



Υπόγεια Υδραυλική και Υδρολογία

Ενότητα 9: Ανομογενή και ανισότροπα εδάφη

Καθηγητής Κωνσταντίνος Λ. Κατσιφαράκης
Αναπληρωτής Καθηγητής Νικόλαος Θεοδοσίου

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών ΑΠΘ



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





Ανομογενή και ανισότροπα εδάφη



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

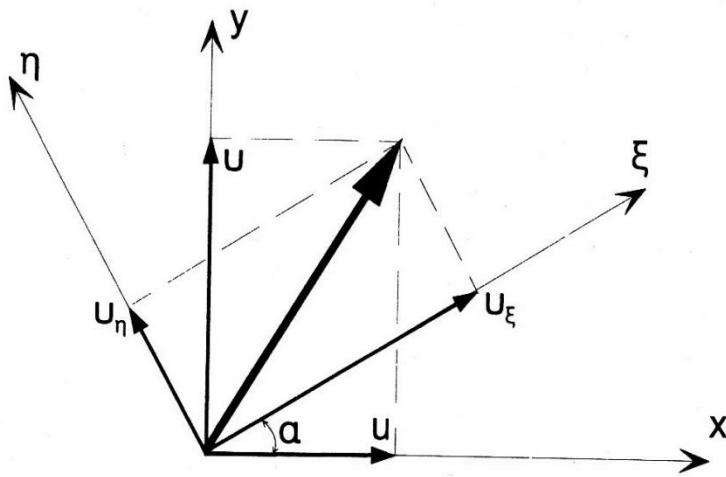
Τανυστής σχετικής διαπερατότητας σε ανισότροπα εδάφη (1/3)

Τα ανισότροπα εδάφη μπορούν να θεωρηθούν ότι προέρχονται από στρωματοποιημένα εδάφη, στα οποία το πάχος κάθε στρώσεως τείνει στο μηδέν και η μεταβολή του συντελεστή σχετικής διαπερατότητας από στρώση σε στρώση είναι συνεχής. Σ' αυτά τα εδάφη, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, εμφανίζονται δύο χαρακτηριστικές κάθετες διευθύνσεις, η παράλληλη και η κάθετη προς τις στρώσεις, κατά τις οποίες ο συντελεστής σχετικής διαπερατότητας παίρνει τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του αντίστοιχα. Οι δύο αυτές διευθύνσεις ονομάζονται κύριες. Σ' ενδιάμεσες διευθύνσεις ο συντελεστής σχετικής διαπερατότητας παίρνει ενδιάμεσες τιμές και έτσι η ροή μπορεί να μελετηθεί με την εισαγωγή του τανυστή σχετικής διαπερατότητας.

Πηγή: Δημ. Τολίκας, Υπόγεια Υδραυλική, εκδ. Παρατηρητής, 1997, σελ. 202.



Τανυστής σχετικής διαπερατότητας σε ανισότροπα εδάφη (2/3)



Οι συνιστώσες της ταχύτητας διήθησης κατά τους άξονες x και y είναι

$$\left. \begin{aligned} u &= -K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \\ u &= -K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (10.7)$$

ενώ οι συνιστώσες της κατά τους άξονες xi και η ενός καινούριου συστήματος συντεταγμένων (σχήμα 10.2) είναι

$$\left. \begin{aligned} u_{\xi} &= u \cos \alpha + u \sin \alpha \\ u_{\eta} &= u \cos \alpha - u \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

Η αντικατάσταση των 10.7 στις 10.8 δίνει

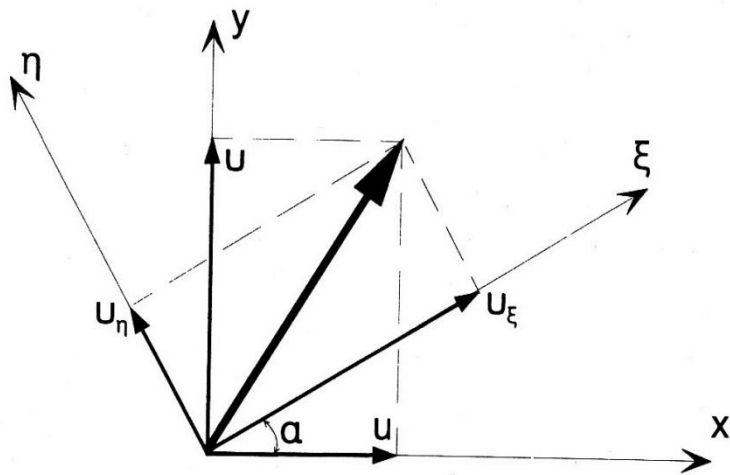
$$\left. \begin{aligned} u_{\xi} &= -K_{xx} \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial x} - K_{yy} \sin \alpha \frac{\partial h}{\partial y} \\ u_{\eta} &= -K_{yy} \cos \alpha \frac{\partial h}{\partial y} + K_{xx} \sin \alpha \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

