

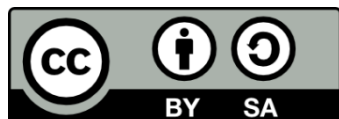


Υπόγεια Υδραυλική και Υδρολογία

Ενότητα 6: Πεπερασμένες διαφορές: Παραδείγματα και ασκήσεις

Καθηγητής Κωνσταντίνος Λ. Κατσιφαράκης
Αναπληρωτής Καθηγητής Νικόλαος Θεοδοσίου

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών ΑΠΘ



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



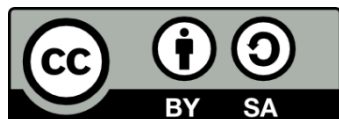
Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





Πεπερασμένες διαφορές: Παραδείγματα και ασκήσεις



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



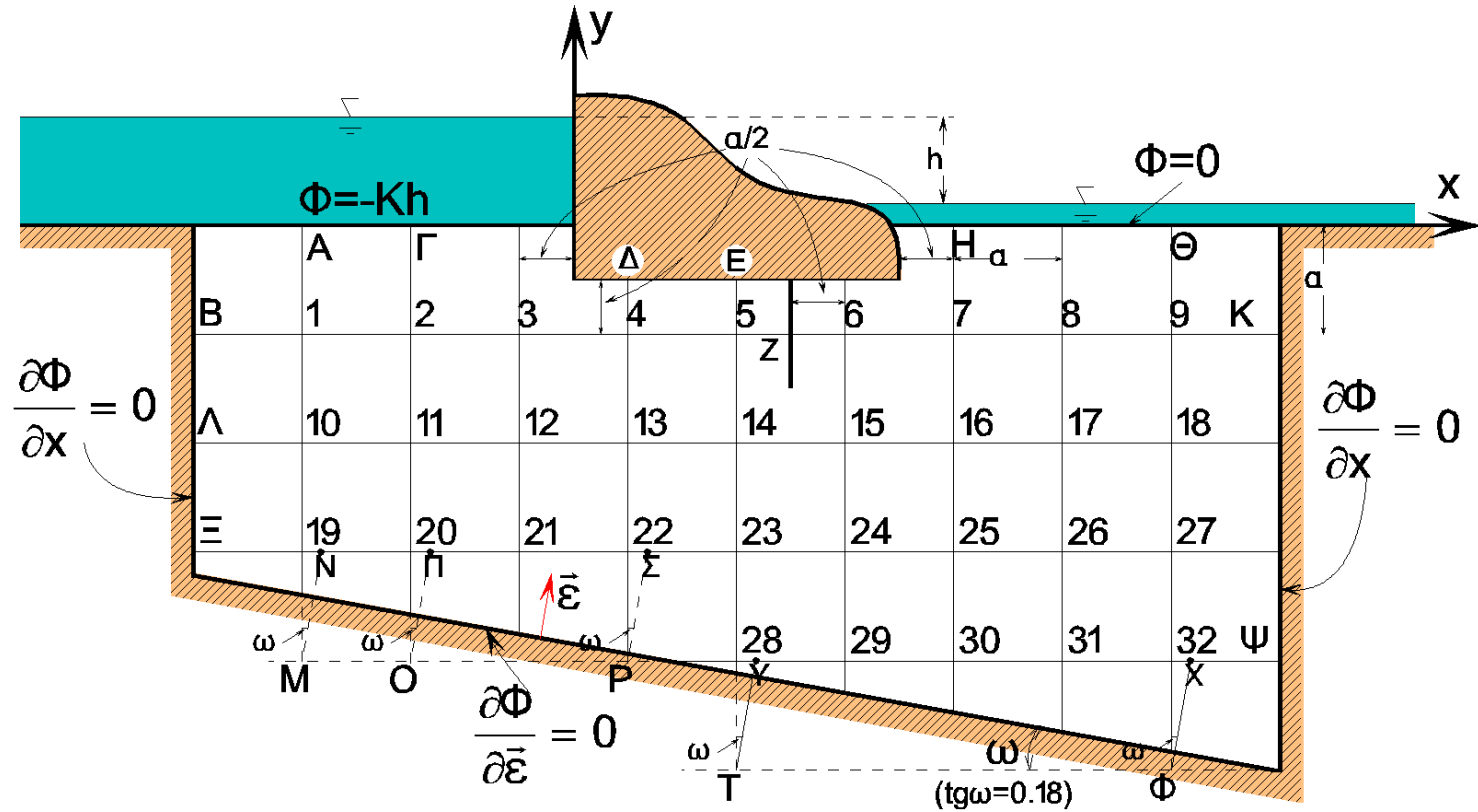
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΥΠΟΓΕΙΑΣ ΡΟΗΣ (1/16)

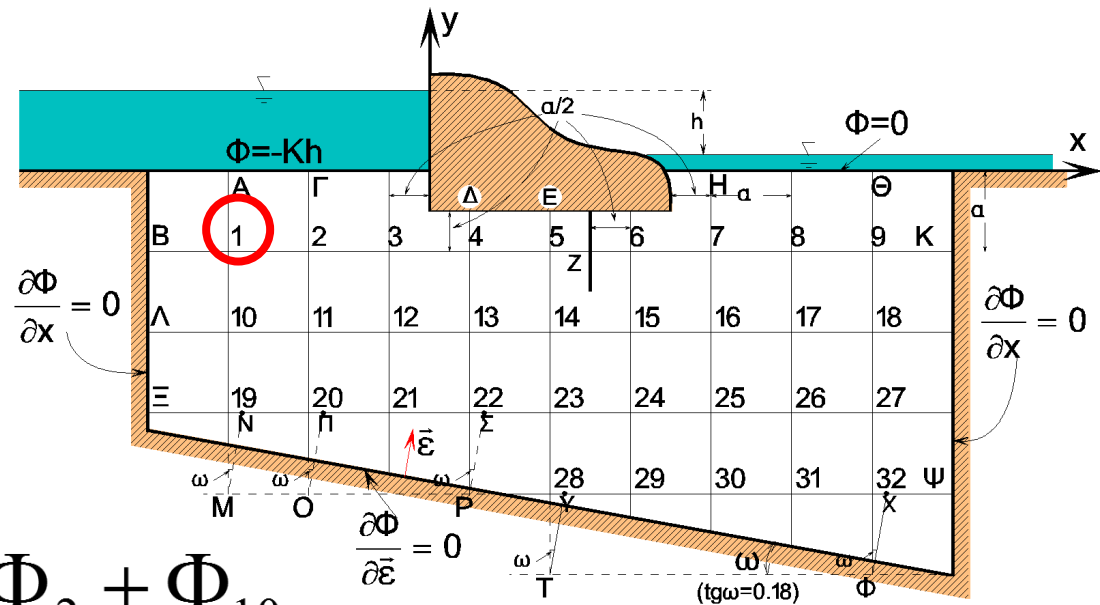


Σχήμα 1: Κόμβοι του δικτύου.

Πηγή: Δημ. Τολίκας, Υπόγεια Υδραυλική, εκδ. Παρατηρητής, 1997, σελ. 97.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΥΠΟΓΕΙΑΣ ΡΟΗΣ (2/16)

- Εξίσωση κόμβου 1



$$\Phi_1 = \frac{\Phi_A + \Phi_B + \Phi_2 + \Phi_{10}}{4}$$

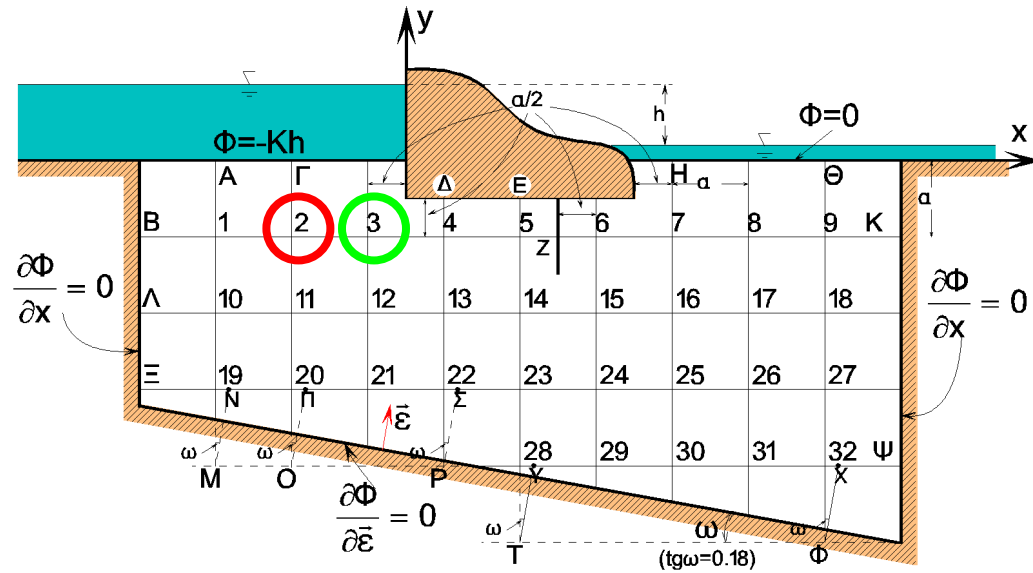
$$\Phi_A = -Kh, \quad \Phi_B = \Phi_1$$

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_2 + \Phi_{10} - Kh}{3}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΥΠΟΓΕΙΑΣ ΡΟΗΣ (3/16)

Εξίσωση
κόμβου 2
(ανάλογη
είναι η
εξίσωση του
κόμβου 3):



$$\Phi_2 = \frac{\Phi_1 + \Phi_3 + \Phi_{11} + \Phi_{\Gamma}}{4}$$

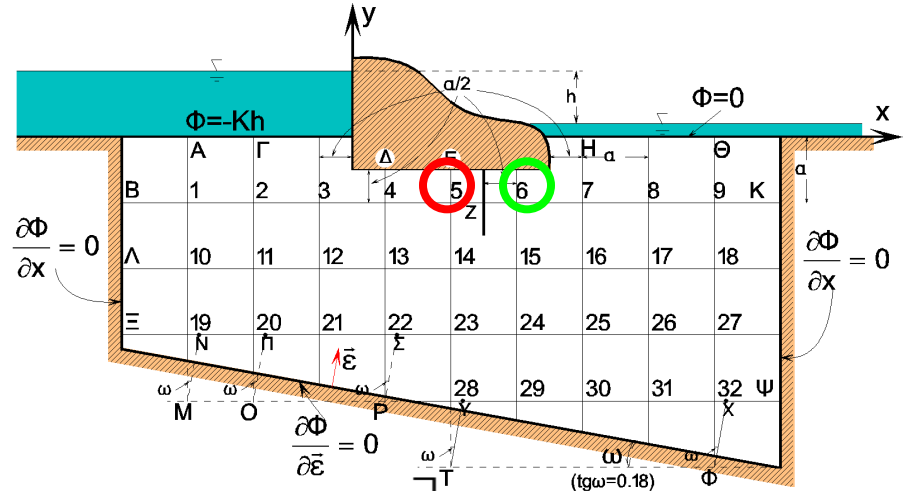
$$\Phi_{\Gamma} = -Kh$$

$$\Phi_2 = \frac{\Phi_1 + \Phi_3 + \Phi_{11} - Kh}{4}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΥΠΟΓΕΙΑΣ ΡΟΗΣ (5/16)

- Εξίσωση κόμβου 5 (παρόμοια εξίσωση ισχύει στον κόμβο 6)



$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{2}{0,5(1+0,5)} \Phi_Z + \frac{2}{1+0,5} \Phi_4 - \frac{2}{0,5} \Phi_5 \right]$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{2}{0,5(1+0,5)} \Phi_E + \frac{2}{1+0,5} \Phi_{14} - \frac{2}{0,5} \Phi_5 \right]$$

$$\Phi_E = \Phi_5, \quad \Phi_Z = \Phi_5$$

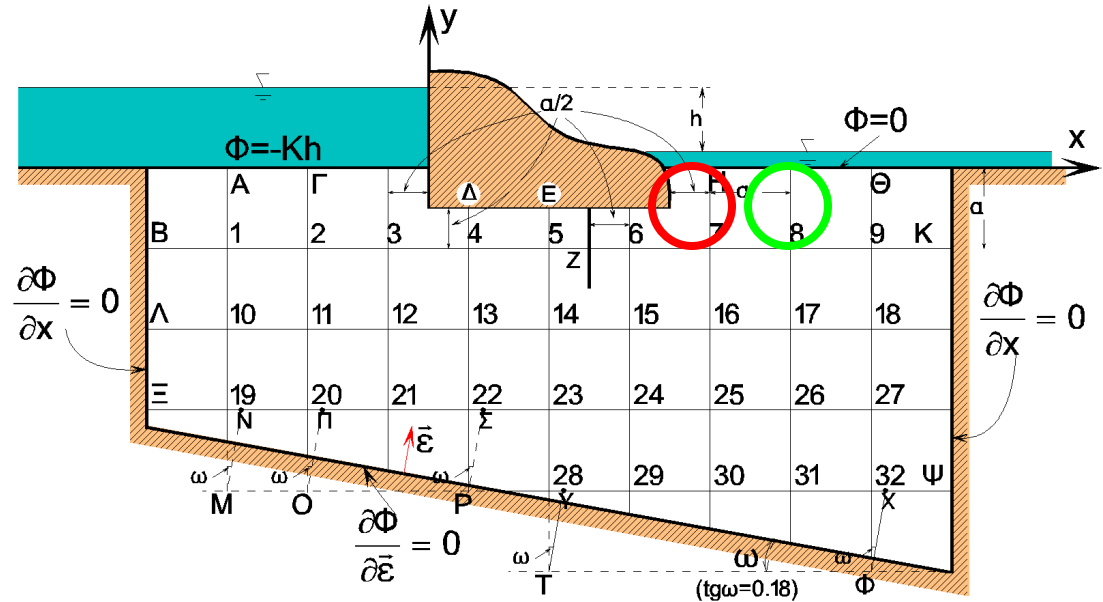
$$2,67\Phi_5 + 1,33\Phi_4 - 4\Phi_5 + 2,67\Phi_5 + 1,33\Phi_{14} - 4\Phi_5 = 0$$

$$\Phi_5 = \frac{\Phi_4 + \Phi_{14}}{2}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΥΠΟΓΕΙΑΣ ΡΟΗΣ (6/16)

- Εξίσωση κόμβου 7 (παρόμοια εξίσωση ισχύει στον κόμβο 8)



$$\Phi_7 = \frac{\Phi_6 + \Phi_8 + \Phi_{16} + \Phi_H}{4}$$

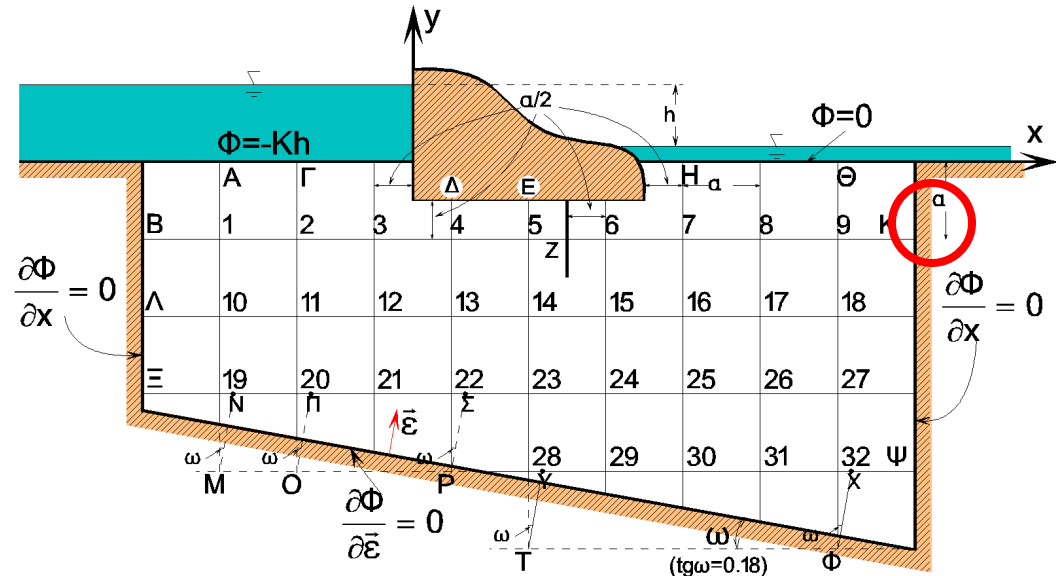
$$\Phi_H = 0$$

$$\Phi_7 = \frac{\Phi_6 + \Phi_8 + \Phi_{16}}{4}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΥΠΟΓΕΙΑΣ ΡΟΗΣ (7/16)

- Εξίσωση κόμβου 9



$$\Phi_9 = \frac{\Phi_8 + \Phi_{18} + \Phi_K + \Phi_{\Theta}}{4} \quad \Phi_K = \Phi_9, \quad \Phi_{\Theta} = 0$$

$$\Phi_9 = \frac{\Phi_8 + \Phi_{18}}{3}$$



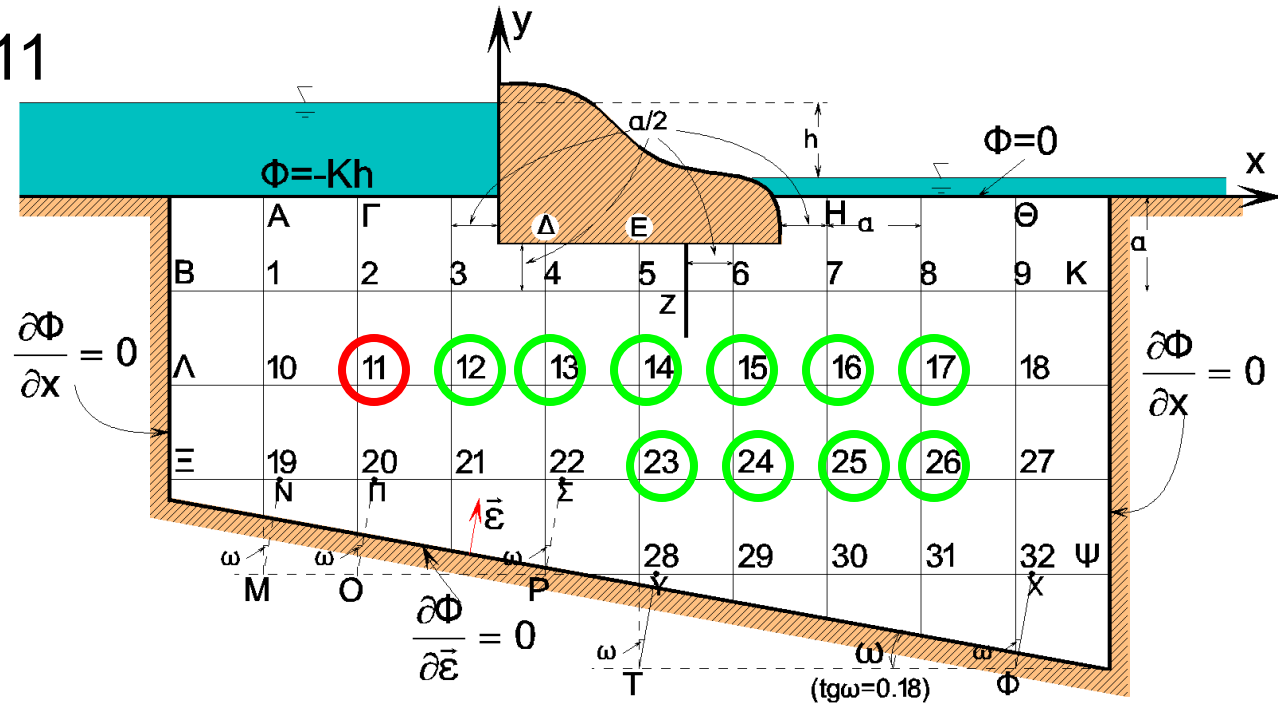
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΥΠΟΓΕΙΑΣ ΡΟΗΣ (9/16)

- Εξίσωση κόμβου 11

- Παρόμοιες:

12, 13, 14, 15, 16,

17, 23, 24, 25, 26

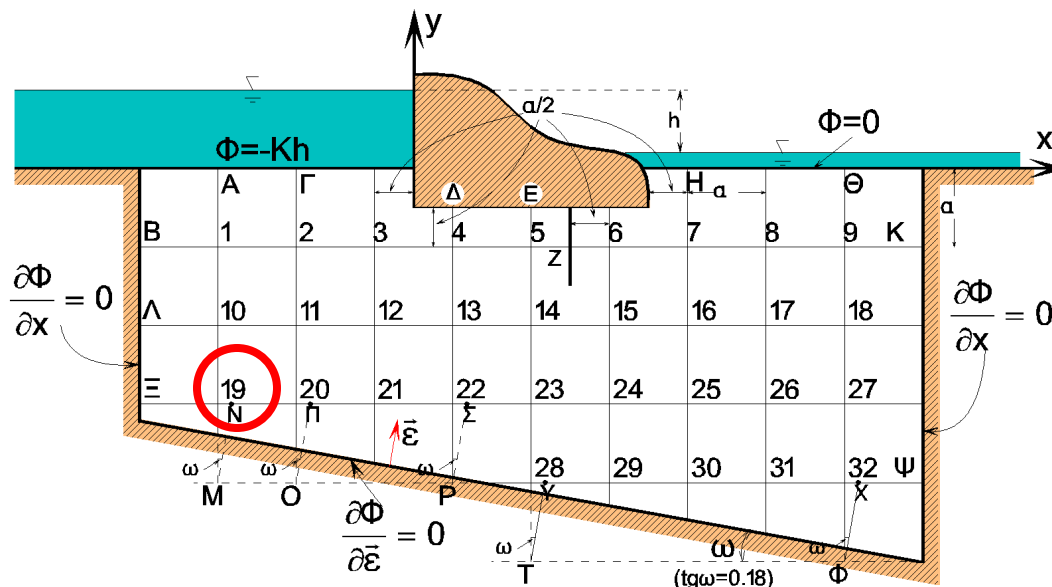


$$\Phi_{11} = \frac{\Phi_{10} + \Phi_{12} + \Phi_2 + \Phi_{20}}{4}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΥΠΟΓΕΙΑΣ ΡΟΗΣ (10/16)

- Εξίσωση κόμβου 19



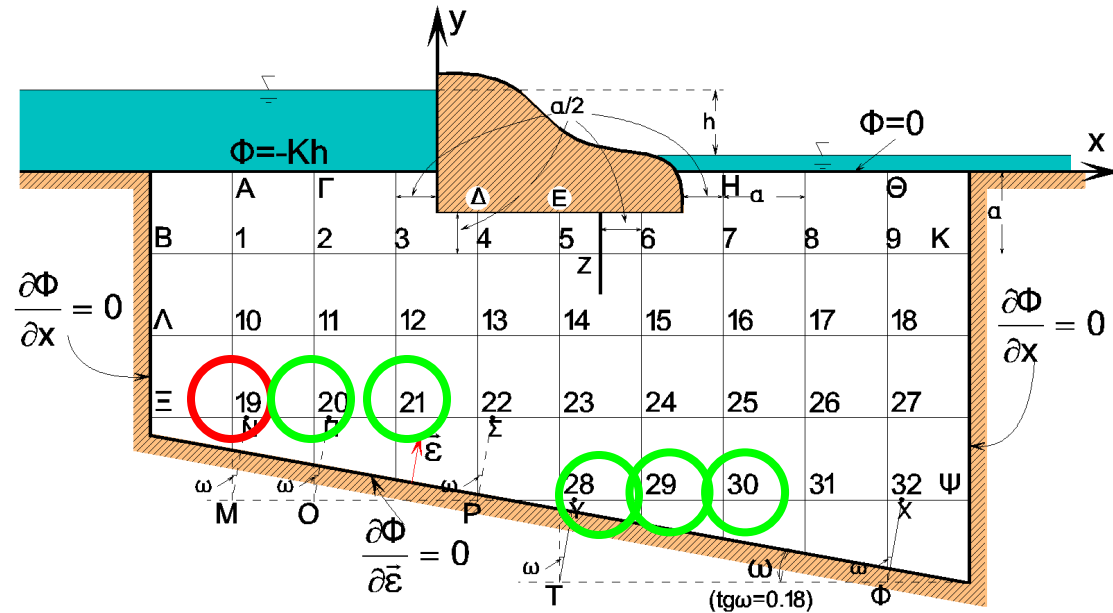
$$\Phi_M = \Phi_N \quad \frac{\Phi_N - \Phi_{19}}{\Phi_{20} - \Phi_{19}} = 0,18 \quad \Phi_N = 0,18\Phi_{20} + 0,82\Phi_{19}$$

$$\Phi_{\Xi} = \Phi_{19} \quad \Phi_{19} = \frac{\Phi_{10} + \Phi_{20} + \Phi_{\Xi} + \Phi_M}{4} \quad \Phi_{19} = \frac{\Phi_{10} + 1,18\Phi_{20}}{2,18}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΥΠΟΓΕΙΑΣ ΡΟΗΣ (11/16)

- Εξίσωση κόμβου 20
- Παρόμοιες: 21, 22, 29, 30, 31



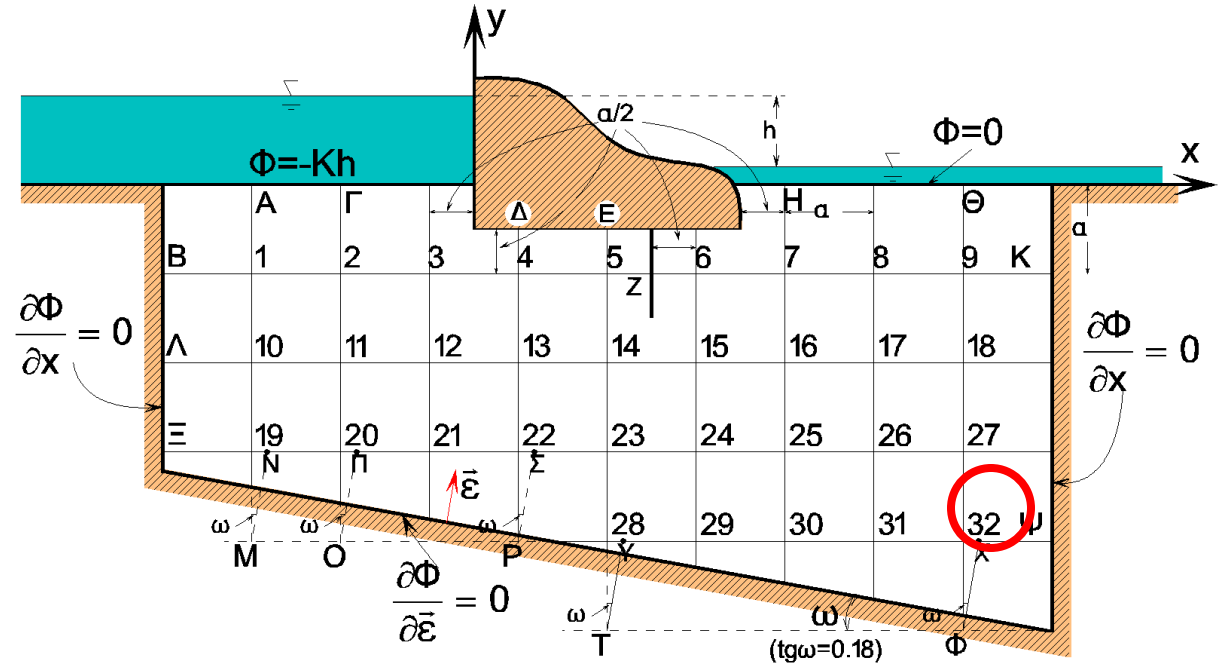
$$\Phi_{\Pi} = \Phi_{\text{O}} = 0,18 \Phi_{21} + 0,82 \Phi_{20}$$

$$\Phi_{20} = \frac{\Phi_{19} + \Phi_{11} + 1,18\Phi_{21}}{3,18}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΥΠΟΓΕΙΑΣ ΡΟΗΣ (12/16)

- Εξίσωση κόμβου 32



$$\Phi_{\phi} = \Phi_{\chi} = 0,18 \Phi_{\psi} + 0,82 \Phi_{32}$$

$$\Phi_{\psi} = \Phi_{32}$$

$$\Phi_{32} = \frac{\Phi_{31} + \Phi_{27}}{2}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΥΠΟΓΕΙΑΣ ΡΟΗΣ (13/16)

Επίλυση συστήματος

$$\Phi_{i,j} = \frac{\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j+1}}{4}$$

$$\Phi_{i,j}^{(n+1)} = \frac{\Phi_{i+1,j}^{(n)} + \Phi_{i-1,j}^{(n+1)} + \Phi_{i,j-1}^{(n+1)} + \Phi_{i,j+1}^{(n)}}{4}$$

$$\left| \Phi_{i,j}^{(n)} - \Phi_{i,j}^{(n-1)} \right| < \varepsilon$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΥΠΟΓΕΙΑΣ ΡΟΗΣ (14/16)

Αριθμητικά αποτελέσματα από την επίλυση του συστήματος

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ: 58η

$\Phi(1)=-0.904$	$\Phi(2)=-0.882$	$\Phi(3)=-0.823$	$\Phi(4)=-0.677$
$\Phi(5)=-0.595$	$\Phi(6)=-0.243$	$\Phi(7)=-0.146$	$\Phi(8)=-0.104$
$\Phi(9)=-0.087$	$\Phi(10)=-0.831$	$\Phi(11)=-0.800$	$\Phi(12)=-0.735$
$\Phi(13)=-0.630$	$\Phi(14)=-0.513$	$\Phi(15)=-0.342$	$\Phi(16)=-0.239$
$\Phi(17)=-0.183$	$\Phi(18)=-0.159$	$\Phi(19)=-0.790$	$\Phi(20)=-0.756$
$\Phi(21)=-0.690$	$\Phi(22)=-0.596$	$\Phi(23)=-0.489$	$\Phi(24)=-0.374$
$\Phi(25)=-0.286$	$\Phi(26)=-0.232$	$\Phi(27)=-0.206$	$\Phi(28)=-0.476$
$\Phi(29)=-0.379$	$\Phi(30)=-0.303$	$\Phi(31)=-0.253$	$\Phi(32)=-0.230$

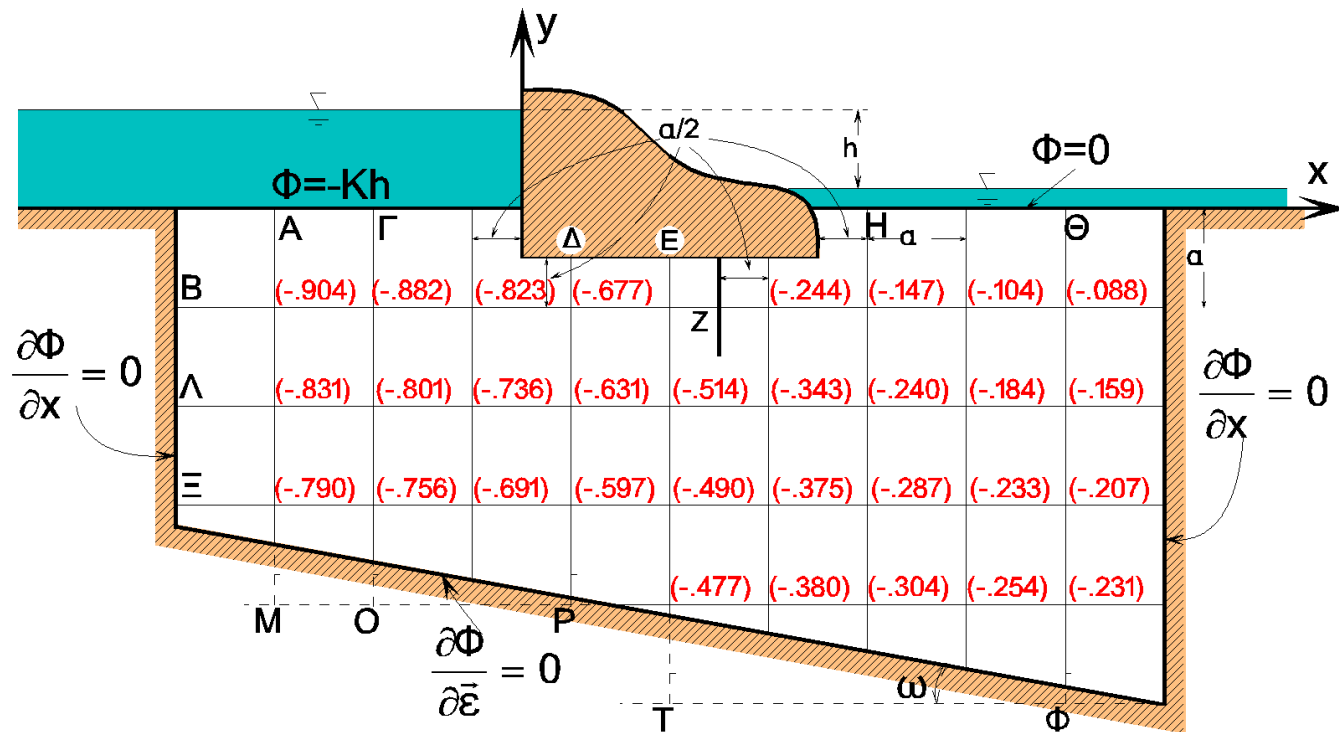
ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

$\Phi(1)=-0.904$	$\Phi(2)=-0.882$	$\Phi(3)=-0.823$	$\Phi(4)=-0.677$
$\Phi(5)=-0.595$	$\Phi(6)=-0.244$	$\Phi(7)=-0.147$	$\Phi(8)=-0.104$
$\Phi(9)=-0.088$	$\Phi(10)=-0.831$	$\Phi(11)=-0.801$	$\Phi(12)=-0.736$
$\Phi(13)=-0.631$	$\Phi(14)=-0.514$	$\Phi(15)=-0.343$	$\Phi(16)=-0.240$
$\Phi(17)=-0.184$	$\Phi(18)=-0.159$	$\Phi(19)=-0.790$	$\Phi(20)=-0.756$
$\Phi(21)=-0.691$	$\Phi(22)=-0.597$	$\Phi(23)=-0.490$	$\Phi(24)=-0.375$
$\Phi(25)=-0.287$	$\Phi(26)=-0.233$	$\Phi(27)=-0.207$	$\Phi(28)=-0.477$
$\Phi(29)=-0.380$	$\Phi(30)=-0.304$	$\Phi(31)=-0.254$	$\Phi(32)=-0.231$



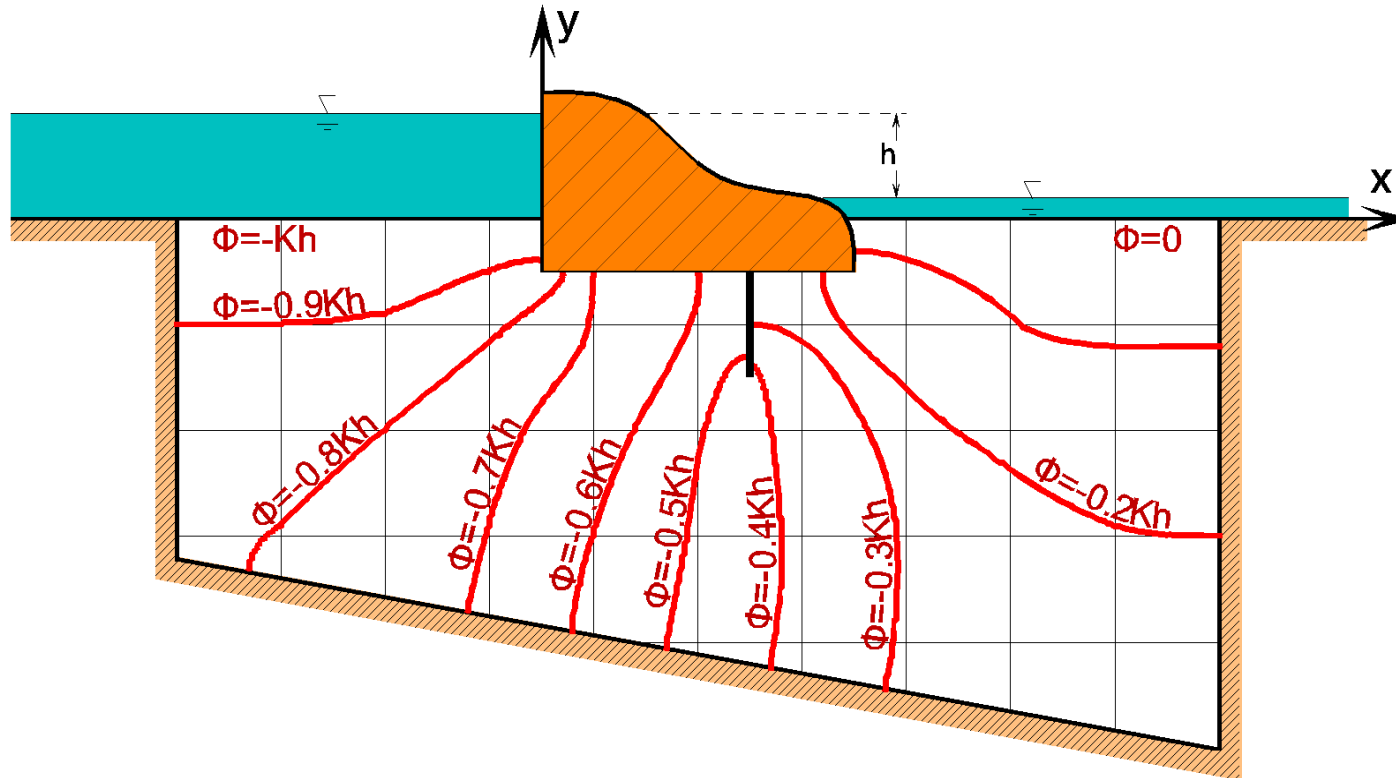
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΥΠΟΓΕΙΑΣ ΡΟΗΣ (15/16)

Τιμές δυναμικού στους κόμβους



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΥΠΟΓΕΙΑΣ ΡΟΗΣ (16/16)

Ισοδυναμικές γραμμές



Σχήμα 2: Ισοδυναμικές γραμμές
Πηγή: αρχείο κ. Δημ. Τολικά.



ΑΣΚΗΣΗ 1^η (1/3)

Υπολογισμός παροχής που διέρχεται από μια διατομή

Αναγνωρίζονται τρεις θεωρητικοί «σωλήνες» ροής:

- [18 – 19 – 33 - 32]
- [19 – 20 – 34 - 33]
- [20 – 21 – 35 - 34]

	4	5	6		7	8	9	
	16	17	18	19	20	21	22	23
	30	31	32	33	34	35	36	37
	44	45	46	47	48	49		



ΑΣΚΗΣΗ 1^η (2/3)

Υπολογισμός παροχής που διέρχεται από μια διατομή

Η ταχύτητα ροής εντός του κάθε σωλήνα, ορίζεται ως:

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Άρα:

$$U_{32-18} = \frac{\partial \Phi_{(32-18)}}{\partial y} \quad U_{34-20} = \frac{\partial \Phi_{(34-20)}}{\partial y}$$

$$U_{33-19} = \frac{\partial \Phi_{(33-19)}}{\partial y} \quad U_{35-21} = \frac{\partial \Phi_{(35-21)}}{\partial y}$$

	4	5	6			7	8	9
	16	17	18	19	20	21	22	23
	30	31	32	33	34	35	36	37
	44	45	46	47	48	49		



ΑΣΚΗΣΗ 1^η (3/3)

Υπολογισμός παροχής που διέρχεται από μια διατομή

Η παροχή που διέρχεται από κάθε σωλήνα, ορίζεται ως:

$$Q = U A$$

όπου A η διατομή

Άρα:

$$Q_1 = [(U_{(32-18)} + U_{(33-19)})/2] \times d_{(18-19)} \times 1$$

$$Q_2 = [(U_{(33-19)} + U_{(34-20)})/2] \times d_{(19-20)} \times 1$$

$$Q_3 = [(U_{(35-21)} + U_{(34-20)})/2] \times d_{(20-21)} \times 1$$

4		5		6		7		8		9	
16	17	18	19	20	21	22	23				
30	31	32	33	34	35	36	37				
44	45	46	47	48	49						

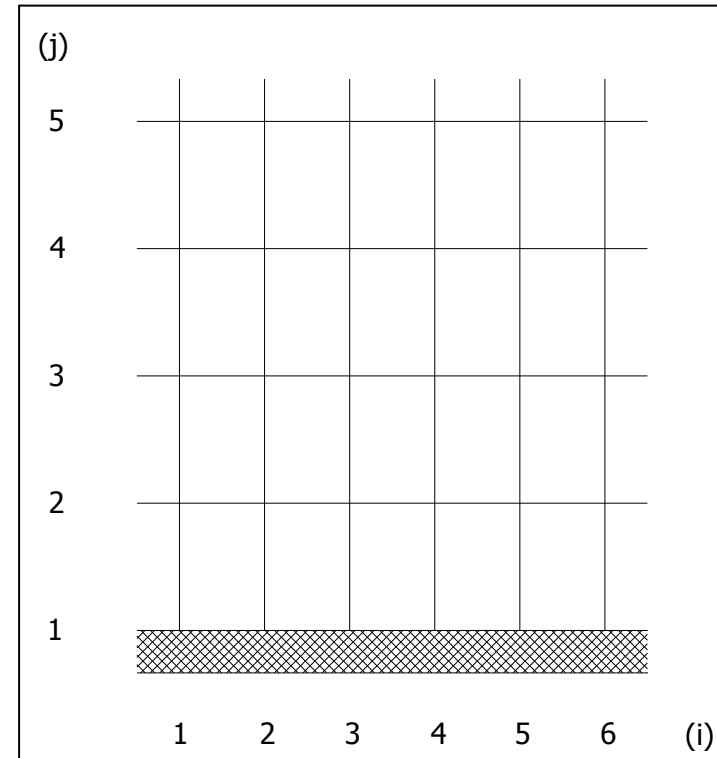
$$\Sigma Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$



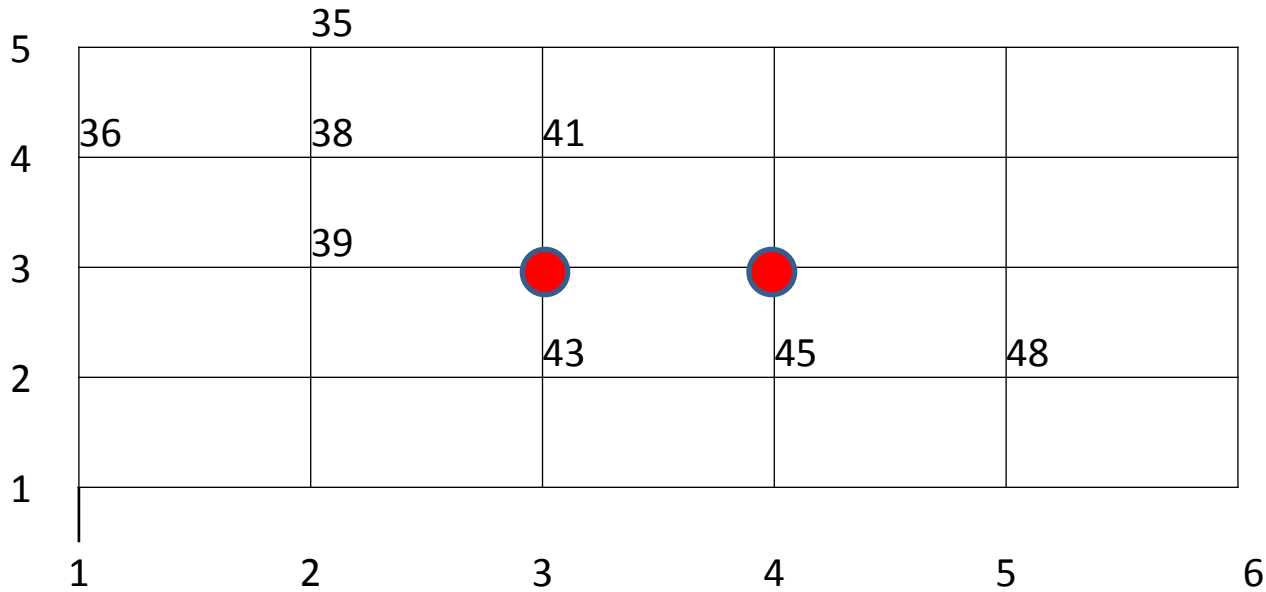
ΑΣΚΗΣΗ 2^η (1/4)

Ένας ημιάπειρος υπόγειος υδροφορέας γειτνιάζει με αδιαπέρατο όριο στον πυθμένα του. Δίνονται τιμές του δυναμικού σε χαρακτηριστικές θέσεις (με δείκτη i, j) του δικτύου διακριτοποίησης του οποίου η ισοδιάσταση κατά τη διεύθυνση j είναι ίση με 50m. Ζητείται να υπολογιστούν οι τιμές του δυναμικού στις θέσεις (3, 3) και (4, 3).

$\Phi (1,4) = 36$	$\Phi (2,3) = 39$
$\Phi (2,4) = 38$	$\Phi (3,2) = 43$
$\Phi (3,4) = 41$	$\Phi (4,2) = 45$
$\Phi (2,5) = 35$	$\Phi (5,2) = 48$



ΑΣΚΗΣΗ 2^η (2/4)



$\Phi (1,4) =$	36	$\Phi (2,3) =$	39
$\Phi (2,4) =$	38	$\Phi (3,2) =$	43
$\Phi (3,4) =$	41	$\Phi (4,2) =$	45
$\Phi (2,5) =$	35	$\Phi (5,2) =$	48



ΑΣΚΗΣΗ 2^η (3/4)

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(i,j)}}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} [\Phi_{(i-1,j)} + \Phi_{(i+1,j)} - 2\Phi_{(i,j)}]$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{(i,j)}}{\partial y^2} = \frac{1}{k^2} [\Phi_{(i,j+1)} + \Phi_{(i,j-1)} - 2\Phi_{(i,j)}]$$

$$\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + r^2 (\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1}) - 2(1+r^2)\Phi_{i,j} = 0$$

$$r = \frac{h}{k}$$



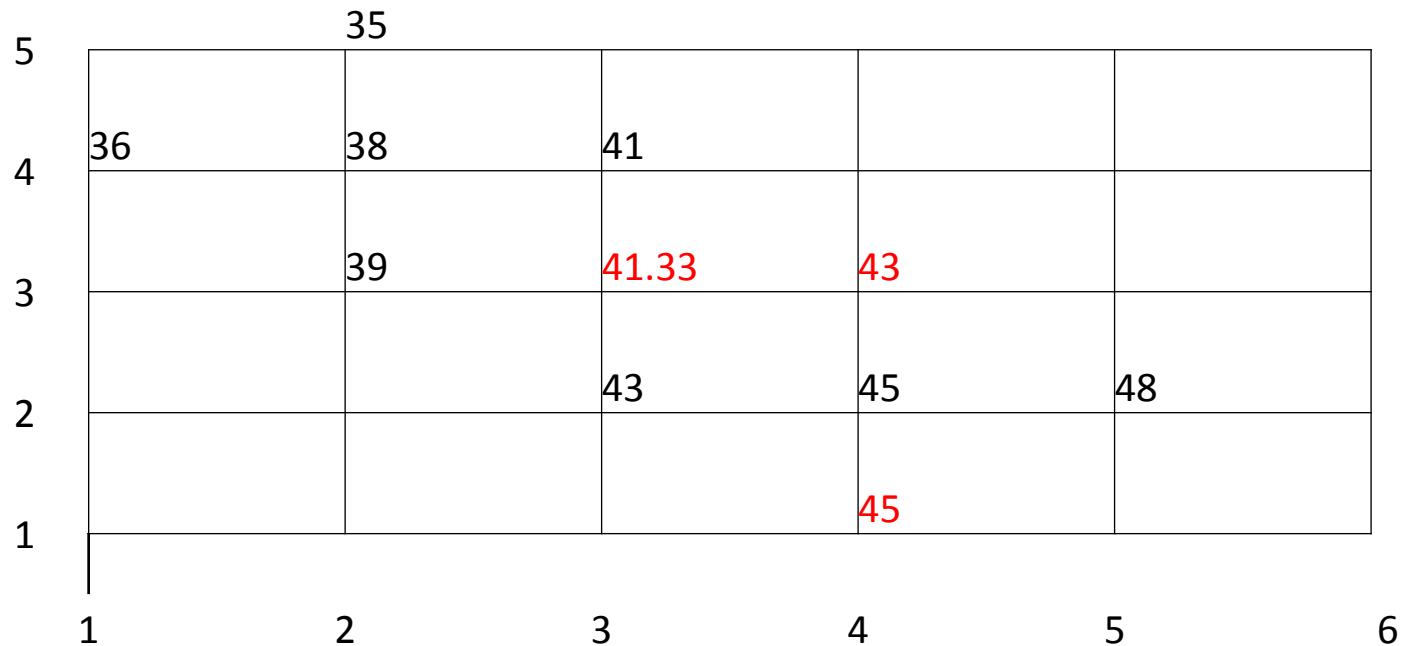
ΑΣΚΗΣΗ 2^η (4/4)

1^ο: Εφαρμογή της εξίσωσης στον κόμβο (2,4) για τον υπολογισμό της ισοδιάστασης κατά τη διεύθυνση j

2^ο: Λόγω αδιαπέρατου ορίου, $\Phi(4,1) = \Phi(4,2)$

3^ο: Εφαρμογή της εξίσωσης στον κόμβο (4,2) για τον υπολογισμό του $\Phi(4,3)$

4^ο: Εφαρμογή της εξίσωσης στον κόμβο (3,3) για τον υπολογισμό του $\Phi(3,3)$



ΑΣΚΗΣΗ 3^η (1/5)

Στην υπόγεια ροή του σχήματος οι τιμές του δυναμικού Φ στους κόμβους A, B, C, D, E και F είναι:

$$\Phi_A = 0,5034$$

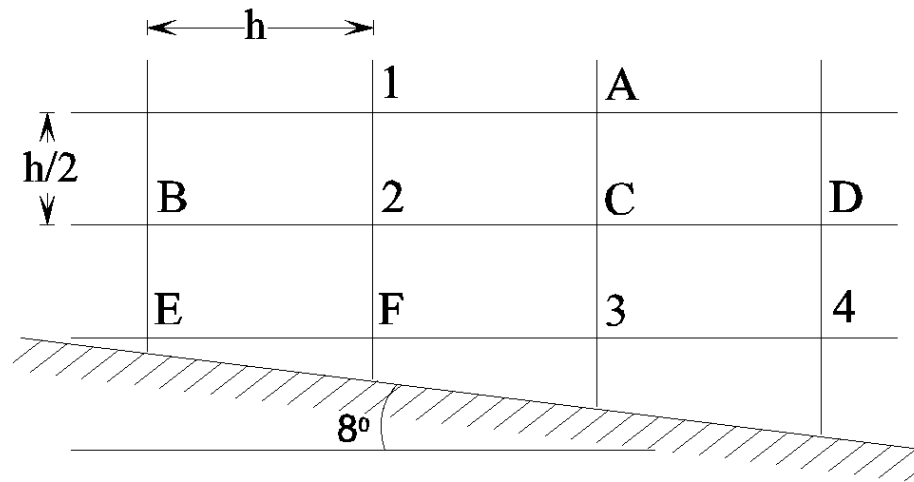
$$\Phi_B = 0,4997$$

$$\Phi_C = 0,5036$$

$$\Phi_D = 0,5052$$

$$\Phi_E = 0,5002$$

$$\Phi_F = 0,5018$$



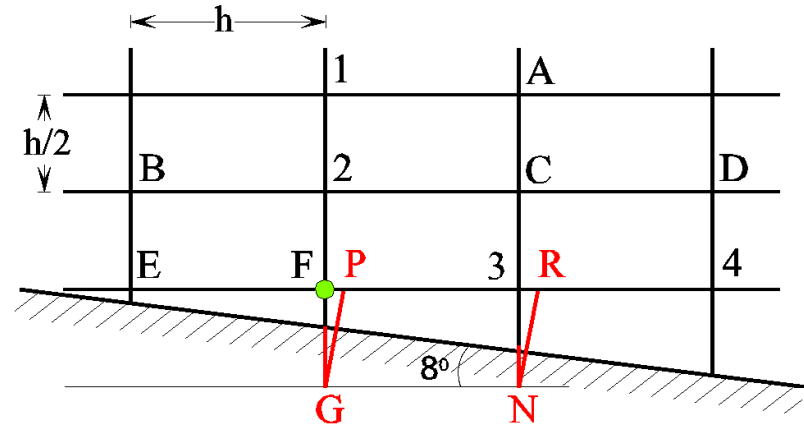
Να υπολογίσετε τις τιμές του δυναμικού στους κόμβους 1, 2, 3 και 4.



ΑΣΚΗΣΗ 3^η (2/5)

$$r = \frac{h}{k} = 2$$

Κόμβος F



$$\Phi_E + \Phi_3 + 4(\Phi_2 + \Phi_G) - 10\Phi_F = 0$$

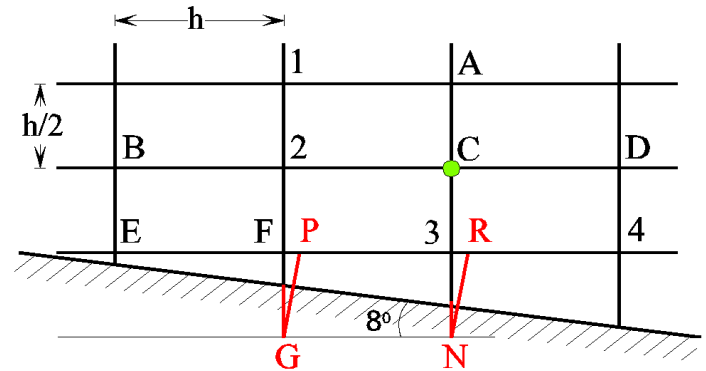
$$\frac{\Phi_P - \Phi_F}{\Phi_3 - \Phi_F} = \frac{\frac{h}{2} \tan 8^\circ}{h} = 0,0703 \rightarrow \Phi_G = \Phi_P \rightarrow \Phi_G = 0,0703\Phi_3 + 0,9297\Phi_F$$

$$\Phi_2 = 1,5703\Phi_F - 0,25\Phi_E - 0,3203\Phi_3$$



ΑΣΚΗΣΗ 3^η (3/5)

Κόμβος C



$$\Phi_2 + \Phi_D + 4(\Phi_A + \Phi_3) - 10\Phi_C = 0$$

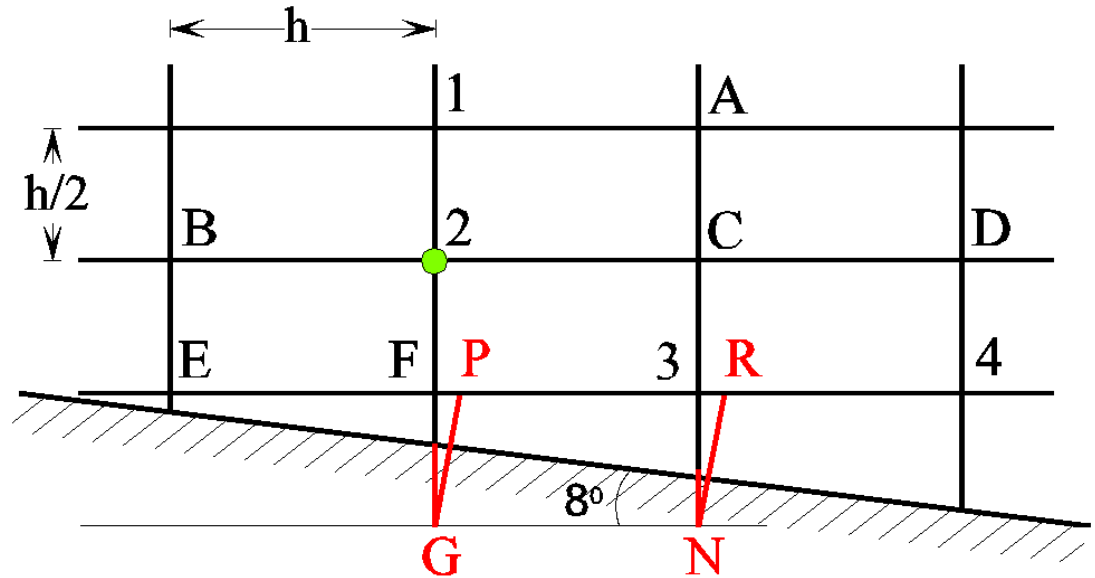
$$\Phi_2 = 1,5703\Phi_F - 0,25\Phi_E - 0,3203\Phi_3$$

Από τις δύο αυτές εξισώσεις υπολογίζονται τα Φ_2 και Φ_3



ΑΣΚΗΣΗ 3^η (4/5)

Κόμβος 2



$$\Phi_B + \Phi_C + 4(\Phi_1 + \Phi_F) - 10\Phi_2 = 0$$

$$\Phi_1 = \frac{10\Phi_2 - \Phi_B - \Phi_C}{4} - \Phi_F$$



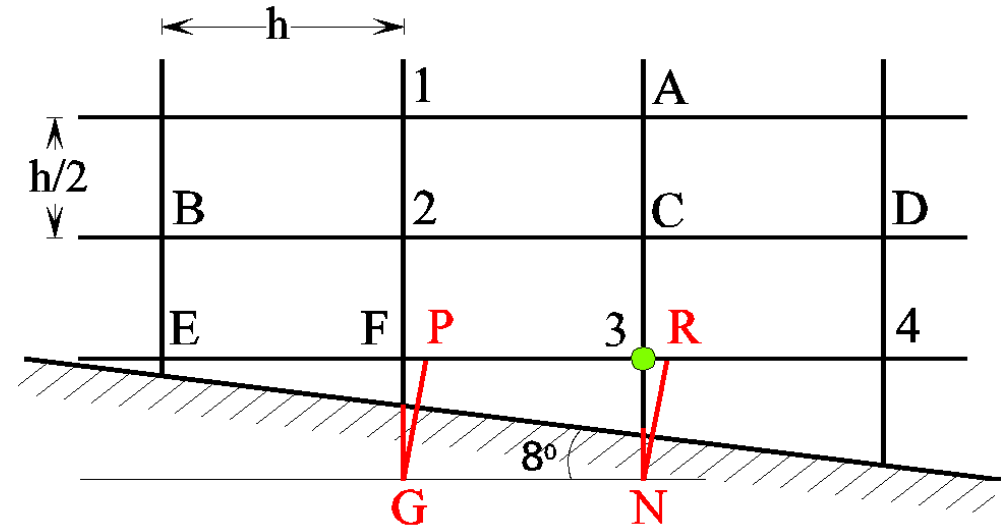
ΑΣΚΗΣΗ 3^η (5/5)

Κόμβος 3

$$\frac{\Phi_R - \Phi_3}{\Phi_4 - \Phi_3} = \frac{\frac{h}{2} \tan 8^\circ}{h} = 0,0703$$

$$\Phi_N = \Phi_R$$

$$\Phi_N = 0,9297\Phi_3 + 0,0703\Phi_4$$



$$\Phi_F + \Phi_4 + 4(\Phi_C + \Phi_N) - 10\Phi_3 = 0$$

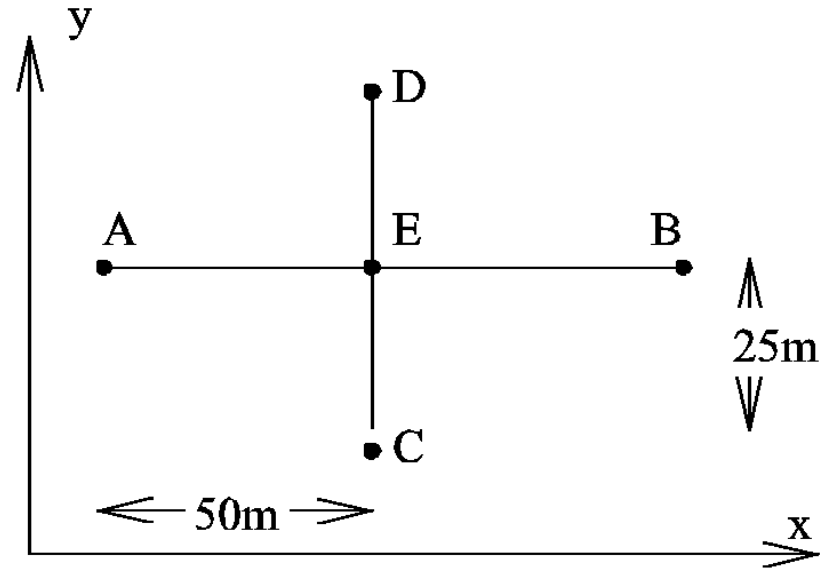
$$\Phi_F + \Phi_4 + 4\Phi_C + 4\Phi_3 + 0,2812(\Phi_4 - \Phi_3) - 10\Phi_3 = 0$$

$$\Phi_4 = 4,9026\Phi_3 - 0,7805\Phi_F - 3,1221\Phi_C$$



ΑΣΚΗΣΗ 4^η (1/2)

Σε μια υπόγεια ροή, οι γειτονικοί κόμβοι A,B,C,D και E, είναι διατεταγμένοι κατά την οριζόντια (A,E,B) και κατακόρυφη (C,E,D) διεύθυνση x και y, όπως στο σχήμα. Στον κόμβο E είναι γνωστές οι ταχύτητες διήθησης



$v_{xE}=121$ m/day, $v_{yE}=86$ m/day, το δυναμικό $\Phi_E=-10,52$ m²/sec και η υδροστατική πίεση =90m, ενώ στον κόμβο A είναι γνωστό το δυναμικό $\Phi_A=-10,59$ m²/sec. Να υπολογίσετε τις υδροστατικές πιέσεις στους κόμβους A,B,C και D, όταν ο συντελεστής σχετικής διαπερατότητας είναι $K=0,05$ m/sec.

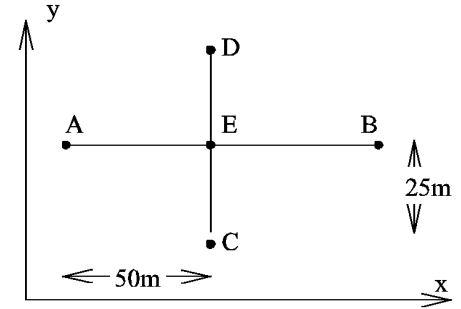


ΑΣΚΗΣΗ 4^η (2/2)

$$\Phi_E = -K \left(\frac{P_E}{\rho g} + Z_E \right) \rightarrow Z_E = \text{γνωστό}$$

$$V_{xE} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_E = \frac{\Phi_B - \Phi_A}{2 \times 50} \rightarrow \Phi_B = \text{γνωστό}$$

$$V_{yE} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_E = \frac{\Phi_D - \Phi_C}{2 \times 25} \rightarrow (1\eta \text{ σχέση μεταξύ } \Phi_D, \Phi_C)$$



$$\Phi_A + \Phi_B + 4(\Phi_C + \Phi_D) - 10\Phi_E = 0 \rightarrow (2\eta \text{ σχέση μεταξύ } \Phi_D, \Phi_C)$$

$$\Phi_A = -K \left(\frac{P_A}{\rho g} + Z_A \right) \rightarrow \frac{P_A}{\rho g} = \text{γνωστό}$$

$$\Phi_B = -K \left(\frac{P_B}{\rho g} + Z_B \right) \rightarrow \frac{P_B}{\rho g} = \text{γνωστό}$$

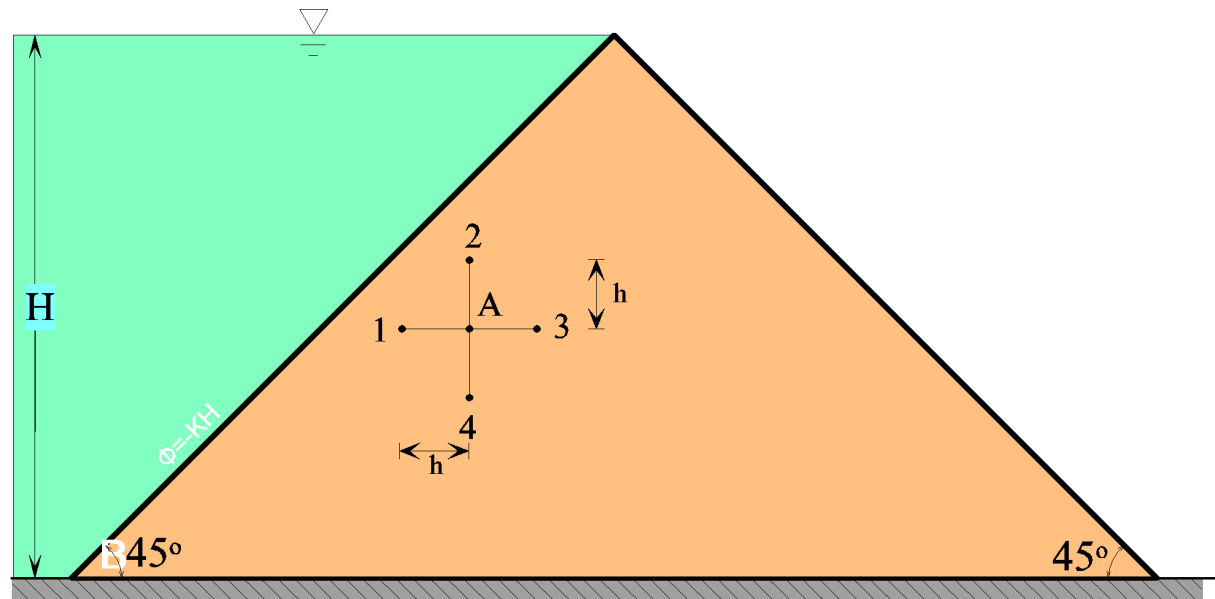
$$\Phi_C = -K \left(\frac{P_C}{\rho g} + Z_C \right) \rightarrow \frac{P_C}{\rho g} = \text{γνωστό}$$

$$\Phi_D = -K \left(\frac{P_D}{\rho g} + Z_D \right) \rightarrow \frac{P_D}{\rho g} = \text{γνωστό}$$



ΑΣΚΗΣΗ 5^η (1/3)

Αν γνωρίζετε από την αναλυτική λύση τις τιμές του δυναμικού στις θέσεις 1, 2, 3 και 4, να αποδείξετε ότι ο τύπος των 5 σημείων της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών δίνει με απόλυτη ακρίβεια την τιμή του δυναμικού στον κόμβο A.



Σχήμα 3: σχήμα άσκησης.

Πηγή: αρχείο κ. Δημ. Τολικά.



ΑΣΚΗΣΗ 5^η (2/3)

$$\Phi_A = K \left[-H + \frac{1}{2}(x - y + H) + \frac{x^2 - (H - y)^2}{4H} \right]$$

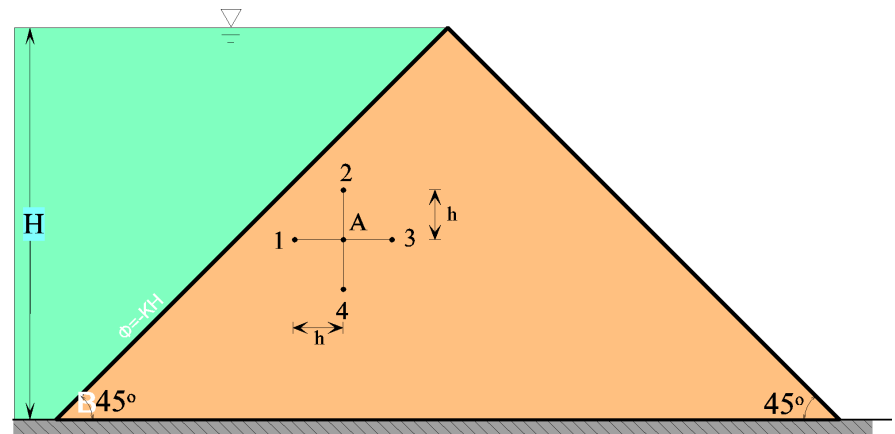
$$\Phi = K \left[-H + \frac{1}{2}(x - y + H) + \frac{x^2 - (H - y)^2}{4H} \right]$$

$$\Phi_1 = K \left[-H + \frac{1}{2}(x - h - y + H) + \frac{(x - h)^2 - (H - y)^2}{4H} \right]$$

$$\Phi_2 = K \left[-H + \frac{1}{2}(x - y - h + H) + \frac{x^2 - (H - y - h)^2}{4H} \right]$$

$$\Phi_3 = K \left[-H + \frac{1}{2}(x + h - y + H) + \frac{(x + h)^2 - (H - y)^2}{4H} \right]$$

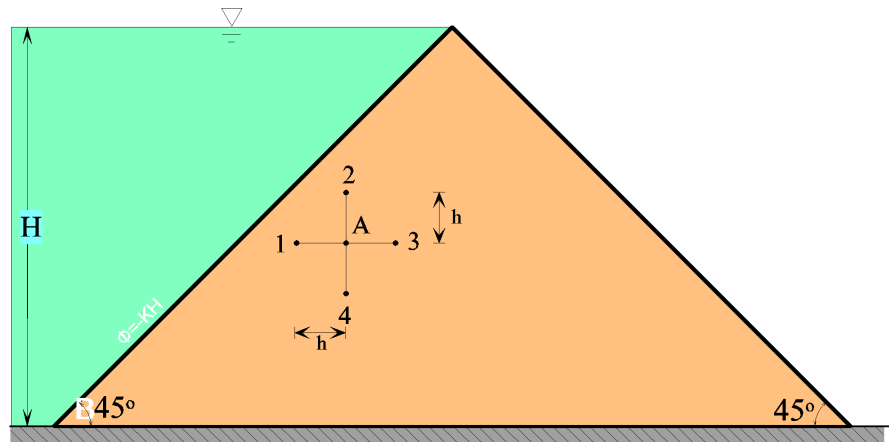
$$\Phi_4 = K \left[-H + \frac{1}{2}(x - y + h + H) + \frac{x^2 - (H - y + h)^2}{4H} \right]$$



$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 = 4K \left[-H + \frac{1}{2}(x - y + H) + \frac{x^2 - (H - y)^2}{4H} \right] = 4\Phi_A$$



ΑΣΚΗΣΗ 5^η (3/3)



$$\Phi = K \left[-H + \frac{1}{2}(x - y + H) + \frac{x^2 - (H - y)^2}{4H} \right]$$

2ος τρόπος

Από την αναλυτική λύση προκύπτει ότι όλες οι παράγωγοι ως προς x και y τρίτου ή μεγαλύτερου βαθμού είναι μηδενικές. Επομένως οι δεύτερες παράγωγοι ως προς x και y προσεγγίζονται με απόλυτη ακρίβεια με τις πεπερασμένες διαφορές (σχ. 7.4 και 7.5 του βιβλίου)



ΑΣΚΗΣΗ 6^η (1/10)

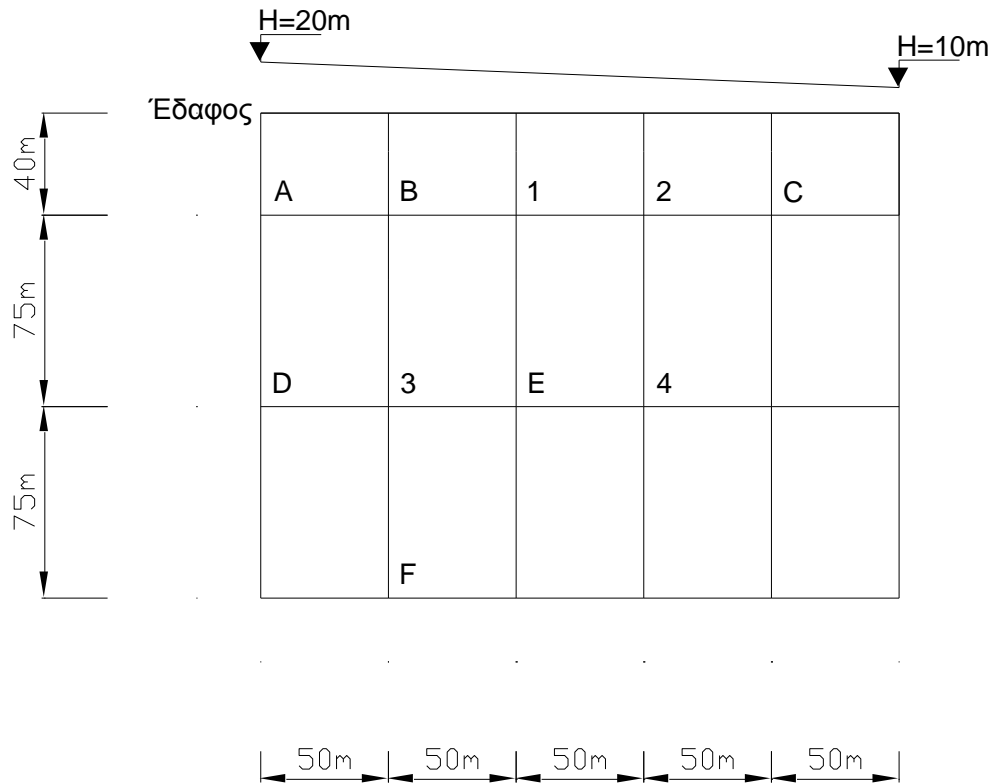
Για την προσομοίωση της ροής σε έναν υπόγειο υδροφορέα καταστρώνεται ορθογωνικό δίκτυο διακριτοποίησης όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο υδροφορέας βρίσκεται κάτω από ποτάμι με μεταβλητή στάθμη. Στο σχήμα φαίνεται το βάθος ροής του ποταμού σε δύο χαρακτηριστικά σημεία.

Δίνεται το δυναμικό στους κόμβους A, B, C, D, E και F και ζητείται να υπολογιστεί το δυναμικό στους κόμβους 1, 2, 3 και 4 θεωρώντας ως επίπεδο αναφοράς την επιφάνεια του εδάφους.

Ο συντελεστής διαπερατότητας $K=1 \times 10^{-2}$ m/s



ΑΣΚΗΣΗ 6η (2/10)



$$\Phi_A = -0.180 \text{ m}$$

$$\Phi_B = -0.170 \text{ m}$$

$$\Phi_C = -0.115 \text{ m}$$

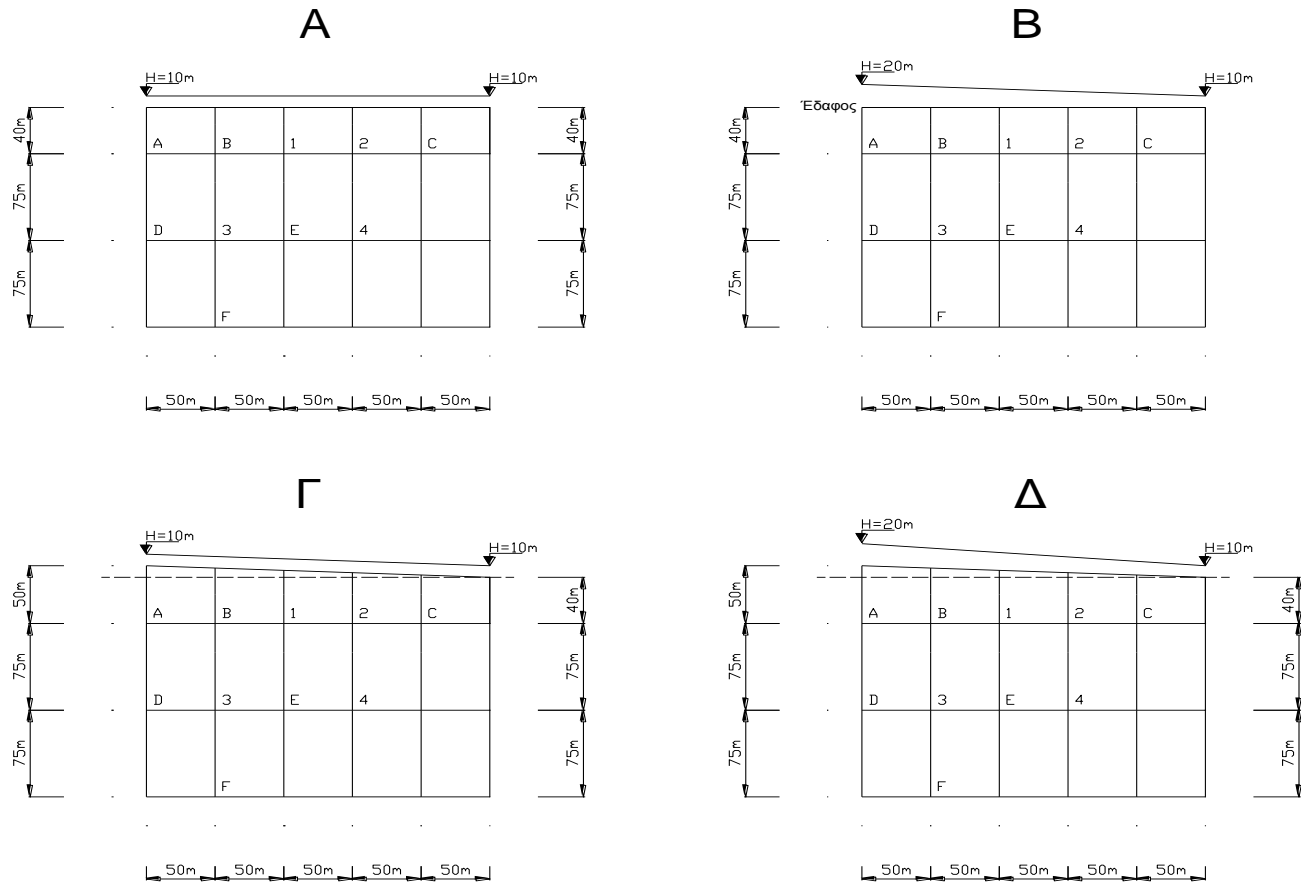
$$\Phi_D = -0.175 \text{ m}$$

$$\Phi_E = -0.150 \text{ m}$$

$$\Phi_F = -0.150 \text{ m}$$



ΑΣΚΗΣΗ 6η (3/10)



ΑΣΚΗΣΗ 6η (4/10)

Εξίσωση κόμβου 3:

$$\Phi_E + \Phi_D + (h/k)^2 (\Phi_F + \Phi_B) - 2(1 + (h/k)^2) \Phi_3 = 0$$

$$\Phi_3 = \frac{\Phi_E + \Phi_D + (h/k)^2 (\Phi_F + \Phi_B)}{2(1 + (h/k)^2)}$$



ΑΣΚΗΣΗ 6η (5/10)

Εξίσωση κόμβου B:

$$\frac{\partial^2 \Phi_B}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} (\Phi_A - 2\Phi_B + \Phi_1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_B}{\partial y^2} = \frac{1}{k^2} \left[\frac{2}{\theta_B (1 + \theta_B)} \Phi_{BO} + \frac{2}{1 + \theta_B} \Phi_3 - \frac{2}{\theta_B} \Phi_B \right]$$

$$\Phi_A + \Phi_1 + (h/k)^2 \left[\frac{2}{\theta_B (1 + \theta_B)} \Phi_{BO} + \frac{2}{1 + \theta_B} \Phi_3 \right] - \left(2 + \frac{2(h/k)^2}{\theta_B} \right) \Phi_B = 0$$

$$\Phi_1 = -\Phi_A - (h/k)^2 \left[\frac{2}{\theta_B (1 + \theta_B)} \Phi_{BO} + \frac{2}{1 + \theta_B} \Phi_3 \right] + \left(2 + \frac{2(h/k)^2}{\theta_B} \right) \Phi_B$$



ΑΣΚΗΣΗ 6η (6/10)

Εξίσωση κόμβου 1:

$$\Phi_2 = -\Phi_B - (h/k)^2 \left[\frac{2}{\theta_1(1+\theta_1)} \Phi_{1O} + \frac{2}{1+\theta_1} \Phi_E \right] + \left(2 + \frac{2(h/k)^2}{\theta_1} \right) \Phi_1$$

Εξίσωση κόμβου 2:

$$\Phi_1 + \Phi_C + (h/k)^2 \left[\frac{2}{\theta_2(1+\theta_2)} \Phi_{2O} + \frac{2}{1+\theta_2} \Phi_4 \right] - \left(2 + \frac{2(h/k)^2}{\theta_2} \right) \Phi_2 = 0$$

$$\Phi_4 = \frac{1+\theta_2}{2} \left[\frac{1}{(h/k)^2} \left[\left(2 + \frac{2(h/k)^2}{\theta_2} \right) \Phi_2 - (\Phi_1 + \Phi_C) \right] - \frac{2}{\theta_2(1+\theta_2)} \Phi_{2O} \right]$$



ΑΣΚΗΣΗ 6η (7/10)

Στάθμη ποταμού με κλίση: **ΌΧΙ**
 Επιφάνεια εδάφους με κλίση: **ΌΧΙ**

Δυναμικό στους κόμβους
 πάνω από τα σημεία:

	P/ρg	Z	θ	
$\Phi_{AO} =$	-0.100 m	10	0	0.533
$\Phi_{BO} =$	-0.100 m	10	0	0.533
$\Phi_{10} =$	-0.100 m	10	0	0.533
$\Phi_{20} =$	-0.100 m	10	0	0.533
$\Phi_{CO} =$	-0.100 m	10	0	0.533

AO	BO	10	20	CO
A	B	1	2	C
D	3	E	4	

	F			
-0.100	-0.100	-0.100	-0.100	-0.100
-0.090	-0.088	-0.084	-0.077	-0.050
-0.070	-0.069	-0.060	-0.070	
	-0.065			



ΑΣΚΗΣΗ 6η (8/10)

Στάθμη ποταμού με κλίση: ΝΑΙ
Επιφάνεια εδάφους με κλίση: ΌΧΙ

Δυναμικό στους κόμβους
 πάνω από τα σημεία:

$$\Phi_{AO} = -0.200 \text{ m}$$

$$\Phi_{BO} = -0.180 \text{ m}$$

$$\Phi_{1O} = -0.160 \text{ m}$$

$$\Phi_{2O} = -0.140 \text{ m}$$

$$\Phi_{CO} = -0.120 \text{ m}$$

P/ρg	Z	θ
20	0	0.533
18	0	0.533
16	0	0.533
14	0	0.533
12	0	0.533

AO	BO	1O	2O	CO
A	B	1	2	C
D	3	E	4	
	F			
-0.200	-0.180	-0.160	-0.140	-0.120
-0.180	-0.170	-0.154	-0.134	-0.115
-0.175	-0.162	-0.150	-0.118	
	-0.150			



ΑΣΚΗΣΗ 6η (9/10)

Στάθμη ποταμού με κλίση: **ΌΧΙ**
 Επιφάνεια εδάφους με κλίση: **ΝΑΙ**

Δυναμικό στους κόμβους
 πάνω από τα σημεία:

$$\Phi_{AO} = -0.200 \text{ m}$$

$$\Phi_{BO} = -0.180 \text{ m}$$

$$\Phi_{1O} = -0.160 \text{ m}$$

$$\Phi_{2O} = -0.140 \text{ m}$$

$$\Phi_{CO} = -0.120 \text{ m}$$

P/ρg	Z	θ
10	10	0.667
10	8	0.640
10	6	0.613
10	4	0.587
10	2	0.560

AO	BO	1O	2O	CO
A	B	1	2	C
D	3	E	4	
	F			
-0.200	-0.180	-0.160	-0.140	-0.120
-0.195	-0.173	-0.151	-0.117	-0.115
-0.170	-0.163	-0.155	-0.022	
	-0.155			



ΑΣΚΗΣΗ 6η (10/10)

Στάθμη ποταμού με κλίση: **ΝΑΙ**
 Επιφάνεια εδάφους με κλίση: **ΝΑΙ**

Δυναμικό στους κόμβους
 πάνω από τα σημεία:

$$\Phi_{AO} = -0.300 \text{ m}$$

$$\Phi_{BO} = -0.260 \text{ m}$$

$$\Phi_{1O} = -0.220 \text{ m}$$

$$\Phi_{2O} = -0.180 \text{ m}$$

$$\Phi_{CO} = -0.140 \text{ m}$$

P/ρg	Z	θ
20	10	0.667
18	8	0.640
16	6	0.613
14	4	0.587
12	2	0.560

AO	BO	1O	2O	CO
A	B	1	2	C
D	3	E	4	
	F			

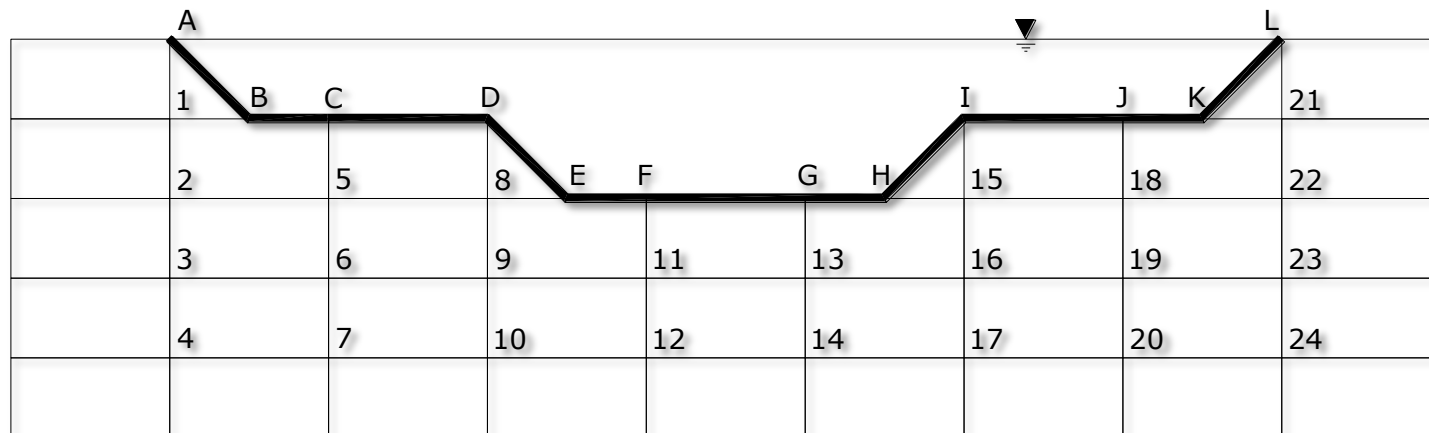
-0.300	-0.260	-0.220	-0.180	-0.140
-0.260	-0.230	-0.197	-0.159	-0.130
-0.200	-0.188	-0.170	-0.108	
	-0.160			



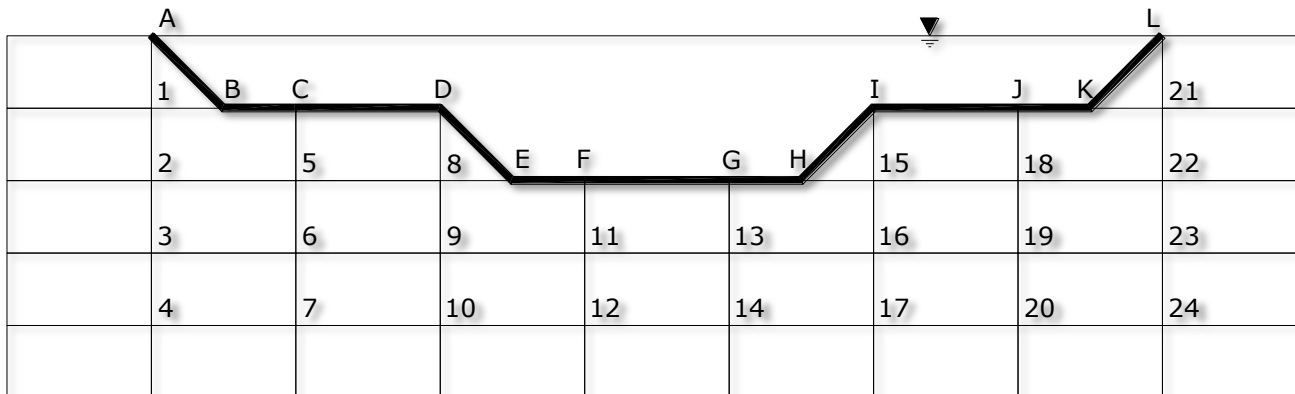
ΑΣΚΗΣΗ 7η (2/6)

Δίνονται οι τιμές του δυναμικού, συναρτήσει του συντελεστή διαπερατότητας K , στους ακόλουθους κόμβους, θεωρώντας ως επίπεδο αναφοράς τον άξονα E-H:

Φ_3	Φ_4	Φ_6	Φ_7	Φ_9	Φ_{10}	Φ_{12}
-35K	-32K	-34K	-31K	-30K	-28K	-23K
Φ_{14}	Φ_{16}	Φ_{17}	Φ_{19}	Φ_{20}	Φ_{23}	Φ_{24}
-23K	-30K	-28K	-34K	-31K	-35K	-32K



ΑΣΚΗΣΗ 7η (3/6)



εξίσωση κόμβου 6

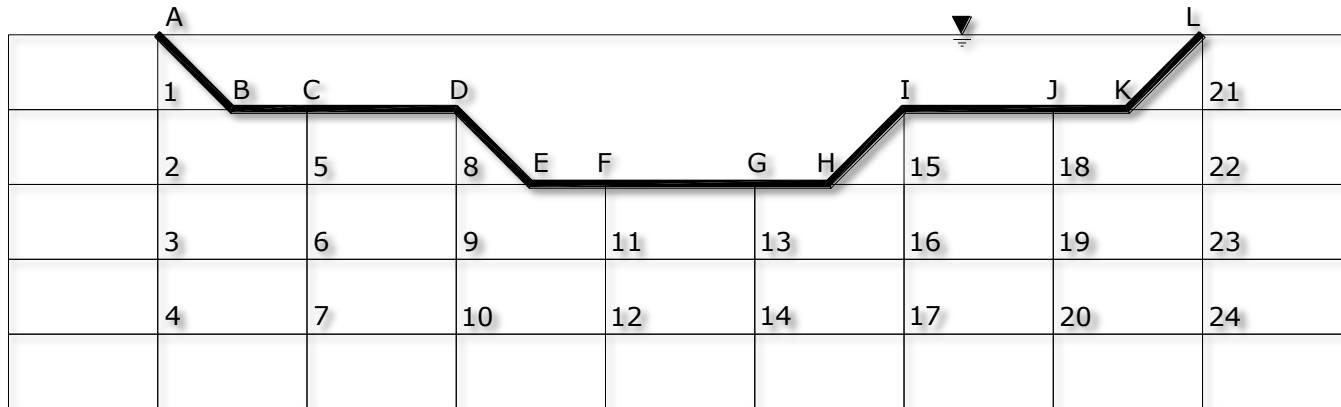
$$\Phi_3 + \Phi_9 + r^2(\Phi_5 + \Phi_7) - 2(1 + r^2)\Phi_6 = 0$$

$$\Phi_5 = \frac{2(1 + r^2)\Phi_6 - \Phi_3 - \Phi_9}{r^2} - \Phi_7$$

$$\Phi_5 = -37.75 \text{ K}$$



ΑΣΚΗΣΗ 7η (4/6)



εξίσωση κόμβου 8

$$\left[\frac{2}{0.5(1+0.5)} \Phi_E + \frac{2}{1+0.5} \Phi_5 - \frac{2}{0.5} \Phi_8 \right] + r^2 (\Phi_D - 2\Phi_8 + \Phi_9) = 0$$

$$\Phi_8 = \left[r^2 (\Phi_D + \Phi_9) + \frac{2}{0.75} \Phi_E + \frac{2}{1.5} \Phi_5 \right] / (4 + 2r^2)$$



ΑΣΚΗΣΗ 7η (6/6)

	A									
1	B	C	D					21		
2		5	8	E	F			15	18	22
3		6	9		11	13	16	19	23	
4		7	10		12	14	17	20	24	

	-40.00								
	B	-40.00	-40.00						
		-37.75	-36.42	E	-40.00			-36.42	-37.75
	-35.00	-34.00	-30.00		-31.33	-31.33	-30.00	-34.00	-35.00
	-32.00	-31.00	-28.00		-23.00	-23.00	-28.00	-31.00	-32.00



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Δημήτριος Τολίκας, Νικόλαος Θεοδοσίου. «Υπόγεια Υδραυλική. Ενότητα 5. Πεπερασμένες διαφορές: Παραδείγματα και ασκήσεις». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://opencourses.auth.gr/courses/OCRS466/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

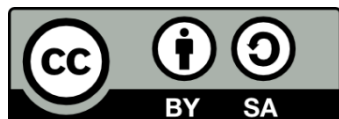
[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ιωάννης Αυγολούπης
Θεσσαλονίκη, <Εαρινό Εξάμηνο 2012-2013>





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

