty]$, είναι μετρήσιμη, τότε η απεικόνιση

$$\mathcal{M} \ni A \rightsquigarrow \nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} \varphi d\mu\,,$$

είναι μέτρο επί της $\mathcal{M}$ και

$$\int g d\nu = \int g \varphi d\mu$$

για κάθε g θετική και μετρήσιμη.

Παρατήρηση

Το μέτρο ν συμβολίζεται συνήθως ως

$$d\nu = \varphi d\mu.$$

Το Πόρισμα 3 έχει ένα πολύ ενδιαφέρον αντίστροφο, το Θεώρημα των Radon-Nikodym που θα δούμε αργότερα.

Λήμμα του Fatou (1)

Αν τώρα οι f_n είναι μια ακολουθία θετικών και μετρήσιμων συναρτήσεων, χωρίς να είναι μονότονη, τότε είδαμε ότι η Μονότονη σύγκλιση δεν ισχύει.

Το Λήμμα του Fatou που ακολουθεί μας λέει πως το ολοκλήρωμα ενός ορίου είναι πάντα μικρότερο του ορίου των ολοκληρωμάτων.

Λήμμα του Fatou (2)

Πόρισμα 4: (Λήμμα του Fatou) Αν οι f_n είναι μία ακολουθία θετικών και μετρήσιμων συναρτήσεων, τότε

1. Ισχύει ότι

$$\int \liminf_n f d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu \,. (5)$$

2. Αν $f_n \to f$, τότε η (5) δίνει

$$\int f d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu \,. \; (6)$$

Απόδειξη: Η απόδειξη στηρίζεται στη μονότονη σύγκλιση.

Για κάθε $k \geq 1$, θέτουμε

Λήμμα του Fatou (3)

$$F_k = \inf_{n \geq k} f_n\,.$$

Ισχύει

$$F_k \nearrow$$

και

$$F_k = \inf_{n \geq k} f_n \leq f_j, \textit{για κάθε } j \geq k.$$

Συνεπώς

$$\int F_k d\mu \leq \int f_j d\mu \textit{ για κάθε } j \geq k.$$

Παίρνοντας το inf στο δεύτερο μέρος έχουμε

$$\int F_k d\mu \leq \inf_{j \geq k} \int f_j d\mu \textit{ για κάθε } j \geq k. (7)$$

Λήμμα του Fatou (4)

Όμως, όπως είπαμε, η ακολουθία

$$F_k = \inf_{n\geq k} f_n\,,$$

είναι αύξουσα και από την Μονότονη σύγκλιση και την (7) συνάγεται ότι

$$\int \lim_k F_k d\mu = \lim_\kappa \int F_k d\mu \overset{(7)}{\leq} \lim_k \inf_{j\geq k} \int f_j d\mu$$

ή

$$\int \lim_k \inf_{n\geq k} f_n d\mu \leq \lim_k \inf_{j\geq k} \int f_j d\mu$$

δηλαδή $\int \lim_n \inf\ f d\mu \leq \lim_n \inf\ \int f_n d\mu$

από τον ορισμό του $\lim\inf$.

Λήμμα του Fatou (5)

Παρατήρηση: Το Λήμμα του Fatou είναι ισοδύναμο με την Μονότονη σύγκλιση.

Μπορεί να αποδειχτεί χωρίς την χρήση της Μονότονης σύγκλισης και στην συνέχεια να το χρησιμοποιήσουμε για να την αποδείξουμε.

Ολοκλήρωση μιγαδικών συναρτήσεων (1)

Έστω $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ ένας μετρητός χώρος. Μία μετρήσιμη πραγματική συνάρτηση

$$f\colon \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty],$$

λέγεται **ολοκληρώσιμη** αν

$$\int f^+ d\mu < \infty \text{ και } \int f^- d\mu < \infty,$$

όπου f^+ και f^- είναι το θετικό και αρνητικό μέρος της f.

Επειδή

$$f^+, f^- \leq |f| = f^+ + f^-,$$

συμπεραίνουμε ότι

η f είναι **ολοκληρώσιμη** ανν $\int |f| d\,\mu < \infty$.

Ολοκλήρωση μιγαδικών συναρτήσεων (2)

Αν τώρα έχουμε μία μετρήσιμη μιγαδική συνάρτηση

$$f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{C},$$

λέμε ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη** ανν $\int |f| d\,\mu < \infty$.