Εικόνα 1: Τανυστής σχετικής διαπερατότητας σε ανισότροπα εδάφη.

Πηγή: Δημ. Τολίκας, Υπόγεια Υδραυλική, εκδ. Παρατηρητής, 1997, σελ. 203.



Τανυστής σχετικής διαπερατότητας σε ανισότροπα εδάφη (3/3)



Εικόνα 2: Τανυστής σχετικής διαπερατότητας σε ανισότροπα εδάφη.

Πηγή: Δημ. Τολίκας, ο.π., σελ. 204 και 205.

Αντικαθιστώντας τις 10.11 στις 10.9 υπολογίζονται α συνιστώσες της ταχύτητας στο καινούριο σύστημα συντεταγμένων (ξ, η)

$$\left. \begin{aligned} u_{\xi} &= -K_{\xi\xi} \frac{\partial h}{\partial \xi} - K_{\xi\eta} \frac{\partial h}{\partial \eta} \\ u_{\eta} &= -K_{\eta\eta} \frac{\partial h}{\partial \eta} - K_{\eta\xi} \frac{\partial h}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

όπου,

$$\begin{aligned} K_{\xi\xi} &= K_{xx} \cos^2 \alpha + K_{yy} \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{2} (K_{xx} + K_{yy}) - \frac{1}{2} (K_{yy} - K_{xx}) \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{\eta\eta} &= K_{yy} \cos^2 \alpha + K_{xx} \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{2} (K_{xx} + K_{yy}) + \frac{1}{2} (K_{yy} - K_{xx}) \cos 2\alpha \quad (10.13) \end{aligned}$$

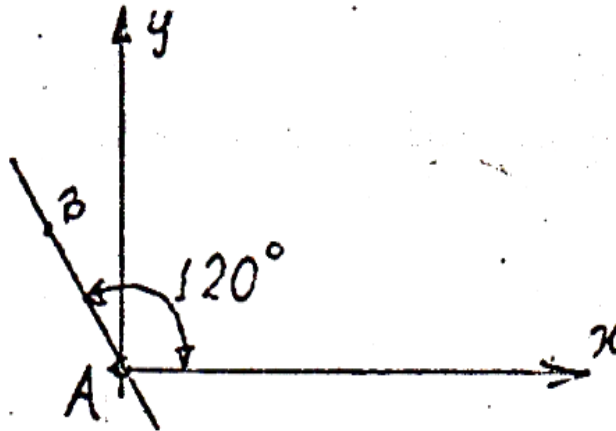
$$\begin{aligned} K_{\xi\eta} &= K_{\eta\xi} = (K_{yy} - K_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= \frac{1}{2} (K_{yy} - K_{xx}) \sin 2\alpha \end{aligned}$$

Από τις τελευταίες σχέσεις υπολογίζονται οι συντελεστές σχετικής διαπερατότητας κατά τους άξονες ξ και η , όταν είναι γνωστοί οι συντελεστές σχετικής διαπερατότητας κατά τους κύριους άξονες.



Άσκηση 1^η (1/3)

Σ' ένα ανισότροπο πεδίο ροής με κύριους άξονες τους x και y (σχήμα 2) μετρήθηκε με τη βοήθεια πιεζομέτρων το υδραυλικό φορτίο στο σημείο A και σε πολλά γειτονικά του A σημεία. Διαπιστώθηκε ότι το υδραυλικό φορτίο παρέμενε αμετάβλητο κατά τη διεύθυνση AB . Να υπολογίσετε τη διεύθυνση της ταχύτητας στο σημείο A , αν η διαπερατότητα κατά τη διεύθυνση x είναι τετραπλάσια από ότι κατά τη διεύθυνση y .



Σχήμα 1: ανισότροπο πεδίο ροής.



