ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης

Ενότητα 6: Μιγαδικά Μέτρα

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Το θεώρημα των Radon-Nikodym.
   i. Απόλυτη συνέχεια και το Θεώρημα των Radon-Nikodym.
2. Δυικότητα των L^p.

Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή εισάγονται τα μιγαδικά μέτρα και αποδεικνύουμε το Θεώρημα των Radon-Nikodym που αποσαφηνίζει πλήρως την δομή τους.

Στη συνέχεια αναφέρουμε την δυϊκότητα των L^p.

Μιγαδικά Μέτρα

Ας είναι $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$ μετρήσιμος, μ θετικό μέτρο και $h \in L^1(\mu)$.
Αν θέσουμε

$$v(E) = \int_E h(x) d\mu(x) \,, E \in \mathcal{M}$$

τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

1. $v(E) \in \mathbb{C}$ και $|v(E)| < \infty$.
2. $v(\emptyset) = 0$.
3. $\alpha\nu\ E = U_j E_j\ \kappa\alpha\iota\ \tau\alpha\ E_j$ ξένα μεταξύ τους, τότε

$$v(E) = \sum_j v(E_j)$$

και το ως άνω άθροισμα είναι απολύτως συγκλίνον.

Μιγαδικό μέτρο

Γενικά μία μιγαδική συνάρτηση

$$\mathcal{M} \xrightarrow{v} \mathbb{C}$$

λέγεται **μιγαδικό μέτρο** αν ικανοποιεί το (3), δηλαδή αν για κάθε διαμέριση (E_j) του E (δηλαδή $E = U_j E_j$ και τα $E_j \in \mathcal{M}$ ξένα μεταξύ τους)

$$v(E) = \sum_j v\left(E_j\right),$$

και το ως άνω άθροισμα είναι απολύτως συγκλίνον.

Θα δώσουμε γρήγορα και χωρίς αποδείξεις, τις ιδιότητες των μιγαδικών μέτρων.

Κύμανση

Χρειαζόμαστε την **κύμανση** $|\nu|$ ενός μιγαδικού μέτρου, που για κάθε $E \in \mathcal{M}$, ορίζεται από τον τύπο

$$|\nu|(E) = sup \sum_j \left|\nu\left(E_j\right)\right|,$$

όπου το sup είναι επί όλων των διαμερίσεων $\left(E_j\right)$ του E.

Προφανώς

$$|\nu(E)| \leq |\nu|(E), \forall E \in \mathcal{M} \quad (1)$$

Πρόταση 1: Η κύμανση $|\nu|$ ενός μιγαδικού μέτρου, είναι θετικό και πεπερασμένο μέτρο ($|\nu|(\mathbb{X}) < \infty$).

Από την Πρόταση 1 και την (1) συμπεραίνουμε ότι κάθε μιγαδικό μέτρο είναι πεπερασμένο.

Απολύτως συνεχή μέτρα

Θα ξεκινήσουμε με μερικούς ορισμούς που μας είναι απαραίτητοι.

Αν μ είναι ένα θετικό μέτρο επί του $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$ και ν ένα μιγαδικό μέτρο, λέμε ότι το ν είναι **απολύτως συνεχές** ως προς το μ αν

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0.$$

Γράφουμε

$$\nu \ll \mu.$$

Έστω λ ένα μιγαδικό μέτρο και $A \in \mathcal{M}$ τ.ω.

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap A) \text{ για κάθε } E \in \mathcal{M}.$$

Αμοιβαίως ιδιάζοντα μέτρα (1)

Π.χ. αν $\lambda = \delta_{x_0}$, τότε $A = \{x_0\}$, ενώ αν

$$\lambda(E) = \int_0^1 \mathcal{X}_E(x) d\mu(x) \,,$$

τότε $A = [0,1]$.
Λέμε ότι η μάζα του λ είναι συγκεντρωμένη επί του A. Το μέτρο λ ζεί ουσιαστικά επί του A, αφού αν

$$E \cap A = \emptyset \Rightarrow \lambda(E) = 0.$$

Αν τώρα δύο μιγαδικά μέτρα λ και ν έχουν την μάζα τους συγκεντρωμένη επί των A και B αντίστοιχα και $A \cap B = \emptyset$, τότε λέμε πως τα μέτρα είναι **αμοιβαίως ιδιάζοντα** και γράφουμε

$$\lambda \perp \nu.$$

Αμοιβαίως ιδιάζοντα μέτρα (2)

Παρατήρηση 1: Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

1. αν $\lambda_1 \ll \mu$ και $\lambda_2 \perp \mu$, τότε $\lambda_1 \perp \lambda_2$.
2. αν $\lambda \ll \mu$ και $\lambda \perp \mu$, τότε $\lambda = 0$.

