ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Υπόγεια Υδραυλική και Υδρολογία

Ενότητα 5: Αριθμητική επίλυση του μαθηματικού ομοιώματος: πεπερασμένες διαφορές

Καθηγητής Κωνσταντίνος Λ. Κατσιφαράκης
Αναπληρωτής Καθηγητής Νικόλαος Θεοδοσίου

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών ΑΠΘ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αριθμητική επίλυση του μαθηματικού ομοιώματος: πεπερασμένες διαφορές

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ (1/2)

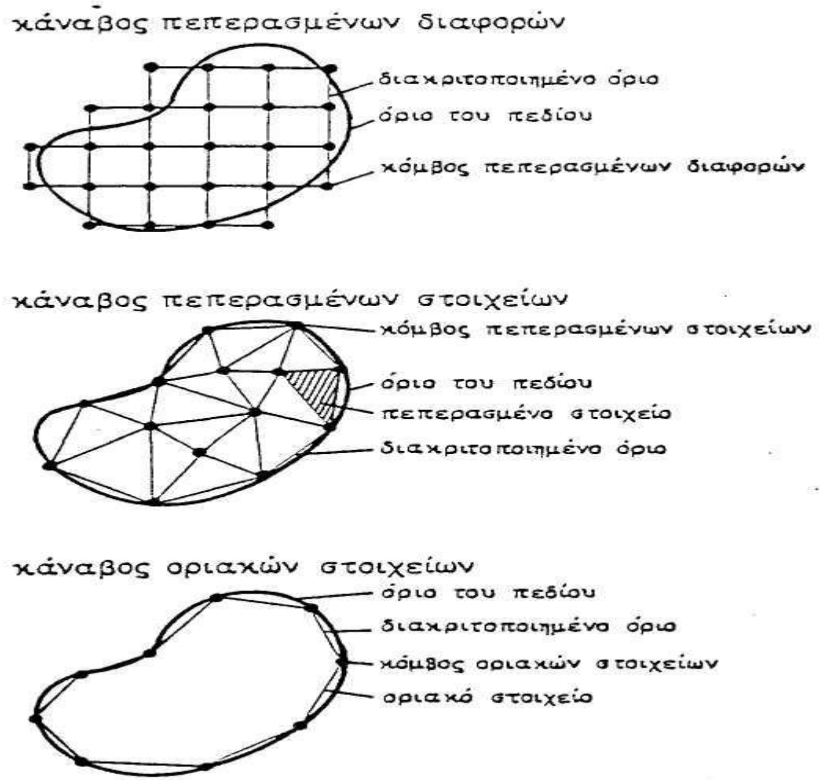
Οι πιο συνηθισμένες αριθμητικές μέθοδοι είναι οι:

α) η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών,

β) η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων,

γ) η μέθοδος των οριακών στοιχείων και

δ) η μέθοδος των κινούμενων σημείων.



Σχήμα 1: Μορφές διακριτοποίησης πεδίων.

Πηγή: Περικλής Λατινόπουλος, Προστασία και Εξυγίανση των Υπόγειων Νερών – Σημειώσεις Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Προστασία Περιβάλλοντος και Βιώσιμη Ανάπτυξη», Θεσσαλονίκη 2006, σελ. 115.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ (2/2)

Α΄ Στάδιο: Αξιολόγηση του μοντέλου σε ότι αφορά τα αριθμητικά σφάλματα από την επίλυση του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων. Η διαδικασία αυτή γίνεται συνήθως συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με αντίστοιχα αποτέλεσμα αναλυτικών λύσεων.

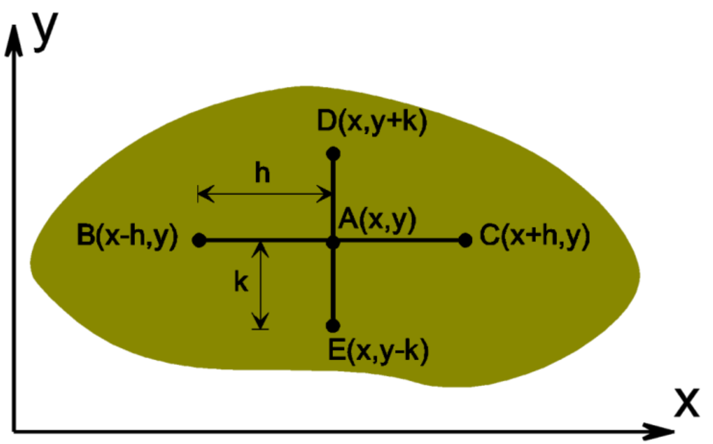
Β΄ Στάδιο: Έλεγχος αν πράγματι το μοντέλο προσομοιώνει τα φυσικά φαινόμενα τα οποία υποτίθεται ότι αναπαράγει. Αυτή η διαδικασία ελέγχου υλοποιείται συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του μοντέλου με αντίστοιχες μετρήσεις στο εργαστήριο ή στο πεδίο.

Γ΄ Στάδιο: Φάση εφαρμογής του μοντέλου, με στόχο την προσομοίωση των φυσικών φαινομένων ενός πραγματικού συστήματος και ειδικότερα η διερεύνηση ή η πρόγνωση των πιο δυσμενών καταστάσεών του.

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (1/23)

- Πραγματικά πεδία - ακανόνιστα όρια
- Η αριθμητική ανάλυση δίνει λύσεις σε πεδία ροής με πολύπλοκη γεωμετρική μορφή
- Καταλήγει σε αριθμητικές τιμές και όχι σε γενικές κλειστές λύσεις
- Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών
- Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (2/23)



- **Ανάπτυξη σε σειρά Taylor**

$$\Phi(x+h,y)=\Phi(x,y)+h\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3\Phi(x,y)}{\partial x^3}+\ldots$$

$$\Phi(x-h,y)=\Phi(x,y)-h\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2}-\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3\Phi(x,y)}{\partial x^3}+\ldots$$

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (3/23)

$$\Phi(x+h,y)=\Phi(x,y)+h\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3\Phi(x,y)}{\partial x^3}+...$$

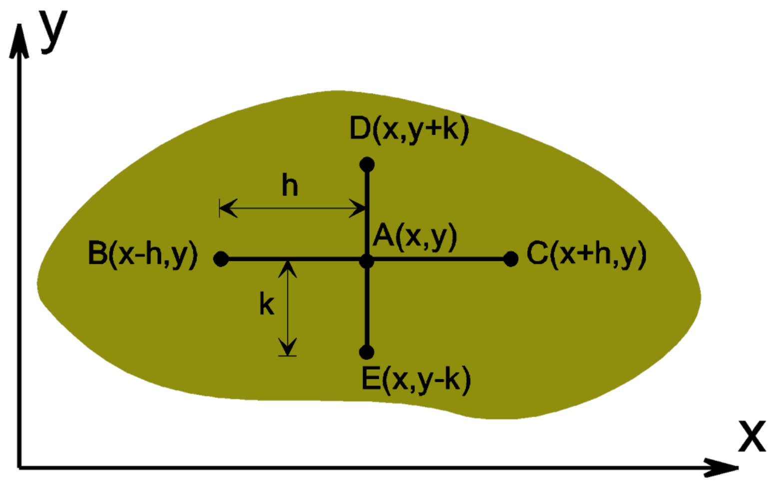
$$\Phi(x-h,y)=\Phi(x,y)-h\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2}-\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3\Phi(x,y)}{\partial x^3}+...$$

$$\Phi(x+h,y)+\Phi(x-h,y)=2\Phi(x,y)+h^2\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2}+0(h^4)$$

$$\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2}=\frac{1}{h^2}[\Phi(x+h,y)-2\Phi(x,y)+\Phi(x-h,y)]+0(h^2)$$

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (4/23)

- **Δεύτερες παράγωγοι υπό μορφή πεπερασμένων διαφορών**



$$\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2}=\frac{1}{h^2}[\Phi(x+h,y)-2\Phi(x,y)+\Phi(x-h,y)]+0(h^2)$$

$$\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial y^2}=\frac{1}{k^2}[\Phi(x,y+k)-2\Phi(x,y)+\Phi(x,y-k)]+0(k^2)$$

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (5/23)

$$\Phi(x+h,y)=\Phi(x,y)+h\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3\Phi(x,y)}{\partial x^3}+...$$

$$\Phi(x-h,y)=\Phi(x,y)-h\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2}-\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3\Phi(x,y)}{\partial x^3}+...$$

$$\Phi(x+h,y)-\Phi(x-h,y)=2h\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}+0(h^3)$$

- **Τύπος κεντρικής διαφοράς**

$$\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{2h}[\Phi(x+h,y)-\Phi(x-h,y)]+0(h^2)$$

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (6/23)

$$\Phi(x+h,y)=\Phi(x,y)+h\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3\Phi(x,y)}{\partial x^3}+\dots$$

$$\Phi(x-h,y)=\Phi(x,y)-h\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2}-\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3\Phi(x,y)}{\partial x^3}+\dots$$

- **Τύπος εμπροσθοδρομικής διαφοράς**

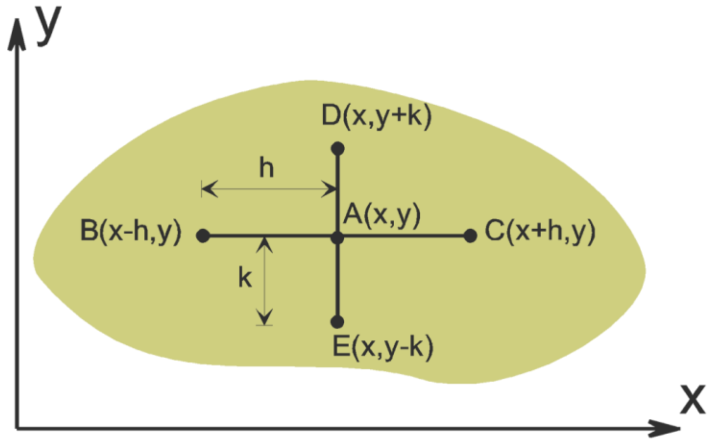
$$\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{h}[\Phi(x+h,y)-\Phi(x,y)]+0(h)$$

- **Τύπος οπισθοδρομικής διαφοράς**

$$\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{h}[\Phi(x,y)-\Phi(x-h,y)]+0(h)$$

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (7/23)

- **Πρώτες παράγωγοι υπό μορφή πεπερασμένων διαφορών**



- **Τύπος κεντρικής διαφοράς**

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2h}[\Phi(x+h,y) - \Phi(x-h,y)] + 0(h^2)$$