Άσκηση 1η (2/3)

Λύση:

AB ισοδυναμική γραμμή

$$\operatorname{tg}\varphi = u/v$$

$$u = -K_{xx} dh/dx$$

$$v = -K_{yy} dh/dy$$

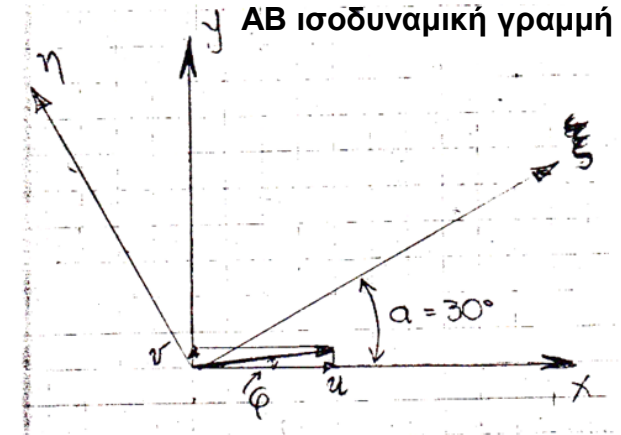
$$\operatorname{tg}\varphi = u/v = (K_{yy}/K_{xx}) \cdot (dh/dy)/(dh/dx)$$

Επειδή $dh/dn=0$:

$$dh/dx = dh/d\xi \cdot \cos\alpha - dh/dn \cdot \sin\alpha = dh/d\xi \cdot \cos\alpha$$

$$dh/dy = dh/d\xi \cdot \sin\alpha + dh/dn \cdot \cos\alpha = dh/d\xi \cdot \sin\alpha$$

$$\text{και } (dh/dy)/(dh/dx) = \sin\alpha / \cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha$$

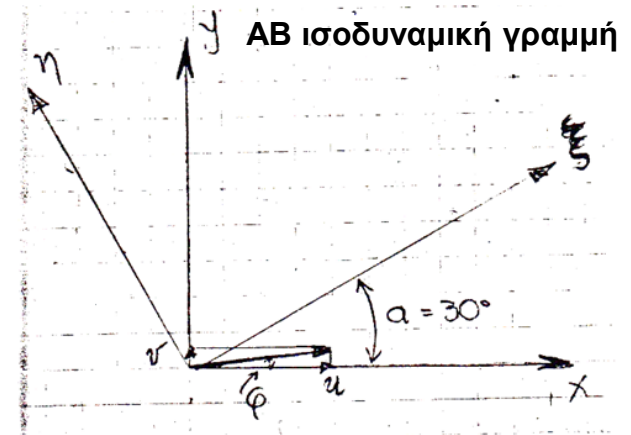


Άσκηση 1^η (3/3)

$$\text{Άρα } \operatorname{tg}\phi = (K_{yy} / K_{xx}) \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

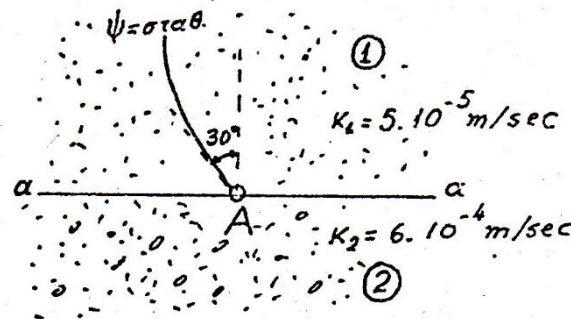
$$\operatorname{tg}\phi = 1/4 \cdot \operatorname{tg}30^\circ = 0,14433$$

$$\text{και } \phi = 8,21^\circ$$



Άσκηση 2^η (1/3)

Η οριζόντια γραμμή α-α που φαίνεται στο σχ.2 αποτελεί το διαχωριστικό όριο μεταξύ δύο ομογενών και ισοτρόπων πορώδων μέσων (1) και (2) με συντελεστές σχετικής διαπερατότητας $K_1=5 \cdot 10^{-5}$ m/sec και $K_2=6 \cdot 10^{-4}$ m/sec αντίστοιχα. Εάν η γραμμή ροής στη θέση A κατά την έξοδο της από το πορώδες μέσο (1) έχει εφαπτομένη που σχηματίζει γωνία 30° με την κατακόρυφη και η ταχύτητα του νερού στην ίδια θέση είναι $u=1,5 \cdot 10^{-3}$ m/sec, να υπολογίσετε την ταχύτητα στη θέση A αμέσως μετά την είσοδο του νερού στο πορώδες μέσο (2).



Σχήμα 2: δύο πορώδη μέσα.



Άσκηση 2^η (2/3)

Λύση:

$$K_1/K_2 = \operatorname{tg}\alpha_1 / \operatorname{tg}\alpha_2 \quad (1)$$

$$U_{1\eta} = U_{2\eta} \rightarrow U_1 \cos\alpha_1 = U_2 \cos\alpha_2 \quad (2)$$

Από την (1) $\operatorname{tg}\alpha_2 = K_2/K_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1$

και αριθμητικά

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = (6 \cdot 10^{-4} / 5 \cdot 10^{-5}) \operatorname{tg}30^\circ = 6,92 \rightarrow \alpha_2 = 81,79^\circ$$

και $\cos\alpha_2 = 0,143$.

Έτσι, από τη (2):

$$U_2 = U_1 \cos\alpha_1 / \cos\alpha_2$$

και αριθμητικά

$$U_2 = 1,5 \cdot 10^{-3} \cos 30^\circ / \cos 81,79^\circ = 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,866 / 0,143 = 9,08 \cdot 10^{-3} \text{m/s.}$$

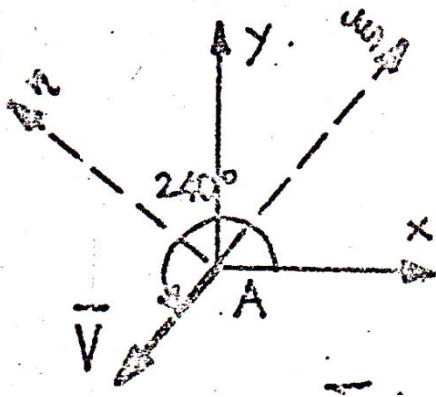


Άσκηση 2^η (3/3)

Παρατηρούμε, λοιπόν, τόσο την έντονη αλλαγή διεύθυνσης (φαινόμενο διάθλασης) στο μέσο (2), όσο και την πολύ μεγαλύτερη τιμή της ταχύτητας διηθήσεως στο ίδιο μέσο σε σχέση με το μέσο (1) (που οφείλεται προφανώς στη μεγαλύτερη τιμή της διαπερατότητας K_2).



Άσκηση 3^η (1/3)



Το υδραυλικό φορτίο σε ένα ανισότροπο πεδίο ροής στη γειτονιά του σημείου A (1,1) δίνεται από τη σχέση $h=3x^2+2xy+3y^2+7$. Η ταχύτητα ροής στο ίδιο σημείο A έχει μέτρο $|V|=1,8 \times 10^{-2}$ m/s και η διεύθυνση που σχηματίζει γωνία 240° με τον άξονα των x (σχήμα 2). Να υπολογισθούν οι συντελεστές σχετικής διαπερατότητας κατά τους άξονες ξ και η αν οι κύριες διευθύνσεις του τανυστή σχετικής διαπερατότητας συμπίπτουν με τους άξονες x και y.



Άσκηση 3^η (2/3)

$$u = -|V| \cos 60^\circ = -1,8 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 = -0,9 \cdot 10^{-2}$$

$$v = -|\bar{V}| \sin 60^\circ = -1,8 \cdot 10^{-2} \cdot 0,866 = -1,55 \cdot 10^{-2}$$

Αλλά $u = -K_{xx} \cdot dh/dx$, $v = -K_{yy} \cdot dh/dy$

Στο σημείο A όμως

$$dh/dx = 6x + 2y = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 8$$

$$dh/dy = 2x + 6y = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 8$$

και έτσι

$$K_{xx} = 0,9 \cdot 10^{-2} / 8 = 0,1125 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

$$K_{yy} = 1,55 \cdot 10^{-2} / 8 = 0,1937 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$



Άσκηση 3^η (3/3)