Το Θεώρημα των Radon-Nikodym που ακολουθεί αποσαφηνίζει πλήρως την δομή των μιγαδικών μέτρων.

Θεώρημα των Radon-Nikodym

Θεώρημα: Έστω $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$ μετρήσιμος και μ θετικό και σ-πεπερασμένο μέτρο. Αν λ είναι μιγαδικό μέτρο επί του $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$, τότε

1. Υπάρχει μοναδικό ζευγάρι μιγαδικών μέτρων λ_α και λ_s τ.ω.

$$\lambda = \lambda_\alpha + \lambda_s$$

και

$$\lambda_\alpha \ll \mu \text{ ενώ } \lambda_s \perp \mu.$$

2. Υπάρχει μοναδική $h \in L^1(\mu)$ τ.ω.

$$\lambda_\alpha(E) = \int_E h(x) d\mu(x). \quad (2)$$

Παρατηρήσεις

Πρίν περάσουμε στην απόδειξη, ας κάνουμε μερικές παρατηρήσεις.

Επειδή οι απλές συναρτήσεις είναι παντού πυκνές στον C_0^∞, από την (2) συνάγεται ότι για κάθε $f \in C_0^\infty$,

$$\int f(x)d\lambda_\alpha(x) = \int f(x)h(x)d\mu(x)$$

ή

$$d\lambda_\alpha = hd\mu,$$

το οποίο και γράφουμε συμβολικά ως

$$\frac{d\lambda_\alpha}{d\mu} = h.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος των Radon-Nikodym (1)

Παλαιότερα λέγαμε ότι η h είναι η παράγωγος Radon-Nikodym του λ_α ως προς μ. Σήμερα λέμε πως το λ_α έχει πυκνότητα h ως προς το μ.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε τα παρακάτω Λήμματα.

Λήμμα 1 (Μέσος όρος συνάρτησης): Έστω μ πεπερασμένο και θετικό μέτρο και $f \in L^1(\mu)$. Αν για κάθε μετρήσιμο E, ο μέσος όρος

$$M_E(f) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x) d\mu(x),$$

ικανοποιεί $|M_E(f)| \leq a$,

τότε και

$$|f(x)| \leq a, \sigma.\pi.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος των Radon-Nikodym (2)

Λήμμα 2: Αν το μ είναι θετικό και σ-πεπερασμένο, τότε υπάρχει $w \in L^1(\mu)$ τ.ω.

$$0 < w(x) < 1 \text{ για κάθε } x.$$

Απόδειξη [Radon-Nikodym]: Θα ακολουθήσουμε την απόδειξη του von Neumann που μας δίνει το 1. και το 2. του Θεωρήματος συγχρόνως. Η μοναδικότητα των λ_α και λ_s είναι εύκολη και αφήνεται ως άσκηση. Το ουσιαστικό και δύσκολο κομμάτι της απόδειξης είναι η ύπαρξη της h.

- **Βήμα 1**: Υποθέτουμε ότι το λ είναι θετικό και πεπερασμένο.

Ορίζουμε το μέτρο

$$\varphi = \lambda + w\mu,$$

όπου η w είναι η συνάρτηση του Λήμματος 2.

Απόδειξη [Radon-Nikodym] (1)

Το φ είναι θετικό και πεπερασμένο. Παρατηρούμε ότι για κάθε $f \in L^2(\varphi)$ έχουμε

$$\left|\int f d\lambda\right| \leq \int |f| d\lambda = \int |f| d\varphi - \int |f| w d\mu \leq \int |f| d\varphi$$

$$\leq \left(\int |f|^2 d\varphi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int 1^2 d\varphi\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int |f|^2 d\varphi\right)^{\frac{1}{2}} \varphi(\mathbb{X})^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|f\|_{L^2(\varphi)} \varphi(\mathbb{X})^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Άρα η αντιστοιχία

Απόδειξη [Radon-Nikodym] (2)

$$\begin{array}{ccc} L^2(\varphi) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ f & \rightsquigarrow & \Phi(f) = \int f d\lambda\,, \end{array}$$

είναι συνεχής.