- **Τύπος εμπροσθοδρομικής διαφοράς**

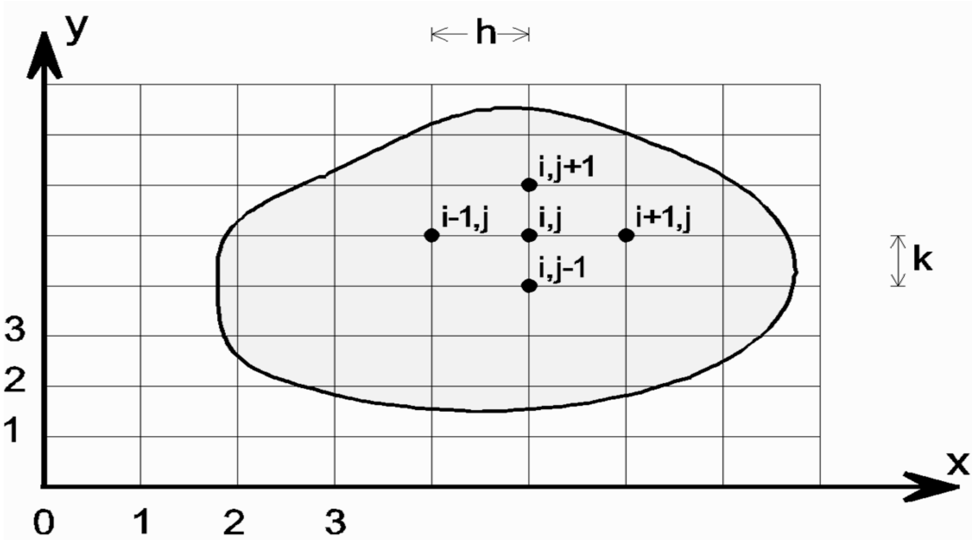
$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{h}[\Phi(x+h,y) - \Phi(x,y)] + 0(h)$$

- **Τύπος οπισθοδρομικής διαφοράς**

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{h}[\Phi(x,y) - \Phi(x-h,y)] + 0(h)$$

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (8/23)

- **Συμβολισμοί**



Σχήμα 2: ορθογωνικό δίκτυο.

Πηγή: Δημ. Τολίκας, ο.π.,σελ. 87.

- **Δεύτερη παράγωγος:** $$\frac{\partial^2 \Phi_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\left(\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}\right)$$

- **Πρώτη παράγωγος (τύπος κεντρικής διαφοράς):** $$\frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial x} = \frac{1}{2h}\left(\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}\right)$$

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (9/23)

- **Προσέγγιση της εξίσωσης Laplace υπό μορφή πεπερασμένων διαφορών**
    - **Εξίσωση Laplace:** $$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0$$
    - **Δεύτερη παράγωγος ως προς x:** $$\frac{\partial^2\Phi_{i,j}}{\partial x^2}=\frac{1}{h^2}(\Phi_{i+1,j}-2\Phi_{i,j}+\Phi_{i-1,j})$$
    - **Δεύτερη παράγωγος ως προς y:** $$\frac{\partial^2\Phi_{i,j}}{\partial y^2}=\frac{1}{k^2}(\Phi_{i,j+1}-2\Phi_{i,j}+\Phi_{i,j-1})$$
- **Τύπος 5 σημείων:** $$\Phi_{i+1,j}+\Phi_{i-1,j}+r^2(\Phi_{i,j+1}+\Phi_{i,j-1})-2(1+r^2)\Phi_{i,j}=0$$

Όπου $$r=\frac{h}{k}$$

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (10/23)

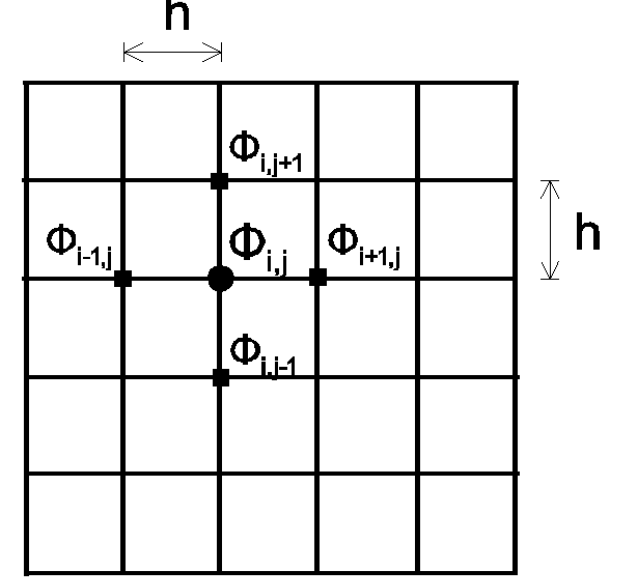
- **Τύπος 5 σημείων:**

$$\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + r^2(\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1}) - 2(1+r^2)\Phi_{i,j} = 0$$ Όπου $r = \frac{h}{k}$

- **Η εξίσωση των 5 σημείων σε τετραγωνικό δίκτυο (h=k, r=1)**

$$\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1} - 4\Phi_{i,j} = 0$$

$$\Phi_{i,j} = \frac{\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1}}{4}$$

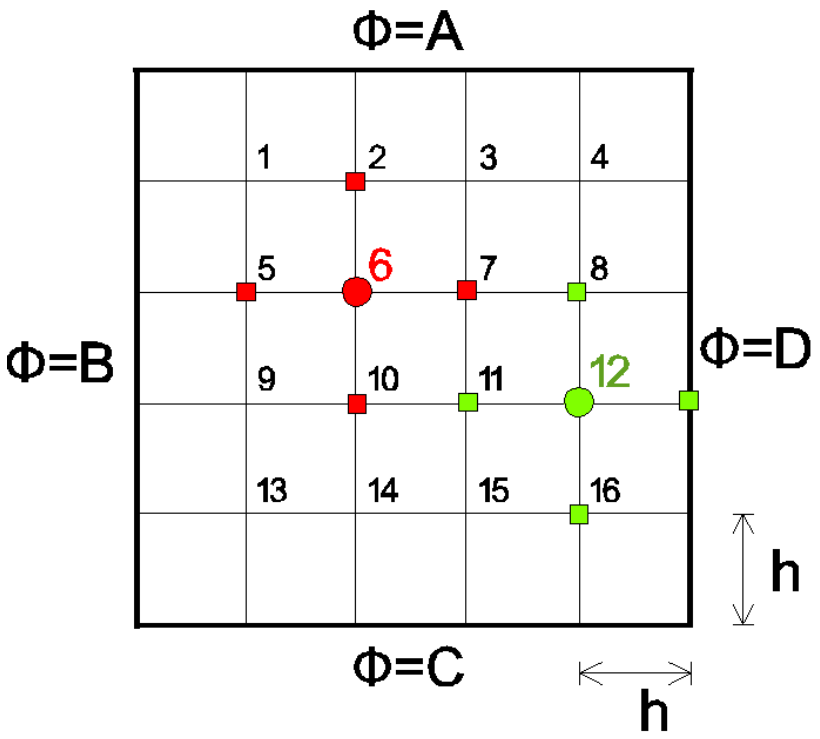


Σχήμα 3: τετραγωνικό δίκτυο.

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (11/23)

- **Δεδομένα: Το πεδίο ροής του σχήματος**

- **Ζητούμενα: Ο υπολογισμός των τιμών του δυναμικού στους κόμβους του τετραγωνικού δικτύου 1, 2, 3, …, 16**



Σχήμα 4: τετραγωνικό δίκτυο άσκησης.

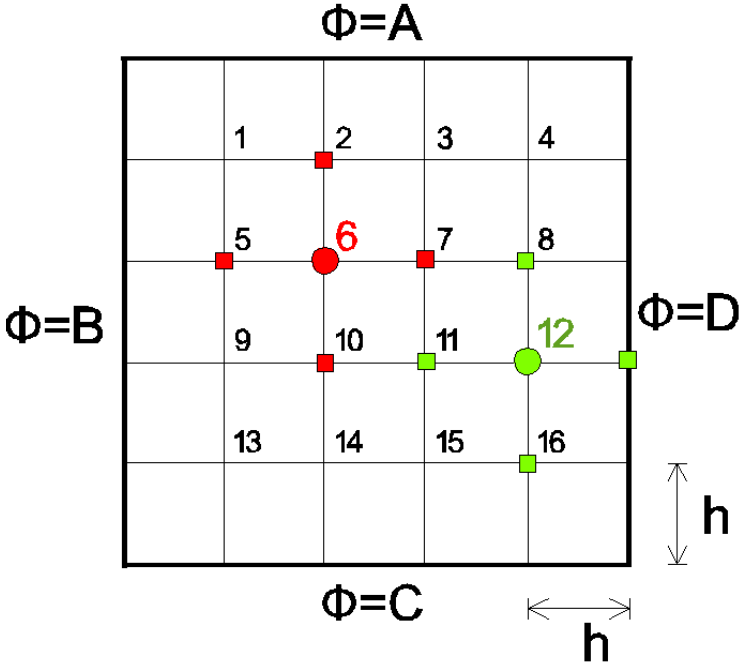
ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (12/23)

- **Εξισώσεις εσωτερικών κόμβων του δικτύου (π.χ. κόμβος 6) :**

$$\Phi_6 = \frac{\Phi_5 + \Phi_7 + \Phi_2 + \Phi_{10}}{4}$$

- **Εξισώσεις κόμβων που γειτνιάζουν με όρια του πεδίου ροής (π.χ. κόμβος 12):**

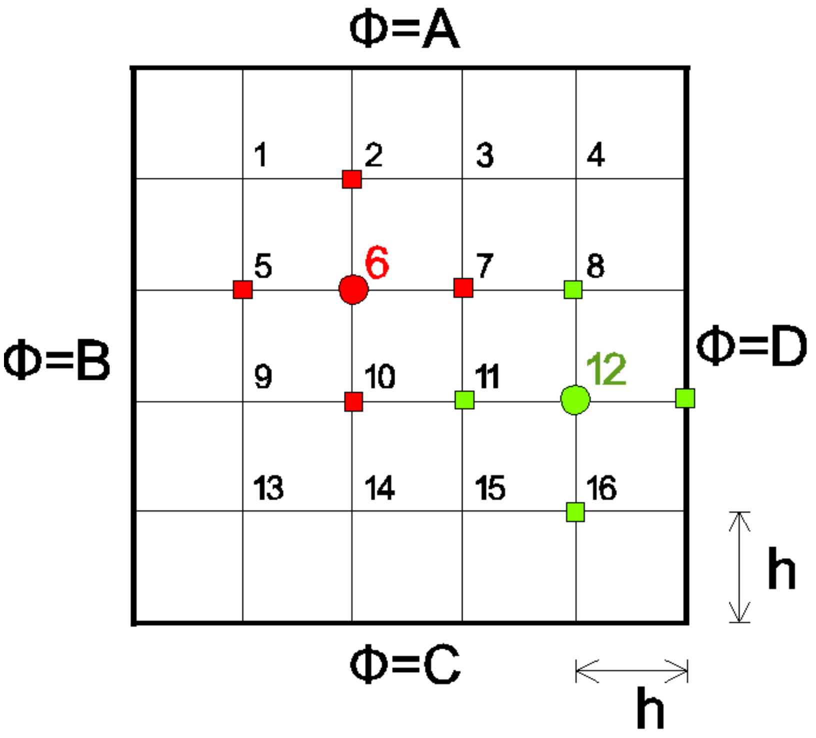
$$\Phi_{12} = \frac{\Phi_{11} + D + \Phi_8 + \Phi_{16}}{4}$$



Σχήμα 5: τετραγωνικό δίκτυο άσκησης.

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (13/23)

- **Γράφονται οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών για όλους τους κόμβους του δικτύου 1, 2, 3, …, 16**
- **Δημιουργείται σύστημα 16 εξισώσεων με 16 αγνώστους**
- **Από την επίλυση του συστήματος προκύπτουν οι τιμές του δυναμικού στους κόμβους 1, 2, 3, …, 16**



Σχήμα 6: τετραγωνικό δίκτυο άσκησης.

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (14/23)

$$\begin{bmatrix} \mathrm{xxxxx000000000} \\ \mathrm{0xxxxx00000000} \\ \mathrm{00xxxxx0000000} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{00000000xxxxx0} \\ \mathrm{000000000xxxxx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \cdots \\ \Phi_{n-1} \\ \Phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdots \\ A_{n-1} \\ A_n \end{bmatrix}$$

- **Χαρακτηριστικά του συστήματος**
  - **Έχει πολλούς αγνώστους**
  - **Δεν είναι πλήρες, με μη μηδενικούς ισχυρούς όρους κατά τη διαγώνιο του μητρώου των συντελεστών των αγνώστων**
  - **Επιλύεται με επαναληπτικές μεθόδους**

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (15/23)

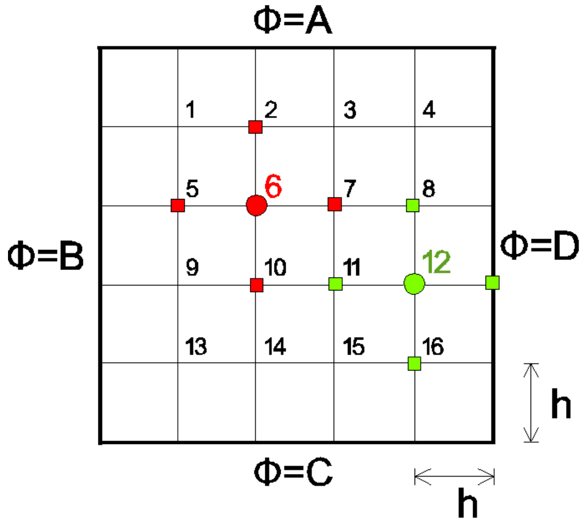
$$\Phi_1 = \frac{B + \Phi_2 + A + \Phi_5}{4} \quad (1)$$

$$\Phi_2 = \frac{\Phi_1 + \Phi_3 + A + \Phi_6}{4} \quad (2)$$

$$\Phi_3 = \frac{\Phi_2 + \Phi_4 + A + \Phi_7}{4} \quad (3)$$

....

$$\Phi_{16} = \frac{\Phi_{15} + D + \Phi_{12} + C}{4} \quad (16)$$



Σχήμα 7: τετραγωνικό δίκτυο άσκησης.

- **Δίνονται αρχικά μηδενικές τιμές στα Φ_1, Φ_2, Φ_3, ... , Φ_{16} του δεξιού μέλους των εξισώσεων 1 ως 16**
- **Από τις εξισώσεις 1 ως 16 υπολογίζονται οι τιμές Φ_1, Φ_2, Φ_3, ... , Φ_{16} των αριστερών μελών**
- **Γίνονται συνεχείς επαναλήψεις μέχρις ότου οι τιμές των Φ_1, Φ_2, Φ_3, ... , Φ_{16}, σε δύο διαδοχικές επαναλήψεις δεν διαφέρουν περισσότερο από μια μικρή ποσότητα ε που τίθεται ως κριτήριο ακρίβειας**

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (16/23)

- **Επαναληπτικός τύπος κατά τη μέθοδο Gauss - Seidel**

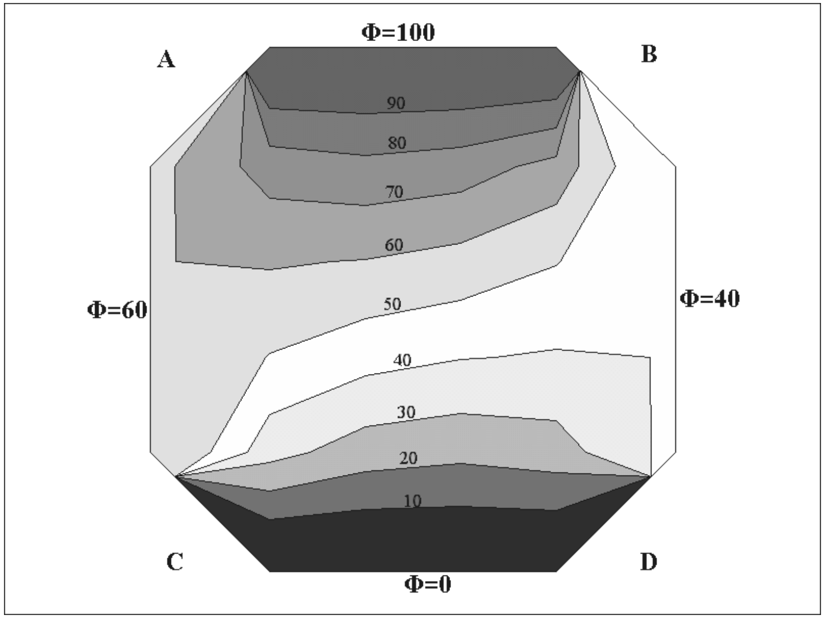
$$\Phi_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{2(1+r^2)}[\Phi_{i+1,j}^{(n)} + \Phi_{i-1,j}^{(n+1)} + r^2(\Phi_{i,j-1}^{(n+1)} + \Phi_{i,j+1}^{(n)})]$$

- **Η λύση επιτυγχάνεται όταν σε δύο διαδοχικές επαναλήψεις (n-1) και (n) ισχύει η σχέση:**

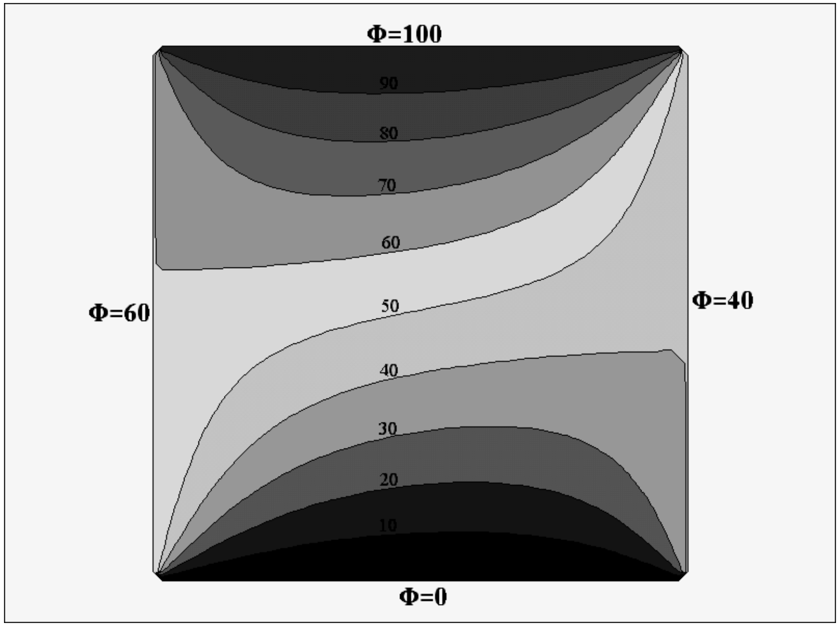
$$\left|\Phi_{i,j}^{(n)} - \Phi_{i,j}^{(n-1)}\right| < \varepsilon$$

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (17/23)

- **Συγκριτική επίλυση**

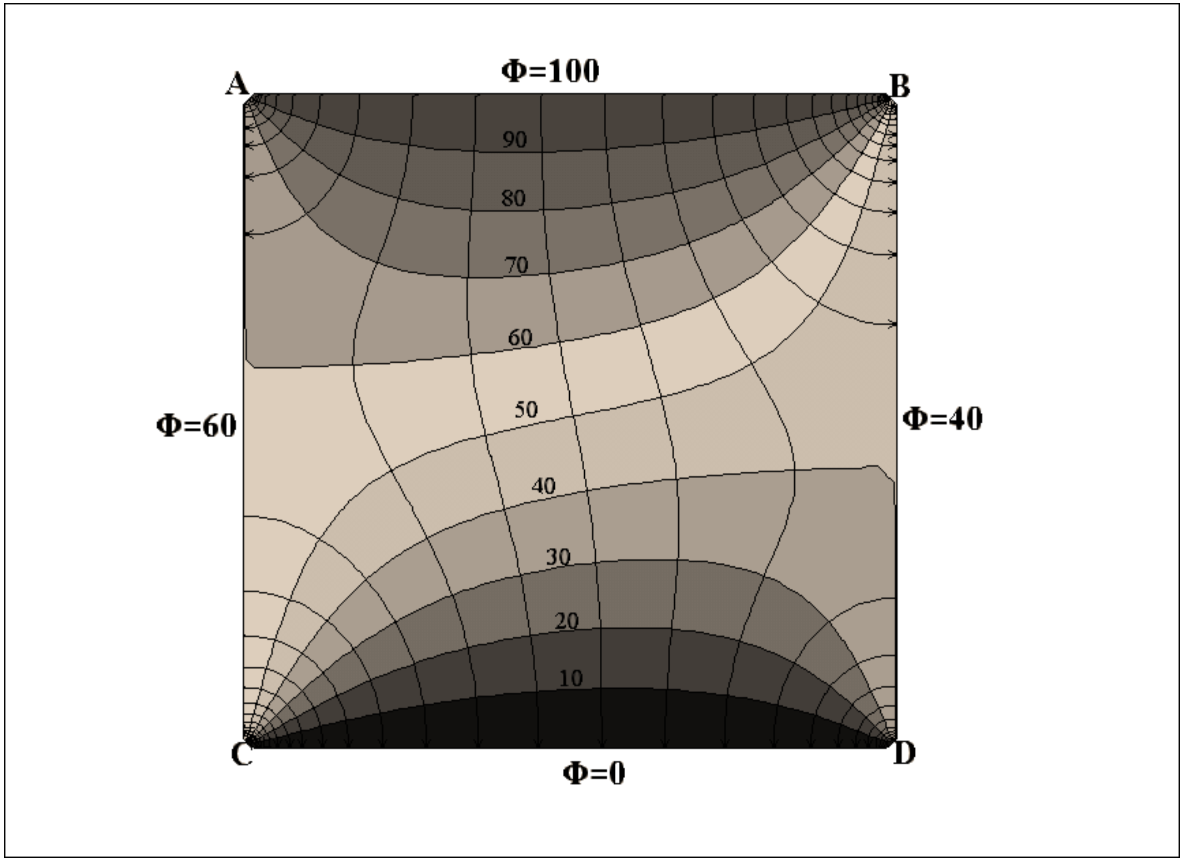


Σχήμα 8:Τετραγωνικό δίκτυο 5x5



Σχήμα 9: Τετραγωνικό δίκτυο 74x74

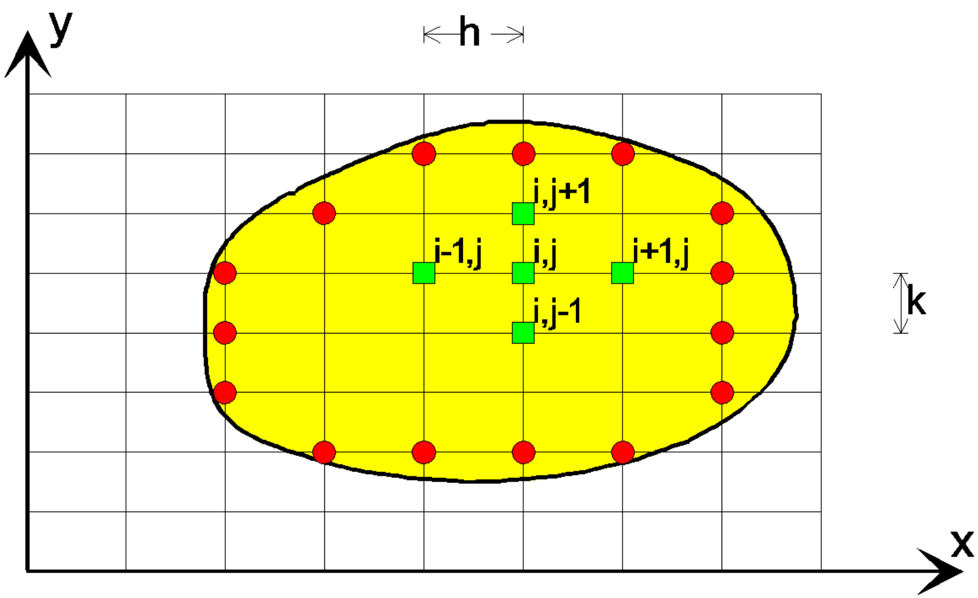
ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (18/23)



Σχήμα 10: Δίκτυο ισοδυναμικών γραμμών και γραμμών ροής.

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (19/23)

- **Κόμβοι που γειτνιάζουν με καμπύλα όρια (οποιασδήποτε γεωμετρικής μορφής) του πεδίου ροής**



Σχήμα 11: πεδίο ροής με πέντε κόμβους.

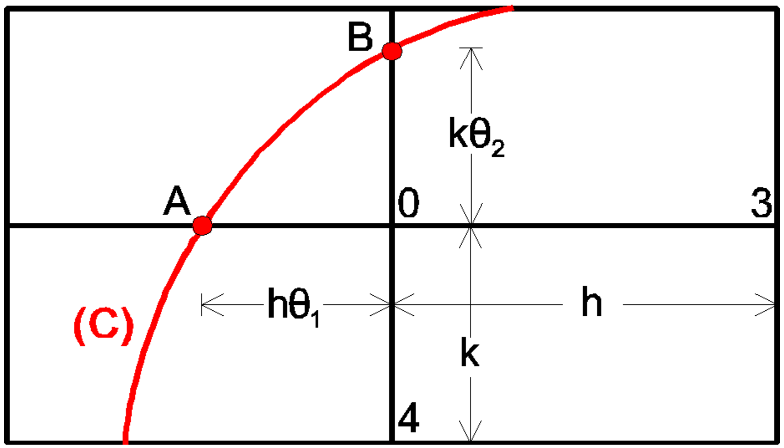
Πηγή: Δημ. Τολίκας, ο.π., σελ. 94.

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (20/23)

- **Κόμβοι που γειτνιάζουν με όρια τύπου Dirichlet (είναι γνωστή η τιμή του δυναμικού σε κάθε σημείο του ορίου)**

$$\Phi_A = \Phi_0 - h\theta_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + \frac{h^2\theta_1^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}$$

$$\Phi_3 = \Phi_0 + h \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}$$



Σχήμα 12: Κόμβοι που γειτνιάζουν με καμπύλο όριο

Πηγή: Δημ. Τολίκας, ο.π., σελ. 89.

- **Επιλύονται οι σχέσεις ως προς τις πρώτες και δεύτερες παραγώγους**

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (21/23)

$$\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}=\frac{1}{h^2}\left[\frac{2}{\theta_1(1+\theta_1)}\Phi_A+\frac{2}{1+\theta_1}\Phi_3-\frac{2}{\theta_1}\Phi_0\right]$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}=-\frac{1}{h}\left[\frac{1}{\theta_1(1+\theta_1)}\Phi_A-\frac{1-\theta_1}{\theta_1}\Phi_0-\frac{\theta_1}{1+\theta_1}\Phi_3\right]$$

$$\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y^2}=\frac{1}{k^2}\left[\frac{2}{\theta_2(1+\theta_2)}\Phi_B+\frac{2}{1+\theta_2}\Phi_4-\frac{2}{\theta_2}\Phi_0\right]$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{\theta_2(1+\theta_2)}\Phi_B-\frac{1-\theta_2}{\theta_2}\Phi_0-\frac{\theta_2}{1+\theta_2}\Phi_4\right]$$

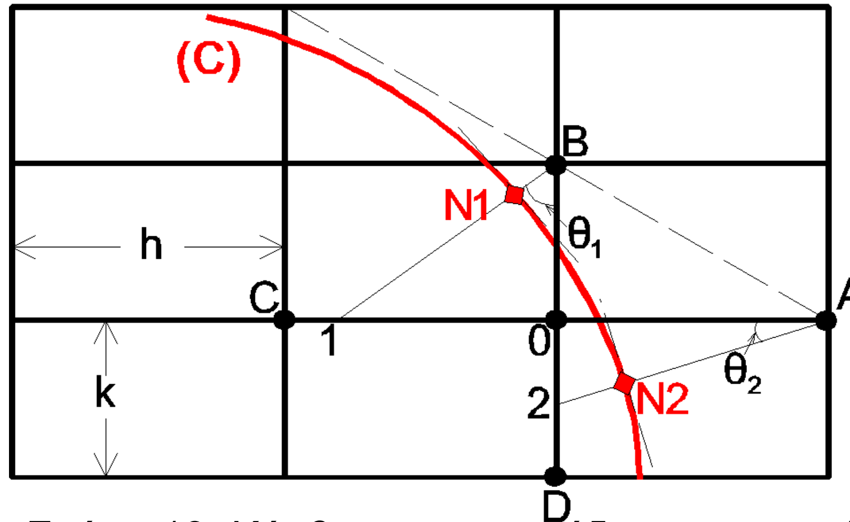
ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (22/23)

- **Κόμβοι που γειτνιάζουν με όρια τύπου Newmann (είναι γνωστή η τιμή της παραγώγου ως προς την κάθετο επί του ορίου)**

$$\frac{\partial \Phi_{N_1}}{\partial \bar{\varepsilon}_1} = 0$$

$$\Phi_1 - \Phi_B = 0$$

$$\frac{\Phi_1 - \Phi_0}{\Phi_c - \Phi_0} = \frac{k\,tg\theta_1}{h}$$



Σχήμα 13: Κόμβοι που γειτνιάζουν με καμπύλα όρια τύπου Newmann.

Πηγή: Δημ. Τολίκας, ο.π.,σελ. 91.

$$\Phi_B = \Phi_1 = \frac{k\,tg\theta_1}{h}\Phi_c + \left(1 - \frac{k\,tg\theta_1}{h}\right)\Phi_0$$

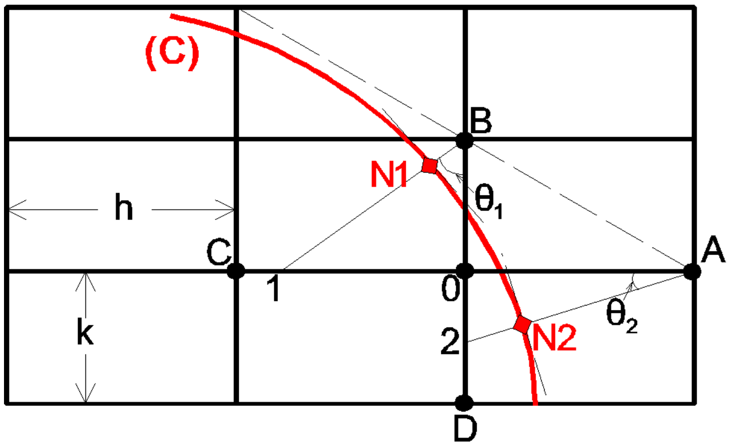
ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ (23/23)

- **Κόμβοι που γειτνιάζουν με όρια τύπου Newmann (είναι γνωστή η τιμή της παραγώγου ως προς την κάθετο επί του ορίου)**

$$\frac{\partial \Phi_{N_2}}{\partial \overline{\varepsilon}_2} = 0$$

$$\Phi_2 - \Phi_A = 0$$

$$\frac{\Phi_2 - \Phi_0}{\Phi_D - \Phi_0} = \frac{h\,tg\theta_2}{k}$$



Σχήμα 14: Κόμβοι που γειτνιάζουν με καμπύλα όρια τύπου Newmann.
Πηγή: Δημ. Τολίκας, ο.π.,σελ. 91.

$$\Phi_A = \Phi_2 = \frac{h\,tg\theta_2}{k}\Phi_D + \left(1 - \frac{h\,tg\theta_2}{k}\right)\Phi_0$$

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Δημήτριος Τολίκας, Νικόλαος Θεοδοσίου. «Υπόγεια Υδραυλική. Ενότητα 4. Μέθοδοι επίλυσης του μαθηματικού ομοιώματος: Σύμμορφη απεικόνιση- πεπερασμένες διαφορές.». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://opencourses.auth.gr/courses/OCRS466/

Σημείωμα Αδειοδότησης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ιωάννης Αυγολούπης
Θεσσαλονίκη, <Εαρινό Εξάμηνο 2012-2013>

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.