Επειδή

$$|f| \leq |Ref| + |Imf| \leq 2|f|,$$

Έπεται ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη** ανν οι Ref και Imf είναι ολοκληρώσιμες.

Στην περίπτωση αυτή, ορίζουμε το

$$\int f d\mu = \int Ref d\mu + i \int Imf d\mu\,.$$

Ο χώρος των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων συμβολίζεται με

$$L^1(\mathbb{X}, d\mu).$$

Ολοκλήρωση μιγαδικών συναρτήσεων (3)

Έτσι

$$L^1(\mathbb{X}, d\mu) = \left\{ f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{C}, / \int |f| d\,\mu < \infty \right\}$$

Αν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης γράφουμε $L^1(\mathbb{X})$ ή L^1 αντί $L^1(\mathbb{X}, d\mu)$.

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε τις επόμενες προτάσεις.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος (2)

Πρόταση 2: Για κάθε $f, g \in L^1(\mathbb{X})$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\alpha f + \beta g \in L^1(\mathbb{X})$$

και

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu .$$

Από την Πρόταση λοιπόν έχουμε ότι ο $L^1(\mathbb{X})$ είναι διανυσματικός χώρος. Μάλιστα αν θέσουμε

$$\|f\|_1 = \int |f| d\mu,$$

τότε εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η $\|.\|_1$ είναι νόρμα και έτσι ο $L^1(\mathbb{X})$ είναι διανυσματικός χώρος με νόρμα.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος (3)

Πρόταση 3: Αν $f \in L^1(\mathbb{X})$, τότε

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu \,.$$

Πρόταση 4: Αν $f, g \in L^1(\mathbb{X})$, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

1. $\int_A \ f d\mu = \int_A \ g d\mu$ για κάθε $\mathrm{A} \in \mathcal{M}$.
2. $f = g \ \sigma.\pi.$
3. $\|f - g\|_1 = 0.$

Ιδιότητες του ολοκληρώματος (4)

Η Πρόταση 4 δείχνει ότι το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης δεν αλλάζει αν διαφοροποιήσουμε την συνάρτηση πάνω σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν.

Έτσι, κάθε συνάρτηση που είναι διάφορη του 0 μόνο πάνω σε ένα σύνολο μέτρου 0, έχει ολοκλήρωμα 0

$$\int f d\mu = 0$$

και συνεπώς, μέσα στον L^1, οι συναρτήσεις αυτές ταυτίζονται με την μηδενική συνάρτηση.

Ιδιότητες του ολοκληρώματος (5)

Κατά συνέπεια, λέμε πως δύο συναρτήσεις f, g του L^1 είναι ίσες αν

$$f - g = 0 \; \sigma.\pi. \Leftrightarrow f = g \; \sigma.\pi.$$

Αν μιλήσουμε λοιπόν με την γλώσσα της Λογικής, μπορούμε να πούμε ότι ο L^1 περιέχει κλάσεις ισοδυναμίας αφού αν $f \in L^1$, τότε

$$f = f + h,$$

για κάθε $h = 0$ σ.π.

Το Θεώρημα της Κυριαρχούμενης σύγκλισης (1)

Το Θεώρημα της Κυριαρχούμενης σύγκλισης είναι από τα κεντρικά της θεωρίας και μας επιτρέπει την αλλάγή ορίου και ολοκλήρωσεις για στοιχεία του $L^1(\mathbb{X})$.

Θεώρημα 2 (της Κυριαρχούμενης σύγκλισης): Αν οι $f_n \in L^1(\mathbb{X})$ και ικανοποιούν

1. $lim f_n = f \; \sigma.\pi.$
2. Υπάρχει g θετική στον $L^1(\mathbb{X})$ τ.ω.

$$|f_n| \leq g, \forall n \in \mathbb{N}$$

(οι f_n βρίσκονται κάτω από την g, κυριαρχούν δηλαδή από την g), τότε $f \in L^1(\mathbb{X})$ και

$$lim \int f_n d\mu = \int lim f_n d\mu = \int f d\mu \,, (8)$$

Το Θεώρημα της Κυριαρχούμενης σύγκλισης (2)

Πόρισμα 5: Αν οι $f_n \in L^1$ και

$$\sum_n \int |f_n| d\mu < \infty,$$

τότε η σειρά $\sum_n f_n$ συγκλίνει σ.π. σε μια συνάρτηση του L^1 και

$$\int \left(\sum_n f_n \right) d\mu = \sum_n \int f_n d\mu\,.$$

Λήμμα 3: Αν $f \in L^1$, τότε το σύνολο όπου η f απειρίζεται είναι μέτρου 0.

Το Θεώρημα της Κυριαρχούμενης σύγκλισης (3)

Πόρισμα 6: (εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος) Έστω ότι η

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X}\times(a,b) & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}$$

είναι ολοκληρώσιμη για κάθε $t \in (a,b)$, και ότι υπάρχει $g \in L^1$ θετική τ.ω.

$$|f(x,t)| \leq g(x), \forall t \in (a,b).$$

Αν η f είναι συνεχής στο $t_0 \in (a,b)$, τότε

$$\lim_{t\to t_0}\int f(x,t)d\mu(x) = \int \lim_{t\to t_0} f(x,t)d\mu\,(x) = \int f(x,t_0)d\mu(x)\,.$$

Το Θεώρημα της Κυριαρχούμενης σύγκλισης (4)

Πόρισμα 7: (εναλλαγή παραγώγισης και ολοκληρώματος)
Έστω f και g όπως στο προηγούμενο πόρισμα και

$$|\partial_t f(x,t)| \leq g(x), \forall t \in (a,b).$$

Τότε

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f(x,t)d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu(x).$$

Παρατήρηση: Τα παραπάνω Πορίσματα ισχύουν όπως είναι και για μη φραγμένα διαστήματα αφού η συνέχεια και η παραγώγιση είναι τοπικές έννοιες.

Το Θεώρημα της Κυριαρχούμενης σύγκλισης (5)

Αν η

$$f : [a, b] \to \mathbb{C},$$

είναι φραγμένη και έχει ασυνέχειες μέτρου μηδέν, τότε είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann και το ολοκλήρωμα της ορίζεται από τα αθροίσματα Darboux.

Ας είναι

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

μια διαμέριση Δ του $[a, b]$. Θεωρούμε τις απλές συναρτήσεις $U_\Delta(f)(t) = \sum_1^n M_j x_{(t_{j-1}, t_j]}(t)$ και $L_\Delta(f)(t) = \sum_1^n m_j x_{(t_{j-1}, t_j]}(t)$,

όπου

$$M_j = \sup_{(t_{j-1}, t_j]} f \text{ και } m_j = \inf_{(t_{j-1}, t_j]} f.$$

Το Θεώρημα της Κυριαρχούμενης σύγκλισης (6)

Συμβολίζοντας με μ το μέτρο Lebesgue της ευθείας, έχουμε ότι το άνω άθροισμα Darboux $U_\Delta(f)$ είναι ίσο με

$$U_\Delta(f) = \int U_\Delta(f)(t) d\mu(t),$$

και το κάτω με

$$L_\Delta(f) = \int L_\Delta(f)(t) d\mu(t).$$

Αν το βήμα των διαμερίσεων Δ_k τείνει στο 0, τότε

$U_{\Delta_k}(f) \searrow \int_a^b f(x)dx$ και $L_{\Delta_k}(f) \nearrow \int_a^b f(x)dx$.

Το Θεώρημα της Κυριαρχούμενης σύγκλισης (7)

Ας είναι λοιπόν

$$G = lim U_{\Delta_k}(f) \text{ και } g = lim L_{\Delta_k}(f).$$

Και οι δύο είναι μετρήσιμες ως όρια μετρήσιμων, προφανώς φραγμένες, και

$$g \leq f \leq G.$$

Τώρα, απο την Κυριαρχούμενη σύγκλιση

$$\int g d\mu = lim \int L_{\Delta_k}(f) d\mu = \int_{\alpha}^{b} f(x) dx$$

και

$$\int G d\mu = lim \int U_{\Delta_k}(f) d\mu = \int_{\alpha}^{b} f(x) dx ,$$

Το Θεώρημα της Κυριαρχούμενης σύγκλισης (8)

Άρα

$$\int (G - g) d\mu = 0.$$

Συνεπώς $G - g = 0$ σ.π. Άρα

$$f = g = G \text{ σ.π.}$$

Άρα η f είναι μετρήσιμη και

$$\int f d\mu = \int G d\mu = \int_{\alpha}^{b} f(x) dx\,.$$

Με τα γνήσια ολοκληρώματα πρέπει να είμαστε λίγο πιο προσεκτικοί. Ας έχουμε υπόψην μας ότι μια συνάρτηση είναι

Το Θεώρημα της Κυριαρχούμενης σύγκλισης (9)

ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue αν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, αν δηλαδή

$\int |f| d\mu < \infty$ και όχι αν $\int f d\mu < \infty$.