Συνεπώς υπάρχει μοναδική $g \in L^2(\varphi)$ τ.ω.

$$\Phi(f) = \langle f, g \rangle_{L^2(\varphi)}$$

ή

$$\int f d\lambda = \int f g d\varphi\,. \quad (3)$$

Απόδειξη [Radon-Nikodym] (3)

Τώρα, για $f = \mathcal{X}_E$, η (3) γράφεται ως

$$\int_E d\lambda = \int_E g d\varphi \Rightarrow \int_E g d\varphi = \lambda(E).$$

Άρα

$$\frac{1}{\varphi(E)} \int_E g d\varphi = \frac{\lambda(E)}{\varphi(E)} \leq 1,$$

και από το Λήμμα του μέσου όρου έπεται ότι

$$0 \leq g(x) \leq 1, \sigma.\pi.$$

Θέτουμε

$$A = \{x: 0 \leq g(x) < 1\}, \qquad B = \{x: g(x) = 1\},$$

Απόδειξη [Radon-Nikodym] (4)

και ορίζουμε τα μέτρα

$$\lambda_\alpha(E) = \lambda(E \cap A) \; \kappa\alpha\iota \; \lambda_s(E) = \lambda(E \cap B)$$

Ξαναγράφουμε την (3) ως εξής

$$\int f d\lambda = \int f g d\varphi = \int f g d\lambda + \int f g w d\mu$$

ή

$$\int f(1-g) d\lambda = \int f g w d\mu . \quad (4)$$

Αν $f = \mathcal{X}_B$, τότε $\mathcal{X}_B(x)(1-g)(x) = 0$ αφού $g(x) = 1$ επί του B, και η (4) δίνει

Απόδειξη [Radon-Nikodym] (5)

$$\int \mathcal{X}_B(x)\big(1-g(x)\big)d\lambda(x) = 0 = \int_B w(x)d\mu(x).$$

Άρα

$$\mu(B) = 0 \; \alpha\varphi o\acute{\upsilon} \; w(x) \in (0,1).$$

Έπεται λοιπόν ότι

$$\lambda_s \perp \mu.$$

Αν τώρα στην (4) διαλέξω για

$$f(x) = (1 + g(x) + \cdots + g(x)^n)\mathcal{X}_E, E \in \mathcal{M},$$

προκύπτει ότι

Απόδειξη [Radon-Nikodym] (6)

$$\int_E (1 - g(x)^n) d\lambda(x)$$

$$= \int_E (1 + g(x) + \cdots + g(x)^n) g(x) w(x) d\mu(x)$$

ή

$$\int_{E\cap A} (1 - g(x)^n) d\lambda(x)$$

$$= \int_E (1 + g(x) + \cdots + g(x)^n) g(x) w(x) d\mu(x)\,, (5)$$

αφού $g(x) = 1$ επί του B.

Απόδειξη [Radon-Nikodym] (7)

Τώρα, επί του A, $0 \leq g(x) < 1$ και συνεπώς

$$(1 - g(x)^n) \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Από την κυριαρχούμενη σύγκλιση, έχουμε ότι

$$\int_{E\cap A} (1 - g(x)^n) d\lambda(x) \xrightarrow{n\to\infty} \int_{E\cap A} d\lambda(x) = \lambda_\alpha(E). \quad (6)$$

Τέλος,

$$(1 + g(x) + \cdots + g(x)^n) g(x) w(x) \nearrow h(x)$$

και από τις (5) και (6) συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda_\alpha(E) = \int_E h(x) d\mu(x).$$

Απόδειξη [Radon-Nikodym] (8)

΄Ομως $h(x) \geq 0$ και παίρνοντας $E = \mathbb{X}$ στην παραπάνω σχέση έχουμε ότι

$$\infty > \lambda_\alpha(A) = \lambda_\alpha(\mathbb{X}) = \int_{\mathbb{X}} h(x) d\mu(x)$$

άρα $h \in L^1(\mu)$.

- **Βήμα 2.** Γενική περίπτωση: λ μιγαδικό μέτρο

Γράφουμε

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$$

με λ_1 και λ_2 πραγματικά και φραγμένα μέτρα. Στην συνέχεια, με την βοήθεια της κύμανσης γράφουμε το λ_1 ως διαφορά θετικών μέτρων (ακριβώς όπως και στην περίπτωση των συναρτήσεων)

Απόδειξη [Radon-Nikodym] (9)

$$\lambda_1 = \lambda_1^+ - \lambda_1^-,$$

όπου

$$\lambda_1^+ = \frac{1}{2}(|\lambda_1| + \lambda_1)\ \kappa\alpha\iota\ \lambda_1^- = \frac{1}{2}(|\lambda_1| - \lambda_1)$$

και αντιστοίχως για το λ_2. Κατόπιν, εφαρμόζουμε το Βήμα 1. για τα λ_1^+….

Δυϊκότητα των L^p (1)

Μία από τις πιο ενδιαφέρουσες εφαρμογές του Θεωρήματος των Radon-Nikodym στην Ανάλυση είναι η δυϊκότητα των L^p.

Ας είναι $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$ μετρήσιμος και μ ένα θετικό μέτρο. Αν τα $p, q \in [1, \infty]$ είναι συζυγείς, αν δηλαδή $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, και $g \in L^q$, τότε για κάθε $f \in L^p$, το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{X}} f(x)g(x)d\mu(x) := \Phi_g(f)$$

είναι πεπερασμένο, αφού από την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\left|\int_{\mathbb{X}} f(x)g(x)d\mu(x)\right| \leq \|f\|_p \|g\|_q < \infty.$$

Δυϊκότητα των L^p (2)

Συνεπώς, η $f \to \Phi_g(f)$ είναι ένα συνεχές και γραμμικό συναρτησοειδές επί του L^p, δηλαδή ένα στοιχείο του δυϊκού $(L^p)'$ του L^p.

Στην ειδική περίπτωση $p = q = 2$, και μόνο σε αυτήν, ο L^2 είναι χώρος Hilbert, και είναι γνωστό από την Συναρτησιακή Ανάλυση ότι κάθε χώρος Hilbert είναι ισόμορφος με τον δυϊκό του. Άρα

$$(L^2)' = L^2.$$

Μάλιστα, αν $\Phi \in (L^2)'$, τότε υπάρχει μοναδική $g \in L^2$ τ.ω.

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{X}} f(x)g(x)d\mu(x)\,, \forall f \in L^2.$$

Δυϊκότητα των L^p (3)

Το ερώτημα λοιπόν είναι εύλογο: Μήπως όλα τα συνεχή συναρτησοειδή του L^p δίδονται από ένα $g \in L^q$, δηλαδή για κάθε $\Phi \in (L^p)'$ υπάρχει μοναδική $g \in L^q$ τ.ω.

$$\Phi(f) = \Phi_g(f) = \int_{\mathbb{X}} f(x)g(x)d\mu(x), \forall f \in L^p \ ?$$

Αν έτσι είναι τα πράγματα, τότε συμπεραίνουμε πως

$$(L^p)' = L^q.$$

Το Θεώρημα που ακολουθεί μας λέει πως τα πράγματα είναι έτσι όταν $p \in [1, \infty]$ και όταν το μέτρο είναι σ-πεπερασμένο. Χάνουμε μόνο την περίπτωση $p = \infty$ όπου έχουμε τον $L^1 \subsetneq (L^\infty)'$.

Δυϊκότητα των L^p (4)

Παράδειγμα 1: Αν $\mathbb{X} = [0,1]$ και μ είναι το μέτρο του Lebesgue, τότε η Dirac $\delta_0 \in (L^\infty)'$ αλλά δεν παράγεται από τον L^1, δηλαδή δεν υπάρχει $g \in L^1$ τ.ω. $\delta_0 = \Phi_g$.

Απόδειξη: Για κάθε $f \in L^\infty$,

$$\delta_0(f) = f(0),$$

άρα

$$|\delta_0(f)| \leq sup|f(x)| = \|f\|_\infty \Rightarrow \delta_0 \in (L^\infty)'.$$

Έστω τώρα ότι υπάρχει $g \in L^1$ τ.ω. $\delta_0 = \Phi_g$ δηλαδή

$$\delta_0(f) = f(0) = \int_{[0,1]} f(x)g(x)d\mu(x).$$

Δυϊκότητα των L^p (5)

Αν

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & \alpha\nu\ 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0, & \alpha\nu \dfrac{1}{n} < x \leq 1, \end{cases}$$

τότε

$$\delta_0(f_n) = 1, \forall n,$$

ενώ από την Κυριαρχούμενη σύγκλιση έχουμε ότι

$$\int_{[0,1]} f_n(x) g(x) d\mu(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

άτοπο.

Δυϊκότητα των L^p (6)

Θεώρημα: Έστω $(\mathbb{X}, \mathcal{M})$ μετρήσιμος και μ θετικό και σ-πεπερασμένο μέτρο. Αν $\Phi \in (L^p)'$, τότε υπάρχει μοναδική $g \in L^q$ τέτοια ώστε

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{X}} f(x)g(x)d\mu(x)\,, \forall f \in L^p.$$

Άρα

$$(L^p)' = L^q$$

και επιπλέον η αντιστοιχία

$$\begin{array}{ccc} (L^p)' & \to & L^q \\ \Phi & \rightsquigarrow & g, \end{array}$$

είναι ισομετρία, δηλαδή

$$\|\Phi\| = \|g\|_q.$$

Βιβλιογραφία

1. G.B. Folland, Real Analysis, Modern techniques and their applications, John Wiley and sons, 1984, New York.
2. P. Malliavin, Integration et Probabilites, Analyse de Fourier et Analyse Spectrale, Masson, 1982, Paris.
3. Μιχ. Γ. Μαριάς, Μαθήματα Αρμονικής ανάλυσης, Εκδόσεις ζήτη, 2001, Θεσσαλονίκη.
4. W.Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1970, New York.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης