ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης

Ενότητα 7: Χρήσιμες ανισότητες

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Ανισότητα Chebychev.
2. Ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα.
3. Ανισότητα Hardy.
4. Η ανισότητα του Young.
5. Η ανισότητα Young για συνελίξεις.

Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε ορισμένες σημαντικές ανισότητες που σχετίζονται με τους χώρους L^p.

Χρήσιμες ανισότητες

Οι χώροι L^p είναι πολύ σημαντικοί στην Ανάλυση και η παρουσία τους συνοδεύεται πάντα με δύσκολες εκτιμήσεις και ανισότητες, οι συνηθέστερες των οποίων είναι οι ανισότητες Hölder και Minkowski.

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε ορισμένες σημαντικές ανισότητες που σχετίζονται με τους χώρους L^p.

Στην παράγραφο αυτή το μ είναι θετικό μέτρο.

Η ανισότητα του Chebychev που ακολουθεί είναι εύκολη αλλά και πολύ χρήσιμη.

Πρόταση 1 (Ανισότητα Chebychev)

Πρόταση 1 (Ανισότητα Chebychev): Αν $f \in L^p$ και $p \in [1, \infty)$, τότε για κάθε $a > 0$,

$$\mu\{x: |f(x)| > a\} \leq \left(\frac{\|f\|_p}{a}\right)^p \quad (1)$$

Ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα (1)

Θεώρημα 1 (Ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα): Έστω $(\mathbb{X}, \mathcal{M}, \mu)$ και $(\mathbb{Y}, \mathcal{N}, \nu)$, σ-πεπερασμένοι μετρητοί χώροι (τα μέτρα μ και ν θετικά) και $f(x,y) - \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ μετρήσιμη. Αν $1 \leq p < \infty$ τότε

$$\left(\int_{\mathbb{X}} \left|\int_{\mathbb{Y}} f(x,y)d\nu(y)\right|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \int_{\mathbb{Y}} \left(\int_{\mathbb{X}} |f(x,y)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y)$$

Ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα (2)

Η Minkowski μας λέει ότι η νόρμα ενός ολοκληρώματος, είναι πάντα μικρότερη από το ολοκλήρωμα της αντίστοιχης νόρμας.

Η ανισότητα που ακολουθεί είναι ένα αποτέλεσμα των Hardy-Littlewood-Polya, που αφορά ολοκληρωτικούς τελεστές επί της ημιευθείας $(0, \infty)$ και είναι μια ωραία εφαρμογή της ανισότητας Minkowski για ολοκληρώματα.

Ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα (3)

Θεώρημα 2: Έστω $K(x, y)$ μετρήσιμη επί του $(0, \infty)^2$ τ.ω.

$$K(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda} K(x, y), \forall \lambda > 0,$$

και

$$\int_0^\infty |K(x, y)| x^{\frac{1}{p}} dx = C < \infty$$

για κάποιο $p \in [1, \infty)$.

Τότε ο ολοκληρωτικός τελεστής

$$Tf(y) = \int_0^\infty K(x, y) f(x) dx\,,$$

είναι συνεχής επί του L^p ενώ

Ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα (4)

ο

$$Sf(x) = \int_0^{\infty} K(x,y) f(y) dy\,,$$

είναι συνεχής επί του L^q, όπου το q είναι το συζυγές του p.

Ανισότητα Hardy διαστημάτων

Πόρισμα 1 (Ανισότητα Hardy): Αν ο T είναι ο μέσος όρος της f επί των διαστημάτων $(0, x)$, δηλαδή

$$Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy\,,$$

δείξτε ότι για κάθε $p \in (1, \infty)$,

$$\|Tf\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

Θεώρημα Παρεμβολής του Riesz

Για την ανισότητα του Young που ακολουθεί, χρειαζόμαστε το θεώρημα παρεμβολής του Riesz στην γενική του μορφή.

Θεώρημα 3 (Παρεμβολής του M.Riesz): Αν $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ και ο τελεστής T είναι συνεχής από τον L^{p_0} στον L^{q_0}, και από τον L^{p_1} στον L^{q_1}, τότε ο T είναι και συνεχής από τον L^{p_t} στον L^{q_t} όπου

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \text{ και } \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}, t \in (0,1).$$

Παρατηρώ ότι τα ως άνω p_t είναι όλα τα p του διαστήματος (p_0, p_1). Το ίδιο και για τα q_t.

Η ανισότητα του Young (1)

Θεώρημα 4 (Η ανισότητα του Young): Ας είναι ο τελεστής

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy\,,$$

και ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $r \geq 1$, υπάρχει $C > 0$ τ.ω.

$$\sup_x \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} \text{και} \sup_y \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} \leq C$$

Αν τα $1 \leq p \leq q \leq \infty$, ικανοποιούν

$$\frac{1}{r} = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right),$$

Η ανισότητα Young (2)

τότε $\exists c > 0$ τ.ω.

$$\|Tf\|_q \leq c\|f\|_p,$$

δηλαδή ο τελεστής T είναι συνεχής από τον L^p στον L^q.

Πόρισμα 2 (Η ανισότητα Young για συνελίξεις): Αν $f \in L^p$ και $g \in L^q$, τότε η συνέλιξη $f * g \in L^r$ όπου $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, και επιπλέον

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Βιβλιογραφία

1. G.B. Folland, Real Analysis, Modern techniques and their applications, John Wiley and sons, 1984, New York.
2. P. Malliavin, Integration et Probabilites, Analyse de Fourier et Analyse Spectrale, Masson, 1982, Paris.
3. Μιχ. Γ. Μαριάς, Μαθήματα Αρμονικής ανάλυσης, Εκδόσεις ζήτη, 2001, Θεσσαλονίκη.
4. W.Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1970, New York.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης. Ενότητα 7: Χρήσιμες ανισότητες». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS436/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-2015

BY SA

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης