Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Θεωρία Μέτρου και ολοκλήρωσης
Ασκήσεις

Μιχάλης Μαριάς
Τμήμα Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Οκτώβριος 2013

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα

Ενότητα 2η και Ενότητα 3η

- Δείξτε ότι το Λήμμα του Fatou ισχύει αν f_n είναι μετρήσιμες και

$$f_n \geq -g, \text{ όπου } g \in L^1 \text{ και θετική.}$$

- Έστω ότι οι $f_n \in L^1$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα.
    1. αν $\mu(\mathbb{X}) < \infty$, τότε $f \in L^1$ και $\int f_n \to \int f$.
    2. αν $\mu(\mathbb{X}) = \infty$, τότε το (1) δεν ισχύει. (βρείτε αντιπαραδείγματα στον $\mathbb{R}$)
- (Γενίκευση της Κυριαρχούμενης σύγκλισης). Αν οι $f_n, g_n, f, g \in L^1$ και

$$g_n \to g, \sigma.\pi.,$$

$$\int g_n \to \int g\,, \kappa\alpha\iota$$

$$|f_n| \leq |g_n|,$$

τότε $\int f_n \to \int f$. (Ξαναδουλέψτε την απόδειξη της Κυριαρχούμενης σύγκλισης).

- Υποθέτουμε ότι $f_n, f \in L^1$ και $f_n \to f$ σ.π. Τότε

$$\int |f_n - f| \to 0 \; \alpha\nu\nu \; \int |f_n| \to \int |f|.$$

- Έστω

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \alpha\nu\ x \in (0,1), \\ 0, & \alpha\nu\ ό\chi\iota. \end{cases}$$

και ας είναι $r_n, n \in \mathbb{N}$, όλοι οι ρητοί. Θέτουμε

$$g(x) = \sum_n f(x - r_n).$$

1. Δείξτε ότι $g \in L^1$ και συνεπώς $g < \infty$ σ.π.
2. Δείξτε ότι η g είναι παντού ασυνεχής και πωε είναι μη φραγμένη σε κάθε διάστημα.
3. Δείξτε ότι $g^2 < \infty$, αλλά η g^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα.

- Αν $g \in L^1(\mathbb{R})$ και

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(s)ds,$$

δείξτε ότι η G είναι συνεχής.

- Θέτουμε

$$f_n(x) = ae^{-anx} - be^{-bnx},$$

όπου $0 < a < b$. Δείξτε ότι

1. $\sum_1^\infty \int_0^\infty |f_n(x)| dx = \infty$.

2. $\sum_1^\infty \int_0^\infty f_n(x)dx = \infty$.
3. $\sum_1^\infty f_n \in L^1(0,\infty)$ και $\int_0^\infty \sum_1^\infty f_n\,(x)dx = \log\frac{b}{a}$.

- Υπολογίστε τα παρακάτω όρια δικαιολογώντας τους υπολογισμούς

1. $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \eta\mu\left(\frac{x}{n}\right)\frac{dx}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.
2. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1+nx^2)\frac{dx}{(1+x^2)^n}$.
3. $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty n\eta\mu\left(\frac{x}{n}\right)\frac{dx}{x(1+x^2)}$.
4. $\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \frac{ndx}{(1+n^2x^2)}$.

(διακρίναμε τις περιπτώσεις $a<0, a=0$ και $a>0$).

- Παραγωγίζοντας την σχέση

$$\int_0^\infty e^{-tx}dx = \frac{1}{t},$$

δείξτε ότι

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$$

Με τον ίδιο τρόπο δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx = (2n)!\,\frac{\sqrt{\pi}}{4^n n!},$$

παραγωγίζοντας την

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}.$$

- Υπολογίστε τα ολοκληρώματα που ακολουθούν, αναπτύσσοντας τα σε σειρά και δικαιολογώντας την ολοκλήρωση όρο προς όρο.

1. Για $a>0$,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\sigma\upsilon\nu axdx = \sqrt{\pi}e^{-\alpha^2/4}.$$

2. Για $a>-1$,

$$\int_0^1 x^a\frac{logx}{1-x}dx = \sum_1^\infty \frac{1}{(a+k)^2}.$$

3. Για $a>1$,

$$\int_0^\infty x^{a-1}\frac{dx}{e^x-1} = \Gamma(a)\zeta(a),$$

όπου $\zeta(a) = \sum_1^\infty \frac{1}{k^a}$ είναι η περιώνυμη συνάρτηση ζ του Riemann.

Ενότητα 4η

- Διερευνείστε πότε τα ολοκληρώματα

$$\iint_{[0,1]^2} f(x,y)dxdy\,, \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx,$$

υπάρχουν και είναι ίσα όταν

1. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$,
2. $f(x,y) = \frac{1}{(1-xy)^\beta}, \beta > 0$.
3. $f(x,y) = \left(x - \frac{1}{4}\right)^{-3} \;\; \alpha\nu \; 0 < y < \left|x - \frac{1}{4}\right| \;\; \kappa\alpha\iota \; 0 \; \alpha\nu \; o\chi\iota.$

- Αν η f είναι ολοκληρώσιμη επί του $(0,R)$και

$$F(x) = \int_x^R \frac{f(s)ds}{s},$$

δείξτε ότι και η F είναι ολοκληρώσιμη και ότι

$$\int_0^R F(x)dx = \int_0^R f(x)dx.$$

- Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty e^{-sx}\frac{\eta\mu x dx}{x} = \tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{1}{s}, s > 0,$$

ολοκληρώνοντας την $e^{-sxy}\eta\mu x$ ως προς x και y. (Θυμίζουμε ότι $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta}$).

- Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty e^{-sx}\frac{\eta\mu^2 x dx}{x} = \frac{1}{4}\log\left(1 + \frac{4}{s^2}\right), s > 0,$$

ολοκληρώνοντας την $e^{-sxy}\eta\mu 2xy$ ως προς x και y.

- Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty \left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \infty,$$

ενώ

$$\int_0^R \frac{\eta\mu x dx}{x} \xrightarrow{R\to\infty} \frac{\pi}{2}.$$

- (**Συνάρτηση Γάμμα**) Για $Rez > 0$, θέτουμε

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

1. Δείξτε ότι το ως άνω ολοκλήρωμα είναι απολύτως συγκλίνων και ότι ισχύει

$$\Gamma(z+1)z\Gamma(z). \quad (1)$$

Από την σχέση $\Gamma(1) = 1$, συμπεραίνουμε ότι $\Gamma(n) = (n-1)!$

2. Θέστε

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

και χρησιμοποιώντας την (1), κάντε την επέκταση της Γ σ'όλο το $\mathbb{C}$ πλήν των αρνητικών ακεραίων.

3. Δείξτε ότι

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\,, x, y > 0.$$

(Υπόδειξη: Γράψτε το $\Gamma(x)\Gamma(y)$ ως διπλό ολοκλήρωμα …)

- Αν η f συνεχής και

$$I_a(f)(x) := \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty (x-t)^{a-1}f(t)dt\,, a > 0$$

δείξτε ότι

$$I_{\alpha+\beta}(f) = I_\alpha(f)I_\beta(f).$$

- Αν $f, g \in L^1(\mathbb{X}, d\mu)$, δείξτε ότι η

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{X}} f(x-y)\, g(y)d\mu(y)$$

ανήκει στον $L^1(\mathbb{X}, d\mu)$ και

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1.$$

- Αν

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, f\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ C^\infty\ \kappa\alpha\iota\ 0\ \acute{\varepsilon}\xi\omega\ \alpha\pi o\ \acute{\varepsilon}\nu\alpha\ \sigma\upsilon\mu\pi\alpha\gamma\acute{\varepsilon}\varsigma\},$$

δείξτε ότι η

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}, & \alpha\nu\ \|x\|^2 \leq 1, \\ 0, & \alpha\nu\ \|x\|^2 > 1, \end{cases}$$

ανήκει στον $C_0^\infty\big(B(0,1)\big)$.

- Έστω f απλή με συμπαγή φορέα το K, και $\psi \in C_0^\infty\big(B(0,1)\big)$ τ.ω. $\int \psi = 1$. Για $\varepsilon > 0$, θέτουμε

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \varepsilon y)\psi(y)dy = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy.$$

1. Δείξτε ότι η $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ και προσδιορίστε τον φορέα της.
2. Δείξτε ότι

$$\|f - f_\varepsilon\|_1 \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

3. Συμπεράνατε ότι ο $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι παντού πυκνός στον $L^1(\mathbb{R}^n)$.