Από τις σχέσεις (10.13) σελ.181 «Υπόγεια Υδραυλική» υπολογίζονται
Για $\alpha=60^\circ$ οι συντελεστές $K_{\xi\xi}$, $K_{\eta\eta}$, $K_{\xi\eta}$:

$$K_{\xi\xi} = K_{xx} \cos^2 \alpha + K_{yy} \sin^2 \alpha = (0,1125 \cdot 0,5^2 + 0,1937 \cdot 0,866^2) \cdot 10^{-2}$$

$$K_{\xi\xi} = 0,1734 \cdot 10^{-2} \text{m/s}$$

$$K_{\eta\eta} = K_{xx} \sin^2 \alpha + K_{yy} \cos^2 \alpha = (0,1125 \cdot 0,866^2 + 0,1937 \cdot 0,5^2) \cdot 10^{-2}$$

$$K_{\eta\eta} = 0,1328 \cdot 10^{-2} \text{m/s}$$

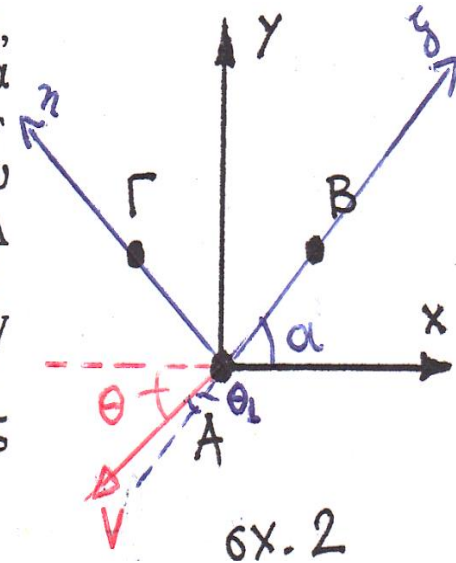
$$K_{\xi\eta} = K_{\eta\xi} = (K_{yy} - K_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha = (0,1937 - 0,1125) \cdot 10^{-2}$$

$$K_{\xi\eta} = K_{\eta\xi} = 0,0351 \cdot 10^{-2} \text{m/s}.$$



Άσκηση 4^η (1/4)

Η υπόγεια ροή σ' ένα υδροφορέα υπό πίεση, πάχους 32 m, ερευνήθηκε γύρω από ένα σημείο A. Στα τρία πιεζόμετρα στα σημεία A, B και Γ (όπου $x_B = y_B = 100$ m και $x_\Gamma = -100$ m, $y_\Gamma = 100$ m, σε σχέση με το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που φαίνεται στο σχ. 2), μετρήθηκαν τα εξής πιεζομετρικά φορτία: $h_A = 14.3$ m, $h_B = 15.8$ m και $h_\Gamma = 14.9$ m. Αν οι κύριες διευθύνσεις του τανυστή σχετικής διαπερατότητας είναι οι x και y με $K_{xx} = 2 \times 10^{-4}$ m/sec και $K_{yy} = 0.8 \times 10^{-4}$ m/sec, ζητείται να υπολογισθεί κατά μέτρο και διεύθυνση η ανά μέτρο πλάτους παροχή της ροής στο σημείο A.



Άσκηση 4^η (2/4)

Ορίζουμε τους άξονες ξ και η όπως φαίνονται στο σχήμα.

Θέλουμε να βρούμε τις ταχύτητες u_x και u_y και στη συνέχεια τη συνισταμένη τους.

Είναι:

$$u_x = -K_{xx} \Delta R / \Delta x$$

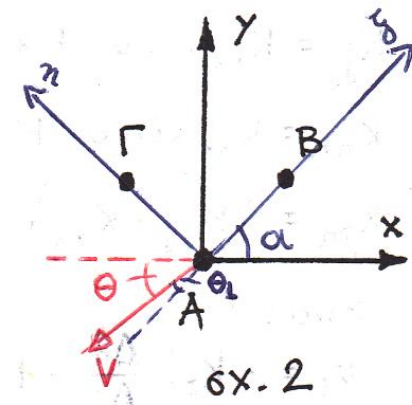
$$u_y = -K_{yy} \Delta R / \Delta y \quad \left. \vphantom{u_y} \right\} (1)$$

Αλλά:

$$\Delta R / \Delta x = \Delta R / \Delta \xi \cdot \cos \alpha - \Delta R / \Delta \eta \cdot \sin \alpha$$

$$\Delta R / \Delta y = \Delta R / \Delta \xi \cdot \cos \alpha + \Delta R / \Delta \eta \cdot \sin \alpha \quad \left. \vphantom{\Delta R / \Delta y} \right\} (2)$$

$$\cos \alpha = \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Άσκηση 4^η (3/4)

Είναι:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta R}{\Delta \xi} &= \frac{RB - RA}{l_{AB}} = \frac{15,8 - 14,3}{100\sqrt{2}} = 0,01061 \\ \frac{\Delta R}{\Delta \eta} &= \frac{R\Gamma - RA}{l_{A\Gamma}} = \frac{14,9 - 14,3}{100\sqrt{2}} = 4,243 \cdot 10^{-3} \end{aligned} \right\} (3)$$

$$2)^{(3)} \Rightarrow \Delta R/\Delta x = 4,495 \cdot 10^{-3}, \quad \Delta R/\Delta y = 0,0105 \quad (4)$$

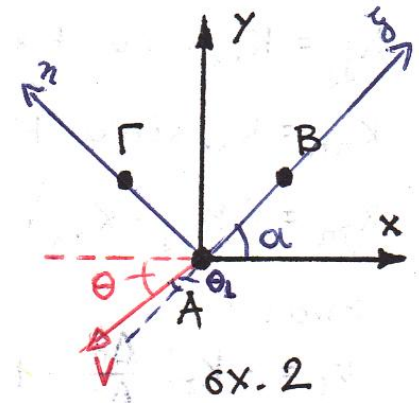
$$u_x = -2 \cdot 10^{-4} \cdot 4,495 \cdot 10^{-3} = -8,99 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$$

$$(1)^{(4)} \Rightarrow u_y = -0,8 \cdot 10^{-4} \cdot 0,0105 = -8,4 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$$

$$\text{Άρα } |V| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 1,23 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$$

$$\text{Και } q = |V| \cdot 32 = 3,94 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s} \cdot \text{m}$$

$$\text{Τέλος } \tan\theta = |u_y|/|u_x| = 0,934 \Rightarrow \theta = 43,06^\circ$$



Άσκηση 4^η (4/4)

2^{ος} τρόπος:

Υπολογίζουμε τους συντελεστές $K_{\xi\xi}$, K_{nn} , $K_{\xi n}$ (σχ. 10.13)

$$K_{\xi\xi} = K_{xx} \cos^2 \alpha + K_{yy} \sin^2 \alpha = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$K_{nn} = K_{xx} \sin^2 \alpha + K_{yy} \cos^2 \alpha = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

$$K_{\xi n} = (K_{yy} - K_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha = -0,6 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

Άρα:

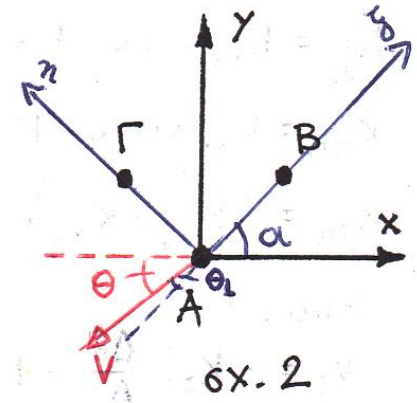
$$u_j = -K_{\xi\xi} \cdot \Delta R / \Delta \xi - K_{n\xi} \cdot \Delta R / \Delta n = -1,2301 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$$

$$u_n = -K_{nn} \cdot \Delta R / \Delta n - K_{n\xi} \cdot \Delta R / \Delta \xi = +4,258 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}$$

$$|V| = \sqrt{u_\xi^2 + u_n^2} = 1,231 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow q = -3,94 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s} \cdot \text{m}$$

$$\text{Τέλος } \tan \theta = |u_n| / |u_\xi| = 0,0346 \rightarrow \theta_1 = 1,98^\circ$$



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Τολίκας Δημήτριος ,
Θεοδοσίου Νικόλαος, Κατσιφαράκης Κωνσταντίνος, Λατινόπουλος Περικλής
«Υπόγεια Υδραυλική. Ενότητα 8. Ανομογενή και ανισότροπα εδάφη.». Έκδοση:
1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://opencourses.auth.gr/courses/OCRS466/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

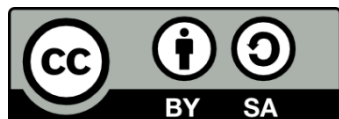
[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ιωάννης Αυγολούπης
Θεσσαλονίκη, <Εαρινό Εξάμηνο 2012-2013>



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