Έτσι, αν π.χ. η

$$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue και το

$$\int_a^b f(x)dx \ \textit{υπάρχει για κάθε} \ b > 0,$$

τότε από τα προηγούμενα και την κυριαρχούμενη σύγκλιση, έχουμε ότι

$$\int f d\mu = \lim_b \int_0^b f(x)dx \, .$$

Το Θεώρημα της Κυριαρχούμενης σύγκλισης (10)

Όμως αν η f δεν είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue, τότε το ολοκλήρωμα Lebesgue $\int f d\mu$ δεν ορίζεται, ενώ το

$$\lim_{b} \int_{0}^{b} f(x)dx$$

μπορεί να υπάρχει. Το παράδειγμα της

$$f = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x_{(n,n+1]}$$

θα σας πείσει.

L^1 −σύγκλιση (1)

Αν $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ είναι ένας μετρητός χώρος, τότε όπως ήδη είπαμε ο χώρος των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα την

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{X}} |f(x)| d\mu(x)$$

και τον συμβολίζουμε με $L^1(\mathbb{X}, d\mu)$ ή απλά με L^1. Έτσι

$$L^1(\mathbb{X}, d\mu) = \left\{ f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{C}, / \|f\|_1 = \int |f| d\,\mu < \infty \right\}$$

Αν λοιπόν f_n είναι μια ακολουθία συναρτήσεων του L^1, τότε λέμε ότι η f_n τείνει στην f με την έννοια του L^1, αν

L^1 −σύγκλιση (2)

$$\|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Γράφουμε $f_n \xrightarrow{L^1} f$.

Αν τώρα το $\mathbb{X}$ είναι τοπολογικός χώρος, τότε έχουμε την απλή ή σημειακή σύγκλιση αν $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε x, την σχεδόν παντού σύγκλιση αν $f_n(x) \to f(x)$ σ.π. και την ομοιόμορφη σύγκλιση αν

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_x |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Προφανώς, αν έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση, τότε έχουμε και σημειακή και σ.π. Έχουμε όμως σύγκλιση στον L^1;

L^1 −σύγκλιση (3)

Τα παραδείγματα που ακολουθούν μας λένε πως η L^1 σύγκλιση δεν έχει σχέση με τις υπόλοιπες.

Παράδειγμα: Έστω

$$f_n(x) = \frac{1}{n} x_{(0,n)}(x),$$

και

$$g_n(x) = x_{\left(\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right)}(x) \text{ όπου } j \in [0, 2^k) \text{ και } n = j + 2^k.$$

Η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο 0, αλλά $f_n \nrightarrow 0$ στον L^1 αφού

$$\int f_n(x)dx = 1 \text{ για κάθε } n.$$

Για την g_n έχουμε

$$\int g_n(x)dx = \frac{1}{2^k} \; \gamma\iota\alpha \; 2^k \leq n < 2^{k+1},$$

L^1 −σύγκλιση (4)

άρα $g_n \to 0$ στον L^1, αλλά δεν τείνει σημειακά στο 0, αφού υπάρχουνα άπειρα x στο $(0,1)$ όπου η g_n παίρνει τις τιμές 1 ή 0.

Βιβλιογραφία

1. G.B. Folland, Real Analysis, Modern techniques and their applications, John Wiley and sons, 1984, New York.
2. P. Malliavin, Integration et Probabilites, Analyse de Fourier et Analyse Spectrale, Masson, 1982, Paris.
3. Μιχ. Γ. Μαριάς, Μαθήματα Αρμονικής ανάλυσης, Εκδόσεις ζήτη, 2001, Θεσσαλονίκη.
4. W.Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1970, New York.

Σημείωμα Αναφοράς

«Θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης. Ενότητα 3: Ολοκλήρωση». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS436/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης